Ορσ Μία αλυσίδα Markov με τιμές στο S (όπου $\# S \leq \infty$), είναι χρονικά ομογενής όταν

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall (i,j) \in S^2 \quad P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = P\{X_1 = j \mid X_0 = i\}.$$

Η τιμή $P\{X_1 = j \mid X_0 = i\} \equiv p(j|i)$ ονομάζεται πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση $i \in S$ στην κατάσταση $j \in S$. Ο πίνακας $\mathbb{P} = [p(j|i)]_{j,i \in S}$ είναι ο πίνακας μετάβασης της αλυσίδας X_n.

Ορσ Ο πίνακας $A = [\alpha_{ji}]_{i,j \in S}$ ονομάζεται στοχαστικός όταν: (i) $\alpha_{ji} \geq 0, \ \forall i,j \in S$

(ii) $\sum_{j \in S} \alpha_{ji} = 1, \ \forall i \in S$

Άσκηση Να δειχθεί ότι εάν $\mathbb{P} = [p_{ji}]_{j,i \in S}$ είναι στοχαστικός, τότε $\mathbb{P}^n \ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι στοχαστικός.

Ο $\mathbb{P}^1$ είναι στοχαστικός. Δεχόμαστε ότι $\mathbb{P}^n$ είναι στοχαστικός θα δείξουμε κ/ ότι $\mathbb{P}^{n+1}$ είναι στοχαστικός.

Πράγματι

$$\sum_{j \in S} (\mathbb{P}^{n+1})_{ji} = \sum_{j \in S} \sum_{k \in S} (\mathbb{P}^n)_{jk} (\mathbb{P})_{ki} = \sum_{k \in S} \sum_{j \in S} (\mathbb{P}^n)_{jk} (\mathbb{P})_{ki}$$

$$= \sum_{k \in S} (\mathbb{P})_{ki} \underbrace{\sum_{j \in S} (\mathbb{P}^n)_{jk}}_{=1} = \sum_{k \in S} (\mathbb{P})_{ki} = 1$$

□

ορσ (i) Ο πίνακας n-τάξης μετάβασης μιας αλυσίδας Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ με πιθανότητες μετάβασης $p(j|i)$, $j,i\in S$, είναι ο πίνακας

$$\mathbb{P}_n = [p_n(j|i)]_{j,i\in S}, \quad p_n(j|i) = P\{X_n=j \mid X_0=i\}.$$

(ii) Η κατανομή της αλυσίδας την χρονική στιγμή n είναι το διάνυσμα στήλη $p_n = [p_n(j)]_{j\in S}$ όπου $p_n(j)=P\{X_n=j\}$.

Πρόταση: Ο πίνακας n-τάξης μετάβασης, είναι ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης στη n-οστή δύναμη $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}^n$.

$$p_n(j) = P\{X_n=j\} = \sum_{i,s_1,\dots,s_{n-1}\in S} P\{X_0=i, X_1=s_1,\dots,X_{n-1}=s_{n-1}, X_n=j\} \quad (15.1)$$

$$P\{X_0=i, X_1=s_1,\dots,X_n=j\} = P\{X_0=i\}P\{X_1=s_1|X_0=i\}P\{X_2=s_2|X_1=s_1\}\cdots P\{X_n=j|X_{n-1}=s_{n-1}\}$$
$$= p_0(i)\,p(s_1|i)\,p(s_2|s_1)\cdots p(s_{n-1}|s_{n-2})\,p(j|s_{n-1}) \quad :(15.2)$$

$$(15.1)(15.2) \Rightarrow p_n(j) = \sum_{i\in S} p_0(i) \underbrace{\sum_{s_1,\dots,s_{n-1}\in S} p(s_1|i)p(s_2|s_1)\cdots p(j|s_n)}_{p_n(j|i)=P\{X_n=j|X_0=i\}=(\mathbb{P}^n)_{ji}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_n(j) = \sum_{i\in S} (\mathbb{P}^n)_{ji}\, p_0(i) \Leftrightarrow \boxed{p_n = \mathbb{P}^n p_0}$$

$$\sum_{j\in S} p(j|i) = 1, \ \forall i \in S \quad : (*) \qquad \sum_{j\in S} p_n(j|i) = 1, \ \forall i \in S$$

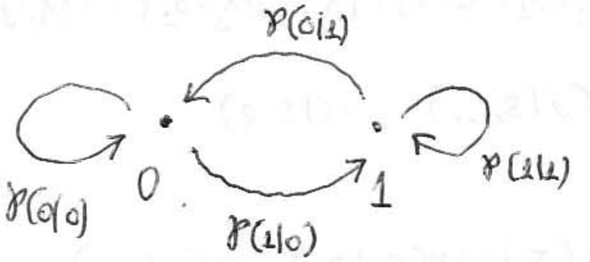
Με πιθ. 1, η διαδικασία σε οποιαδήποτε κατάσταση i θα πρέπει να μετακινηθεί σε κάποια άλλη κατάσταση $j \neq i$ ή να μείνει στην ίδια κατάσταση $j = i$ στο επόμενο χρονικό βήμα.

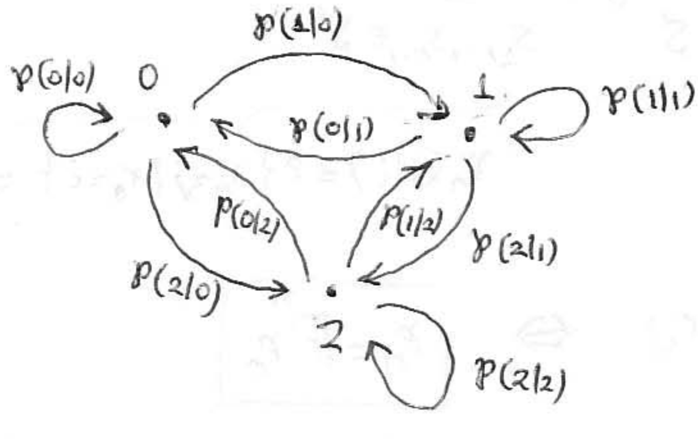
Η σχέση (*) μας λέει ακόμα ότι για σταθερό $i \in S$ $\{p(\cdot|i)\}$ είναι μέτρο πιθανότητας.

Για την <u>MC</u> της σελ 9 είδαμε ότι εάν

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} \\ \frac{p}{p+q} \end{pmatrix} \quad \text{τότε} \quad p_n = \pi + (1-p-q)^n \{\pi - p_0\}$$

$$p_{n+1} = \mathbb{P}\, p_n \qquad \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}$$





προσανατολισμένα γραφήματα

directed graphs

<u>Παρατήρηση</u> $\quad p_n = \mathbb{P}^n p_0 = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{P} p_0) = \mathbb{P}^{n-1} p_1 = \cdots = \mathbb{P}^{n-k} p_k \ , \ k=0,1,\dots,n$

<u>Άσκηση</u>: Δ.ό. ο πίνακας n-τάξης μετάβασης $\mathbb{P}_n$ είναι στοχαστικός.

Απο την Άσκηση στη σελ. 14 κ' το γεγονός ότι $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}^n$ αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{P}$ = στοχαστικός. Πράγματι. $\forall i \in S$,

$$1 = P\{X_{n+1} \in S \mid X_n = i\} = \sum_{j \in S} P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = \sum_{j \in S} p(j|i)$$

$\square$

<u>Άσκηση</u>: Να βρεθεί ο πίνακας n-τάξης μετάβασης για την Μαρκοβιανή αλυσίδα της σελ. 9, να βρεθεί το όριο $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n$ ή ισοδύναμα τα όρια $p_n(j|i)$ $\forall j, i \in S$.

Ο χώρος καταστάσεων είναι: $S = \{0,1\}$

$$p_n(0|0) = P\{X_n = 0 \mid X_0 = 0\} = P\{X_n = 0, X_{n-1} = 0 \mid X_0 = 0\} + P\{X_n = 0, X_{n-1} = 1 \mid X_0 = 0\}$$

$$= P\{X_{n-1} = 0 \mid X_0 = 0\} P\{X_n = 0 \mid X_{n-1} = 0\} + P\{X_{n-1} = 1 \mid X_0 = 0\} P\{X_n = 0 \mid X_{n-1} = 1\}$$

$$= p_{n-1}(0|0)(1-p) + p_{n-1}(1|0)\, q = p_{n-1}(0|0)(1-p) + (1 - p_{n-1}(0|0))\, q$$

$$= q + (1-p-q)\, p_{n-1}(0|0) \quad \Rightarrow$$

$$p_n(0|0) = q + (1-p-q)\, p_{n-1}(0|0) = q + (1-p-q)\left[q + (1-p-q)\, p_{n-2}(0|0)\right] =$$

$$= \{1 + (1-p-q)\}\, q + (1-p-q)^2\, p_{n-2}(0|0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p_n(0|0) = \{\underbrace{1+(1-p-q)+\cdots+(1-p-q)^{n-1}}_{\frac{1-(1-p-q)^n}{1-(1-p-q)}}\} q + (1-p-q)^n \underbrace{p_0(0|0)}_{1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p_n(0|0) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{p}{q+p}}$$

$$p_n(1|0) = 1 - p_n(0|0) = 1 - \frac{q}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{p}{q+p} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{p_n(1|0) = \frac{p}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{p}{q+p}}$$

$$p_n(0|1) = P\{X_n=0|X_0=1\} = P\{X_n=0, X_{n-1}=0|X_0=1\} + P\{X_n=0, X_{n-1}=1|X_0=1\}$$

$$= P\{X_{n-1}=0|X_0=1\}P\{X_n=0|X_{n-1}=0\} + P\{X_{n-1}=1|X_0=1\}P\{X_n=0|X_{n-1}=1\}$$

$$= p_{n-1}(0|1)(1-p) + (1-p_{n-1}(0|1))\,q = p_{n-1}(0|1)\cdot(1-p-q) + q \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p_n(0|1) = \{p_{n-2}(0|1)(1-p-q)+q\}(1-p-q)+q$$

$$= \{1+(1-p-q)\}q + (1-p-q)^2 p_{n-2}(0|1)$$

$$\Rightarrow \quad p_n(0|1) = \{\underbrace{1+(1-p-q)+\cdots+(1-p-q)^{n-1}}_{\frac{1-(1-p-q)^n}{1-(1-p-q)}}\} q + (1-p-q)^n \underbrace{p_0(0|1)}_{0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p_n(0|1) = \frac{q}{q+p} - (1-p-q)^n \frac{q}{q+p}}$$

$$p_n(1|1) = 1 - p_n(0|1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p_n(1|1) = \frac{p}{q+p} + (1-p-q)^n \frac{q}{q+p}}$$

Θέτοντας $p' \equiv \dfrac{p}{q+p}$, $q' \equiv \dfrac{q}{q+p}$, $\alpha_n \equiv (1-p-q)^n$

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}^n = \begin{pmatrix} q' + p'\alpha_n & q' - q'\alpha_n \\ p' - p'\alpha_n & p' + q'\alpha_n \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} q' & q' \\ p' & p' \end{pmatrix} \quad : (18.1)$$

$\square$

<u>Παρατήρηση</u>

Η κατανομή της αλυσίδας σε χρόνο n είναι:

$$p_n = \mathbb{P}_n p_0 = \begin{pmatrix} q' + p'\alpha_n & q' - q'\alpha_n \\ p' - p'\alpha_n & p' + q'\alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(0) \\ p_0(1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} q'\overbrace{(p_0(0) + p_0(1))}^{1} + \alpha_n (p' p_0(0) - q' p_0(1)) \\ p'(p_0(0) + p_0(1)) + \alpha_n(-p' p_0(0) + q' p_0(1)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} + \alpha_n \cdot (p' p_0(0) - q' p_0(1)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} \quad : (18.2)$$

<u>ανεξάρτητα από την αρχική κατανομή</u> $p_0 = \begin{pmatrix} p_0(0) \\ p_0(1) \end{pmatrix}$.

Η εξίσωση των Chapman - Kolmogorov

Εάν η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια αλυσίδα Markov με n-τάξης πίνακα μετάβασης $\mathbb{P}_n = [p_n(j|i)]_{j,i\in S}$ τότε ισχύει

$$p_{m+n}(A|i) = \sum_{s\in S} p_m(A|s)\,p_n(s|i) \qquad : (19.1)$$

Πρώτα θα δείξουμε ότι η ιδιότητα Markov στην (7.1) είναι ισοδύναμη με το εξής:

$$\forall\, m<n \quad P\{X_n\in A \mid X_m=x_m,\dots,X_0=x_0\} = P\{X_n\in A\mid X_m=x_m\}$$

Πράγματι

$$P\{X_n\in A\mid X_m=x_m,\dots,X_0=x_0\} = \sum_{x_{n-1},\dots,x_{m+1}\in S} P\{X_n\in A, X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_{m+1}=x_{m+1} \mid X_m=x_m,\dots,X_0=x_0\}$$

$$= \sum_{x_{n-1},\dots,x_{m+1}\in S} P\{X_{m+1}=x_{m+1}\mid X_m=x_m\}\cdots P\{X_n\in A\mid X_{n-1}=x_{n-1}\}$$

$$= \frac{1}{P\{X_m=x_m\}} \sum_{x_{n-1},\dots,x_{m+1}} P\{X_m=x_m\}P\{X_{m+1}=x_{m+1}\}\cdots P\{X_n\in A\mid X_{n-1}=x_{n-1}\}$$

$$= \frac{1}{P\{X_m=x_m\}} \sum_{x_{n-1},\dots,x_{m+1}} P\{X_m=x_m, X_{m+1}=x_{m+1},\dots,X_{n-1}=x_{n-1}, X_n\in A\}$$

$$= \frac{1}{P\{X_m=x_m\}} P\{X_m=x_m, X_n\in A\} = P\{X_n\in A\mid X_m=x_m\}$$

Απόδειξη της (19.1)

$$p_{m+n}(A|i) = P\{X_{n+m}\in A \mid X_0=i\} = \sum_{s\in S'} P\{X_{n+m}\in A,\, X_n=s \mid X_0=i\}$$

$$= \sum_{s\in S'} P\{X_{n+m}\in A \mid X_n=s\}\, P\{X_n=s \mid X_0=i\}$$

$$= \sum_{s\in S'} P\{X_m\in A \mid X_0=s\}\, P\{X_n=s \mid X_0=i\} = \sum_{s\in S'} p_m(A|s)\, p_n(s|i)$$

$\square$

Τυχαίος Περίπατος

Στην σελ. 1 ορίσαμε $X_n = X_{n-1} + Z_n$, $n\geq 1$ κ' $X_0=0$ όπου Z_i ανεξάρτητες κ' ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. με $P\{Z_i=-1\}=1-p$ κ' $P\{Z_i=1\}=p$, $0<p<1$. Στην σελ. 3 είδαμε ότι $P\{X_{n+1}=y \mid X_n=x, X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_0=x_0\} = P\{X_{n+1}=y \mid X_n=x\}$ δηλ. ότι ο τ.π. είναι μια αλυσίδα Markov με $S'=\mathbb{Z}$ κ' μάλιστα χρονικά ομογενής (παράδειγμα σελ. 8)

$$(3.1) \Rightarrow p(j|i) = \begin{cases} q, & j=i-1 \\ p, & j=i+1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}, \quad q=1-p,\ 0<p<1 \qquad :(20.1)$$

Στην σελ. 4 είδαμε διαισθητικά ότι θα πρέπει να ισχύει

$$p_n(j|i) = \begin{cases} \mathrm{Bin}\left(\frac{n+j-i}{2} \,\middle|\, n,p\right), & n+j-i = \text{άρτιος} \\ 0, & n+j-i = \text{περιττός} \end{cases} \qquad :(20.2)$$

<u>Στα επόμενα</u> θα αποδείξουμε τη σχέση (20.2) με επαγωγή:

$$n=1 \Rightarrow p_1(j|i)=\begin{cases} Bin\left(\frac{1+j-i}{2}\Big|1,p\right) & 1+j-i=2m \\ 0 & 1+j-i=2m+1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \binom{m}{1} p^m (1-p)^{1-m} & \frac{1+j-i}{2}=m\in\{0,1\} \Rightarrow \begin{cases} m=0 \Rightarrow j=i-1 \\ m=1 \Rightarrow j=i+1 \end{cases} \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} q, & j=i-1 \\ p, & j=i+1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

δεχόμαστε την (20.2) κ' την αποδεικνύουμε για $n+1$

$$p_{n+1}(j|i)=P\{X_{n+1}=j\,|\,X_0=i\}=P\{X_{n+1}=j, X_n=j-1\,|\,X_0=i\}+P\{X_{n+1}=j, X_n=j+1\,|\,X_0=i\}$$

$$=\underbrace{P\{X_n=j-1\,|\,X_0=i\}}_{Bin\left(\frac{n+j-1-i}{2}\big|n,p\right)}\underbrace{P\{X_{n+1}=j\,|\,X_n=j-1\}}_{p}+\underbrace{P\{X_n=j+1\,|\,X_0=i\}}_{Bin\left(\frac{n+j+1-i}{2}\big|n,p\right)}\underbrace{P\{X_{n+1}=j\,|\,X_n=j+1\}}_{q}$$

$$=p\cdot\binom{n}{\frac{n+j-1-i}{2}}p^{\frac{n+j-1-i}{2}}q^{\frac{n-j+1+i}{2}}+q\cdot\binom{n}{\frac{n+j+1-i}{2}}p^{\frac{n+j+1-i}{2}}q^{\frac{n-j-1+i}{2}}$$

$$=\underbrace{\left\{\binom{n}{\frac{n+j-1-i}{2}}+\underbrace{\binom{n}{\frac{n+j+1-i}{2}}}_{\binom{n}{\frac{n+j-1-i}{2}+1}}\right\}}_{\binom{n+1}{\frac{n+j-1-i}{2}+1}}p^{\frac{n+j+1-i}{2}}q^{\frac{n-j+1+i}{2}}=$$

$$=Bin\left(\frac{(n+1)+(j-i)}{2}\Big|n+1,p\right)$$

$\square$

<u>Άσκηση</u> Έστω τυχαίος περίπατος $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Δείξτε ότι η πιθανότητα ο τ.π. να ξαναγυρίσει στο σημείο από όπου ξεκίνησε μεγιστοποιείται για $p=1/2$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $P\{X_n=i|X_0=i\}=\max$ για $p=1/2$

$$(20.2)\overset{j=i}{\Rightarrow} p_n(i|i)=\begin{cases}Bin\left(\frac{n}{2}\middle|n,p\right), & n=\text{άρτιος}\\ 0, & n=\text{περιττός}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{2k}(i|i)=Bin(k|2k,p)=\binom{2k}{k}(pq)^k\Rightarrow$$

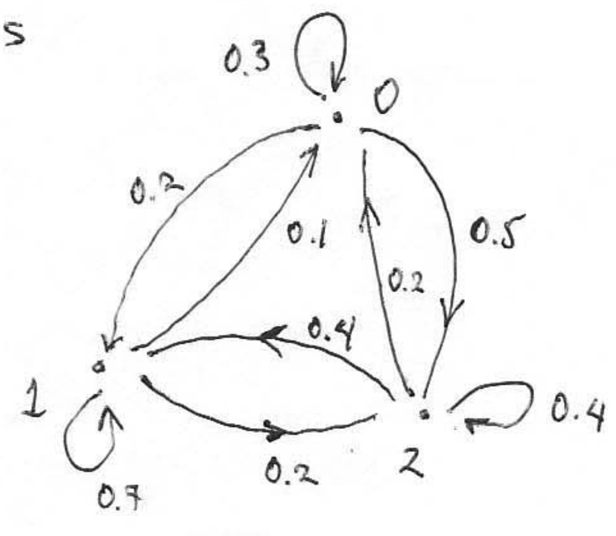
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial p}\log p_{2k}(i|i)=\frac{\partial}{\partial p}\left\{\log\binom{2k}{k}+k\log(p)+k\log(1-p)\right\}$$

$$=\frac{k}{p}-\frac{k}{1-p}=0\Rightarrow p=1/2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}\log p_{2k}(i|i)=-\frac{k}{p^2}-\frac{k}{(1-p)^2}<0\quad\forall\, p\in(0,1)$$

□

<u>Άσκηση</u> Δίνεται αλυσίδα Markov X_n με $S=\{0,1,2\}$ κ' διάγραμμα μετάβασης



(i) Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}$

(ii) Εαν η αρχική κατανομή της αλυσίδας είναι:

$$X_0 \overset{d}{=} p_0 = \begin{pmatrix} p_0(0) \\ p_0(1) \\ p_0(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.50 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

να βρεθούν οι απο κοινού πιθανότητες

(α) $P\{X_0=0, X_1=2, X_2=1\}$

(β) $P\{X_0=0, X_1=1, X_2=2, X_3=0\}$

(iii) Εαν η αρχική κατανομή της αλυσίδας είναι

$$X_0 \overset{d}{=} p_0 = \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.50 \\ 0.20 \end{pmatrix}$$

να βρεθούν οι πιθανότητες $p_2(i|i)$ για $i=0,1,2$ κ' η κατανομή της αλυσίδας σε χρόνο 2.

(i) Απο το διάγραμμα της σελ 22 έχουμε

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p(0|0) & p(0|1) & p(0|2) \\ p(1|0) & p(1|1) & p(1|2) \\ p(2|0) & p(2|1) & p(2|2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(iiα) $P\{X_0=0, X_1=2, X_2=1\} = P\{X_0=0\} P\{X_1=2 | X_0=0\} \overbrace{P\{X_2=1 | X_1=2\}}^{P\{X_1=1|X_0=2\}}$

$= p_0(0)\, p(2|1)\, p(1|2) = 0.25 \times 0.50 \times 0.40 = 0.05$

(ii β) $P\{X_0=0, X_1=1, X_2=2, X_3=0\} =$

$= P\{X_0=0\}P\{X_1=1|X_0=0\}P\{X_2=2|X_1=1\}P\{X_3=0|X_2=2\} =$

$= P\{X_0=0\}P\{X_1=1|X_0=0\}P\{X_1=2|X_0=1\}P\{X_1=0|X_0=2\}$

$= p_0(0)\,p(1|0)\,p(2|1)\,p(0|2) = 0.25 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.2 = 0.002$

(iii) Η $2^{ας}$-τάξη πιθανότητες μετάβασης βρίσκονται στον πίνακα $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}^2 = (p_2(j|i))_{j,i\in S}$

$$\mathbb{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.14 & 0.18 \\ 0.40 & 0.59 & 0.48 \\ 0.39 & 0.27 & 0.34 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p_2(0|0) = 0.21 \\ p_2(1|1) = 0.59 \\ p_2(2|2) = 0.34 \end{cases}$$

Η κατανομή της αλυσίδας σε χρόνο 2 είναι:

$$p_2 = \begin{pmatrix} p_2(0) \\ p_2(1) \\ p_2(2) \end{pmatrix} = \mathbb{P}_2 p_0 = \mathbb{P}^2 p_0 = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.14 & 0.18 \\ 0.40 & 0.59 & 0.48 \\ 0.39 & 0.27 & 0.34 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.50 \\ 0.20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.169 \\ 0.511 \\ 0.320 \end{bmatrix}$$

□

<u>Πρόταση</u> $\quad p_n(i|i) = P\{X_n=i|X_0=i\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \forall\, 0<p<1$

<u>όπου</u> $\{X_n\}_{n\geq 0}$ ο τ.π. της $1^{ης}$ άσκησης της σελ 22.

$$(20.2) \overset{j=i}{\Longrightarrow} p_n(i|i) = \begin{cases} Bin(n/2|n,p), & n = \text{άρτιος} \\ 0, & n = \text{περιττός} \end{cases}$$

αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\alpha_k = p_{2k}(i|i) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$$\alpha_k = \binom{2k}{k}(pq)^k \Rightarrow \left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| = pq\,\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 4pq$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| = 4pq < 1 \Leftrightarrow p(1-p) < 1/4 \Leftrightarrow (2p-1)^2 > 0$$

αληθές για όλα τα $p \in (0,1)$ εκτός του $p = 1/2$

έτσι εαν $p \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$

Την περίπτωση $p = 1/2$ την εξετάζουμε ξεχωριστά:

Απο τον ασυμπτωτικό τύπο του Stirling έχουμε:

$$k! \sim (2\pi k)^{1/2}\left(\frac{k}{e}\right)^k \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(2\pi k)^{1/2}\left(\frac{k}{e}\right)^k} = 1 \quad :$$

$$\alpha_k = \frac{(2k)!}{(k!)^2}(pq)^k \sim \frac{(4\pi k)^{1/2}(2k/e)^{2k}(pq)^k}{\{(2\pi k)^{1/2}(k/e)^k\}^2} = \frac{(4\pi k)^{1/2}}{2\pi k}\cdot\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}\left(\frac{e}{k}\right)^{2k}(pq)^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{:(25.1)}{\alpha_k \sim \frac{(4pq)^k}{\sqrt{\pi k}}} \overset{(p=1/2)}{\Longrightarrow} \alpha_k \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$$

□

<u>Παρατήρηση</u>

Είδαμε ότι $\alpha_k \sim \frac{(4pq)^k}{\sqrt{\pi k}} \overset{p\neq 1/2}{\Longrightarrow} \lim_{k\to\infty} \alpha_k = \underset{(4pq<1)}{\lim_{k\to\infty}(4pq)^k} \cdot \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi k}} = 0$

Δηλαδή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Stirling κ' όταν $p \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$.