Πρόταση Εαν $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι ο τ.π. της προηγούμενης πρότασης, τοτε η πιθανότητα ο τ.π. να ξαναγυρίσει εκεί από όπου ξεκίνησε είναι $1-|p-q|$.

Ορίζουμε $f_{jj}(n) = P\{X_n=j, X_{n-1}\neq j, \dots, X_1\neq j \mid X_0=j\}$

= η πιθανότητα η διαδικασία να ξαναγυρίσει στο x, για πρώτη φορά, μετα απο χρόνο n

και $f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}(n) = P\{\exists n\geq 1 : X_n=j \mid X_0=j\} =$

= η πιθανότητα η διαδικασία να ξαναγυρίσει κάποτε στο j (να ξαναγυρίσει στο j σε πεπερασμένο χρόνο).

Θέλουμε να δείξουμε ότι $f_{jj} = 1-|p-q|$.

Παρατηρούμε ότι:

$$P_n(j|j) = \sum_{k=1}^{n} P\{X_n=j, X_k=j, X_i\neq j, 1\leq i\leq k-1 \mid X_0=j\} \quad : (26.1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P\{X_k=j, X_i\neq j, 1\leq i\leq k-1 \mid X_0=j\}\, P\{X_n=j \mid X_k=j, X_i\neq j, 1\leq i\leq k-1, X_0=j\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_{jj}(k)\, P\{X_n=j \mid X_k=j\} = \sum_{k=1}^{n} f_{jj}(k)\, P\{X_{n-k}=j \mid X_0=j\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n(j|j) = \sum_{k=1}^{n} f_{jj}(k)\, P_{n-k}(j|j)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_n(j|j) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{jj}(k)\, P_{n-k}(j|j) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} f_{jj}(k)\, P_{n-k}(j|j) \Rightarrow$$

$: (26.2)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|j) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}(k) \sum_{n=k}^{\infty} p_{n-k}(j|j) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}(k) \sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell(j|j) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_n(j|j) - \overbrace{p_0(j|j)}^{1} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}(k) \sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell(j|j) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}(k) = 1 - \frac{1}{\sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell(j|j)} = 1 - \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k}(j|j)} \quad : (27.1)$$

$$(20.2) \Rightarrow p_{2k}(j|j) = Bin(k|2k, p) = \frac{(2k)!}{(k!)^2}(pq)^k \quad : (27.2)$$

$$(-4)^k \binom{-1/2}{k} = (-4)^k \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} = 4^k \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{k!} =$$

$$= 2^k \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{k!} = \frac{1\cdot[2]\cdot 3\cdot[\cdot 2]\cdots(2k-3)[2](2k-1)[2]}{k!} =$$

$$= \frac{1\cdot[2\cdot 1]\cdot 3\cdot[2\cdot 2]\cdots(2k-3)[2\cdot(k-1)](2k-1)[2\cdot k]}{(k!)^2} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \quad : (27.3)$$

$$(27.1)(27.2)(27.3) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}(k) \overset{p\neq 1/2}{=} 1 - \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}(-4)^k\binom{-1/2}{k}(pq)^k} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}(-4pq)^k} = 1 - \frac{1}{(1-4pq)^{-1/2}} =$$

$$= 1 - \sqrt{1-4pq} \quad , \; 1-4pq = 1-4p(1-p) = (2p-1)^2 = (p-q)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}(n) = P\{\exists\, n\geq 1 : X_n = 0 \mid X_0 = 0\} = 1 - |p-q| \quad , \; p\neq 1/2$$

(την περίπτωση $p=1/2$ την παραλείπουμε για την ώρα) □

$$\{X_3=j\} = \{X_3=j\}\left[\{X_1=j\} \cup \{X_2=j, X_1\neq j\} \cup \{X_2\neq j\}\right]$$

$$\{X_4=j\} = \{X_4=j\}\left[\{X_1=j\} \cup \{X_2=j, X_1\neq j\} \cup \{X_3=j, X_2\neq j\} \cup \{X_3\neq j\}\right]$$

<u>γενικά :</u>

$$\{X_n=j\} = \{X_n=j\}\Big[\{X_1=j\} \cup \{X_2=j, X_1\neq j\} \cup \{X_3=j, X_2\neq j\} \cup \ldots$$

$$\ldots \cup \{X_{n-2}=j, X_{n-3}\neq j\} \cup \{X_{n-1}=j, X_{n-2}\neq j\} \cup \{X_{n-1}\neq j\}\Big]$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

(I) Η σχέση (26.1) απλώς μας λέει ότι

$$\bigcup_{k=1}^{n} \{X_n=j,\ X_k=j,\ X_i\neq j,\ 1\le i\le k-1\} = \{X_n=j\}$$

<u>Για $n=2$</u> κ' θέτοντας $S^*=S\setminus\{j\}$ <u>έχουμε</u>:

$$\{X_2=j,\ X_1=j\}\cup\{X_2=j,\ X_1\in S^*\} = \{X_2=j,\ X_1\in S\}=\{X_2=j\}$$

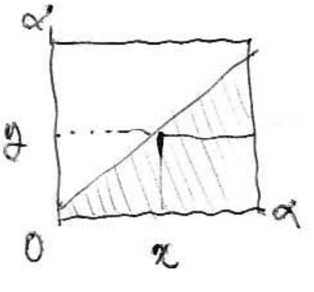
Ομοίως για $n=3$ έχουμε:

$$\{X_3=j,\ X_1=j\}\cup\underbrace{\{X_3=j,\ X_2=j,\ X_1\in S^*\}\cup\{X_3=j,\ X_2\in S^*,\ X_1\in S^*\}}_{\{X_3=j,\ X_2\in S,\ X_1\in S^*\}}$$

$$=\{X_3=j,\ X_1=j\}\cup\{X_3=j,\ X_2\in S^*\}=\{X_3=j,\ X_1\in S\}=\{X_3=j\}$$

(II) Η σχέση (26.2) έχει σαν συνεχές ανάλογο:

$$\int_{x=0}^{\alpha}\int_{y=0}^{x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y=0}^{\alpha}\int_{x=y}^{\alpha} f(x,y)\,dx\,dy \quad ,\ 0<\alpha\le\infty$$



Ορσ Η κατάσταση $j \in S$ είναι προσπελάσιμη (accesible) από την κατάσταση $i \in S$ (συμβολικά $i \to j$) όταν $P\{\exists n \in \mathbb{N}_0 : X_n = j \mid X_0 = i\} > 0$. Δηλαδή μπορούμε να πάμε από την κατάσταση i στην κατάσταση j σε πεπερασμένο χρόνο.

Ορσ Δύο καταστάσεις $i \in S$ κ' $j \in S$ λέμε ότι επικοινωνούν (communicate) όταν $i \to j$ κ' $j \to i$ (συμβολικά $i \leftrightarrow j$)

Ορσ Εάν για $\forall (i,j) \in S^2$ έχουμε $i \leftrightarrow j$, τότε όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους κ' η αλυσίδα Markov λέμε ότι είναι αδιαχωρίσιμη (irreducible). Η σχέση "$\leftrightarrow$" είναι σχέση ισοδυναμίας κ' έτσι χωρίζει το S σε κλάσεις ισοδυναμίας. Στην περίπτωση που έχουμε μία μόνο κλάση ισοδυναμίας η αλυσίδα $\{X_n\}$ είναι irreducible. Όταν όμως έχουμε περισσότερες από μία κλάσεις ισοδυναμίας η $\{X_n\}$ είναι διαχωρίσιμη (reducible)

Ορσ Το υποσύνολο $C \subseteq S$ λέγεται κλειστό όταν $p(j|i) = 0$ για $i \in C$ κ' $j \notin C$, δηλαδή στο πρώτο βήμα η αλυσίδα είναι αδύνατο να βγει από το C.

<u>Ορσ</u> (i) Ορίζουμε τον τυχαίο χρόνο $T_j : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ να είναι ο χρόνος της πρώτης επίσκεψης της αλυσίδας στην κατάσταση j, μετά το χρόνο 0.

(ii) Ορίζουμε την πιθανότητα η διαδικασία να επισκεφθεί για πρώτη φορά την κατάσταση j, στο βήμα n, δοθέντος ότι ξεκίνησε απο το i (first passage time probability) σαν

$$f_{ji}(n) = P\{X_n = j, X_{n-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j \mid X_0 = i\}.$$

Τότε είναι προφανές ότι $f_{ji}(n) = P\{T_j = n \mid X_0 = i\}$

(iii) Η πιθανότητα η διαδικασία να επισκεφθεί την κατάσταση j σε πεπερασμένο χρόνο, ξεκινώντας απο την κατάσταση i είναι

$$\begin{aligned} f_{ji} &= P\{T_j < \infty \mid X_0 = i\} = P\{\exists n \in \mathbb{N}_0 : X_n = j \mid X_0 = i\} \\ &= P\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1\} \mid X_0 = i\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_j = n \mid X_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}(n) \quad : (30.1) \end{aligned}$$

<u>Παρατήρηση</u> Ορίζουμε την τυχ. μεταβλητή $T_{ji} = [T_j \mid X_0 = i] = \inf\{m \geq 1 : X_m = j, X_0 = i\}$ (first passage time to state j from state i). Τότε εαν $f_{ji} = 1$ η κατανομή της T_{ji} θα είναι $P\{T_{ji} = n\} = f_{ji}(n)$ με $\mu_{ji} = \mathbb{E}[T_{ji}] < \infty$ (mean first passage time). Εάν $f_{ji} < 1$ θα έχουμε $P\{T_{ji} < \infty\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}(n) = f_{ji} < 1$ κ' $P\{T_{ji} = \infty\} = 1 - f_{ji} \Rightarrow \mu_{ji} = \infty$

<u>Πρόταση</u> Η κατάσταση $j \in S$ είναι προσπελάσιμη από την $i \in S$ αν κ' μόνον εάν $\exists n \in \mathbb{N}: p_n(j|i) > 0$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει συγκεκριμένο <u>n</u> για το οποίο έχουμε $p_n(j|i) > 0$

$$p_n(j|i) = \sum_{k=1}^{n} P\{X_n = j, X_k = j, X_\ell \neq j, 1 \leq \ell \leq k-1 \mid X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P\{X_k = j, X_\ell \neq j, 1 \leq \ell \leq k-1 \mid X_0 = i\} P\{X_n = j \mid X_k = j\} : (31.1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_{ji}(k) p_{n-k}(j|j) \leq \sum_{k=1}^{n} f_{ji}(k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f_{ji}(k) =$$

$$= f_{ji} = P\{\exists n \in \mathbb{N}_0 : X_n = j \mid X_0 = i\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\{\exists n \in \mathbb{N}_0 : X_n = j \mid X_0 = i\} > 0 \Rightarrow i \rightarrow j.$$

<u>Για το αντίστροφο</u> αρκεί να δείξουμε ότι εάν $p_n(j|i) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ τότε $i \not\rightarrow j$

$$P\{\exists n \in \mathbb{N} : X_n = j \mid X_0 = i\} \overset{(30.3)}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_{ji}(n)}_{f_{ji}} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|i) = 0$$

$\square$

<u>Πρόταση</u> Η σχέση $i \leftrightarrow j$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Για να είναι η "$\leftrightarrow$" σχέση ισοδυναμίας θα πρέπει να ικανοποιούνται οι τρείς ιδιότητες:

(i) $i \leftrightarrow i$: ανακλαστική

(ii) $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$: συμμετρική.

(iii) $i \leftrightarrow j \wedge j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$: μεταβατική

Οι (i) κ' (ii) είναι προφανείς. Δείχνουμε την (iii)

$$\left.\begin{array}{l} i \leftrightarrow j \Leftrightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{N}_0 : p_m(i|j) > 0,\ p_n(j|i) > 0 \\ j \leftrightarrow k \Leftrightarrow \exists\, m', n' \in \mathbb{N}_0 : p_{m'}(j|k) > 0,\ p_{n'}(k|j) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_{m+m'}(i|k) \overset{(19.1)}{=} \sum_{s\in S} p_m(i|s)\, p_{m'}(s|k) \geq p_m(i|j)\, p_{m'}(j|k) > 0 \\ p_{n'+n}(k|i) = \sum_{s\in S} p_{n'}(k|s)\, p_n(s|i) \geq p_{n'}(k|j)\, p_n(j|i) > 0 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \exists\, m'' = m+m',\ n'' = n'+n \in \mathbb{N}_0 : p_{m''}(i|k) > 0,\ p_{n''}(k|i) > 0$

$\Leftrightarrow i \leftrightarrow k$

$\square$

Πρόταση Για την πιθανότητα $f_{ji}(n)$ έχουμε τον παρακάτω επαναληπτικό τύπο

$$f_{ji}(m) = \begin{cases} 0 & , \quad m=0 \\ p(j|i) & , \quad m=1 \\ \sum\limits_{k\in S\setminus\{j\}} p(k|i) f_{jk}(m-1), & m\geq 2 \end{cases} \qquad : (33.0)$$

Πρώτα δείχνουμε ότι για μια χρονικά ομογενή αλυσίδα Markov ισχύει για $k<m<n$

$$P\{X_n\in I, X_m\in J \mid X_k\in K\} = P\{X_m\in J \mid X_k\in K\} P\{X_n\in I \mid X_m\in J\}$$

$$= P\{X_{m-k}\in J \mid X_0\in K\} P\{X_{n-k}\in I \mid X_{m-k}\in J\}$$

$$= P\{X_{n-k}\in I, X_{m-k}\in J \mid X_0\in K\} \qquad : (33.1)$$

Το $f_{ji}(0)=0$ είναι προφανές.

$$f_{ji}(1) = P\{T_j = 1 \mid X_0 = i\} = P\{X_1 = j \mid X_0 = i\} = p(j|i)$$

$$f_{ji}(m) = P\{X_m=j, X_{m-1}\neq j, \dots, X_2\neq j, X_1\neq j \mid X_0 = i\}$$

$$= P\{X_m=j, X_{m-1}\neq j, \dots, X_2\neq j, X_1\in S\setminus\{j\} \mid X_0=i\}$$

$$= \sum_{k\in S\setminus\{j\}} P\{X_m=j, X_{m-1}\neq j, \dots, X_2\neq j, X_1=k \mid X_0=i\}$$

$$= \sum_{k\in S\setminus\{j\}} P\{X_1=k \mid X_0=i\} P\{X_m=j, X_{m-1}\neq j, \dots, X_2\neq j \mid X_1=k\}$$

$$\overset{(33.1)}{=} \sum_{k \in S' \setminus \{j\}} p(k|i)\, P\{X_{m-1}=j, X_{m-2}\neq j, \dots, X_1 \neq j \mid X_0 = k\}$$

$$= \sum_{k \in S' \setminus \{j\}} p(k|i)\, f_{jk}(m-1)$$

□

Ορσ (i) Η κατάσταση $j \in S'$ λέμε ότι είναι επαναρχόμενη (recurrent) όταν $f_{jj} = 1$. Δηλαδή η διαδικασία ξεκινώντας απο το j, τελικά θα ξαναγυρίσει στο j με πιθανότητα 1. (θα ξαναγυρίσει στο j σε πεπερασμένο χρόνο)

$$f_{jj} = 1 \Leftrightarrow P\{T_j < \infty \mid X_0 = j\} = 1 \Leftrightarrow P\{T_j = \infty \mid X_0 = j\} = 0$$

(ii) Η κατάσταση $j \in S'$ λέμε ότι είναι παροδική (transient) όταν $f_{jj} < 1$. Δηλαδή ξεκινώντας απο το j, υπάρχει θετική πιθανότητα, να μην ξαναγυρίσει η διαδικασία ποτέ πίσω στο j

$$f_{jj} < 1 \Leftrightarrow P\{T_j < \infty \mid X_0 = j\} < 1 \Leftrightarrow P\{T_j = \infty \mid X_0 = j\} > 0$$

Δεδομένης της ιδιότητας Markov, εαν η διαδικασία επισκευθεί την κατάσταση j, ή επανέρχεται σε αυτήν με πιθανότητα f_{jj} κ' όλη η διαδικασία επαναλαμβάνεται εξ αρχής, ή την εγκαταλείπει για πάντα με πιθανότητα $1 - f_{jj}$. Έστω A το τελευταίο ενδεχόμενο ($P(A) = 1 - f_{jj}$).

Ορίζουμε: $N_j = \sum_{n=0}^{\infty} 1(X_n = j)$ = ο # των επισκέψεων της διαδικασίας στην κατάσταση j

$$P\{N_j=k\,|X_0=j\}=P(\underbrace{A'\cdots A'}_{k-1\ \text{φορές}}\cdot A)=f_{jj}^{k-1}(1-f_{jj})\ ,\quad k=1,2,\dots$$

$$=Geo(k\,|\,1-f_{jj})\Rightarrow \mathbb{E}[N_j\,|X_0=j]=\frac{1}{1-f_{jj}}\ ,f_{jj}<1$$

Εάν ισχύει $f_{ji}=P\{T_j<\infty\,|X_0=i\}<1$ δηλ. $P\{T_j=\infty\,|X_0=i\}>0$

$$P\{N_j=0\,|X_0=i\}=P\{T_j=\infty\,|X_0=i\}=1-f_{ji}>0$$

$$P\{N_j=k\,|X_0=i\}=P\{N_j=k,T_j<\infty\,|X_0=i\}+P\{N_j=k,T_j=\infty\,|X_0=i\}$$

$$=P\{T_j<\infty\,|X_0=i\}P\{N_j=k\,/\,T_j<\infty,X_0=i\}$$

$$+P\{T_j=\infty\,|X_0=i\}\underbrace{P\{N_j=k\,|\,T_j=\infty,X_0=i\}}_{0}\quad ,\ k\geq 1$$

$$=f_{ji}\cdot f_{jj}^{k-1}(1-f_{jj})$$

Έχουμε λοιπόν $P\{N_j=k\,|X_0=i\}=\begin{cases}1-f_{ji}\ , & k=0\\ f_{ji}f_{jj}^{k-1}(1-f_{jj})\ , & k\in\mathbb{N}\end{cases}$

$$\mathbb{E}[N_j\,|X_0=i]=\sum_{k=0}^{\infty}kP\{N_j=k\,|X_0=i\}=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{N_j=k\,|X_0=i\}=$$

$$=f_{ji}(1-f_{jj})\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot f_{jj}^{k-1}=f_{ji}(1-f_{jj})\frac{1}{(1-f_{jj})^2}\Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right\}'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N_j\,|X_0=i]=\frac{f_{ji}}{1-f_{jj}}$$

Παρατήρηση: Όταν $j \in S'$ είναι επανερχόμενη κατάσταση $f_{jj} = 1 \Leftrightarrow P\{N_j = \infty \mid X_0 = j\} = 1$, ενώ όταν $j \in S'$ παροδική, $f_{jj} < 1 \Leftrightarrow P\{N_j < \infty \mid X_0 = j\} = 1$.

Ορσ: Ο πίνακας $\mathbb{R} = [R_{ji}]_{j,i \in S} = [\mathbb{E}[N_j \mid X_0 = i]]_{j,i \in S'}$ ονομάζεται πίνακας δυναμικού (potential matrix) της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Πρόταση: Για το potential matrix Μαρκοβιανής αλυσίδας ισχύει ότι $\mathbb{R} = (\mathbb{1} - \mathbb{P})^{-1}$

$$R_{ji} = \mathbb{E}[N_j \mid X_0 = i] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1(X_n = j) \mid X_0 = i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[1(X_n = j) \mid X_0 = i\right]$$

$$= 1(i=j) + \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} = 1(i=j) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(j \mid i) =$$

$$= (\mathbb{1})_{ji} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbb{P}^n)_{ji} \Rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^n \quad : (36.1)$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(1-\mathbb{P})^{-1}$ η (36.1) δίνει

$$\mathbb{R} - \mathbb{1} = \mathbb{P}(1-\mathbb{P})^{-1} \Leftrightarrow (\mathbb{R} - \mathbb{1})(\mathbb{1} - \mathbb{P}) = \mathbb{P} \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{R} - \mathbb{R}\mathbb{P} - \mathbb{1} + \mathbb{P} = \mathbb{P} \Leftrightarrow \mathbb{R}(1-\mathbb{P}) = \mathbb{1} \Leftrightarrow \mathbb{R} = (1-\mathbb{P})^{-1}$$

$\square$

Παρατηρήσεις (i) $\mathbb{1} = [1(j=i)]_{j,i \in S}$ όπου $1(j=i) = \begin{cases} 1, & j=i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}^n = \mathbb{1} + \mathbb{P} + \mathbb{P}^2 + \dots = (\mathbb{1}-\mathbb{P})^{-1}$ διότι

$$(\mathbb{1}-\mathbb{P})(\mathbb{1}+\mathbb{P}+\mathbb{P}^2+\dots) = (\mathbb{1}-\cancel{\mathbb{P}}) + (\cancel{\mathbb{P}}-\cancel{\mathbb{P}^2}) + (\cancel{\mathbb{P}^2}-\mathbb{P}^3) + \dots = \mathbb{1}$$

Επίσης $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{1}-\mathbb{P})^{-1}$ διότι

$$\mathbb{P} + \mathbb{P}^2 + \mathbb{P}^3 + \dots = \mathbb{P}(\mathbb{1}-\mathbb{P})^{-1} \Leftrightarrow \mathbb{1} + \mathbb{P} + \mathbb{P}^2 + \dots = (\mathbb{1}-\mathbb{P})^{-1}$$

(iii) Ορίζουμε $1(x\in A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ τότε εάν $x \sim f_X(\cdot)$

$$\mathbb{E}[1(X\in A)] = \int_{-\infty}^{\infty} 1(x\in A) f_X(x)dx = \int_{A \ni x} f_X(x)dx = P(A)$$

Ορσ (i) Ο αναμενόμενος χρόνος της πρώτης επίσκεψης της διαδικασίας στην κατάσταση j (mean recurrence time of j) μετά τον χρόνο 0, δοθέντος ότι η διαδικασία ξεκίνησε από το j είναι μ_{ji} όπου

$$\mu_{ji} = \mathbb{E}[T_j \mid X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P\{T_j = n \mid X_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{ji}(n)$$

(ii) Μια επανερχόμενη κατάσταση $j \in S$ $(f_{jj} = 1)$ λέμε ότι είναι <u>θετικά επανερχόμενη</u> (positive recurrent) εάν $\mu_{jj} < \infty$.

(iii) Εαν για την επανερχόμενη κατάσταση $j \in S$ ισχύει ότι $\mu_{jj} = \infty$ λέμε ότι η κατάσταση j είναι <u>μηδενικά επανερχόμενη</u> (null recurrent)