<u>Ορσ</u> Ορίζουμε την <u>περίοδο</u> $d(j)$ της κατάστασης $j \in S$ σαν τον μέγιστο κοινό διαιρέτη (greatest common divisor) των $n \in \mathbb{N}$ που ικανοποιούν $p_n(j|j) > 0$

$$d(j) = \gcd\{n \in \mathbb{N} : p_n(j|j) > 0\} \qquad (38.1)$$

Εάν $d(j) > 1 \Rightarrow$ η $j \in S$ ονομάζεται <u>περιοδική</u> με περίοδο $d(j)$

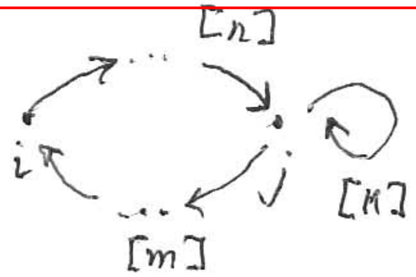
$d(j) = 1 \Rightarrow$ η $j \in S$ ονομάζεται <u>απεριοδική</u>

<u>Παρατήρηση:</u> Εάν $p(j|j) > 0 \Leftrightarrow d(j) = \gcd\{1, \dots\} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Η $j \in S$ είναι απεριοδική.

<u>Ορσ</u> Η κατάσταση $j \in S$ ονομάζεται <u>απορροφητική</u> (absorbing) όταν $p(j|j) = 1$, που σημαίνει ότι εάν η διαδικασία βρεθεί στην j κατάσταση, θα παραμείνει εκεί για πάντα.

<u>Πρόταση</u>: Δείξτε ότι εάν $(i,j)\in S^2$ επικοινωνούν τότε έχουν κ' την ίδια περίοδο <u>δηλ</u> $d(i)=d(j)$



$$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow p_{m+n}(i|i)>0 \Leftrightarrow d_i \mid m+n \quad :(39.1)$$

Έστω ότι $p_k(j|j)>0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_{m+k+n}(i|i) \overset{\text{chap.-Kol.}}{=} \sum_{s\in S}\sum_{t\in S} p_m(i|s)\,p_k(s|t)\,p_n(t|i)$$

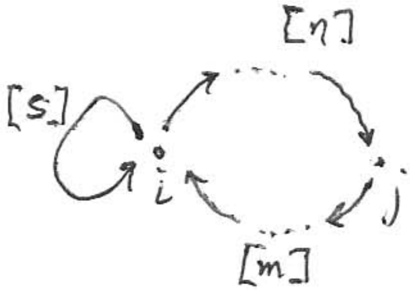
$$\geq_{s=t=j} p_m(i|j)\,p_k(j|j)\,p_n(j|i) > 0 \Rightarrow p_{m+k+n}(i|i)>0 \Rightarrow d_i \mid m+k+n$$

$$\overset{(39.1)}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} d_i \mid k,\ \forall k\in D_j : D_j=\{k : p_k(j|j)>0\} \\ \text{όμως } \ d_j = gcd(D_j),\ d_j\in D_j \end{array}\right\} \Rightarrow d_i \mid d_j$$

από συμμετρία θα έχουμε $d_j \mid d_i$

$\Rightarrow d_i = d_j$

<u>Παρατήρηση</u>



$\Leftrightarrow d_j \mid s,\ \forall s\in D_i \Rightarrow d_j \mid d_i$

<u>Πρόταση</u>: Η κατάσταση $j\in S$ είναι επανερχόμενη εάν κ' μόνον εάν $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|j)=\infty \quad :(39.5)$

Εαν $j \in S' =$ transient $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|j) < \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(p_m(j|i)p_n(i|j)\right)\sum_{k=1}^{\infty} p_k(i|i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_{m+k+n}(j|j) < \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k(i|i) < \infty \Leftrightarrow i \in S' = \text{transient}.$$

$$j \in S' = \text{recurrent} \Leftrightarrow f_{jj} = 1 \Leftrightarrow P\{T_j < \infty \mid X_0 = j\} = 1$$

$$\Leftrightarrow P\{N_j = \infty \mid X_0 = j\} = 1 \Leftrightarrow R_{jj} = \mathbb{E}[N_j \mid X_0 = j] = \infty \overset{(36.1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1(i=i)}_{1} + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|j) = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|j) = \infty .$$

□

__Πρόταση__: Εαν η κατασταση $i \in S'$ είναι επανερχόμενη κ' οι καταστάσεις $i \in S$ κ' $j \in S'$ συγκοινωνούν τότε κ' η $j \in S'$ είναι επανερχόμενη

$$i \longleftrightarrow j \Leftrightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{N} : p_m(j|i) > 0 ,\ p_n(i|j) > 0$$

$$i \in S' = \text{recurrent} \overset{(39.5)}{\Longleftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} p_n(i|i) = \infty \Rightarrow \exists \text{ άπειρα } k \in \mathbb{N} : p_k(i|i) > 0$$

$$p_{m+k+n}(j|j) = \sum_{s \in S'} \sum_{t \in S'} p_m(j|s)\, p_k(s|t)\, p_n(t|j) \geq$$

$$\geq p_m(j|i)\, p_k(i|i)\, p_n(i|j) > 0 \qquad : (40.1)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} p_l(j|j) = \sum_{l=1}^{m+n} p_l(j|j) + \sum_{l=1+m+n}^{\infty} p_l(j|j) = \sum_{l=1}^{m+n} p_l(j|j) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{m+k+n}(j|j)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} p_{m+k+n}(j|j) \overset{(40.1)}{\geq} p_m(j|i) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} p_k(i|i) \right\} p_n(i|j) = \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{\infty} p_l(j|j) = \infty \overset{(39.5)}{\Longleftrightarrow} j \in S' = \text{recurrent}$$

□

Άσκηση Έστω ότι $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ο απλός τυχαίος περίπατος. Δείξτε ότι.

(i) Η αλυσίδα Markov είναι αδιαχωρίσιμη

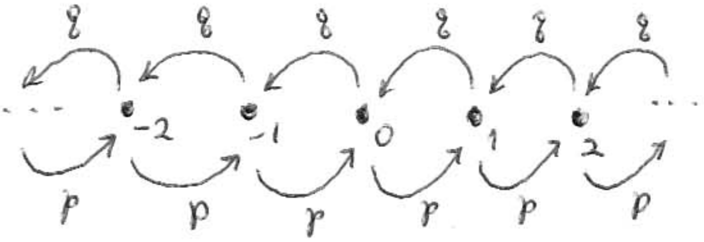
(ii) Βρείτε τον πίνακα μετάβασης $\mathbb{P}$.

(iii) Κάθε κατάσταση έχει περίοδο 2.

(iv) Εάν $p \neq q$ τότε όλες οι καταστάσεις είναι παροδικές.

(v) Ο τυχαίος περίπατος είναι επανερχόμενος όταν $p=1/2$.

(i) Από το προσανατολισμένο γράφημα του τυχαίου περιπάτου έχουμε ότι όλες οι καταστάσεις συγκοινωνούν μεταξύ τους δηλαδή $\forall (i,j)\in S^2,\ i \leftrightarrow j \Rightarrow \{X_n\} = \text{irreducible}$



Γνωρίζουμε ότι $p_n(j|i) = \begin{cases} Bin\left(\frac{n+(j-i)}{2} \middle| n,p\right), & n+j-1 = \text{άρτιος} \\ 0, & n+j-1 = \text{περιττός} \end{cases}$

έτσι για παράδειγμα εάν $j=2,\ i=-1$ θα έχουμε

$$p_n(2|-1) = \begin{cases} Bin\left(\frac{n+3}{2} \middle| n,p\right), & n+3 = \text{άρτιος} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$n=1 \Rightarrow n+3 = \text{άρτιος} \Rightarrow p_1(2|-1) = Bin(2|1,p) = 0$

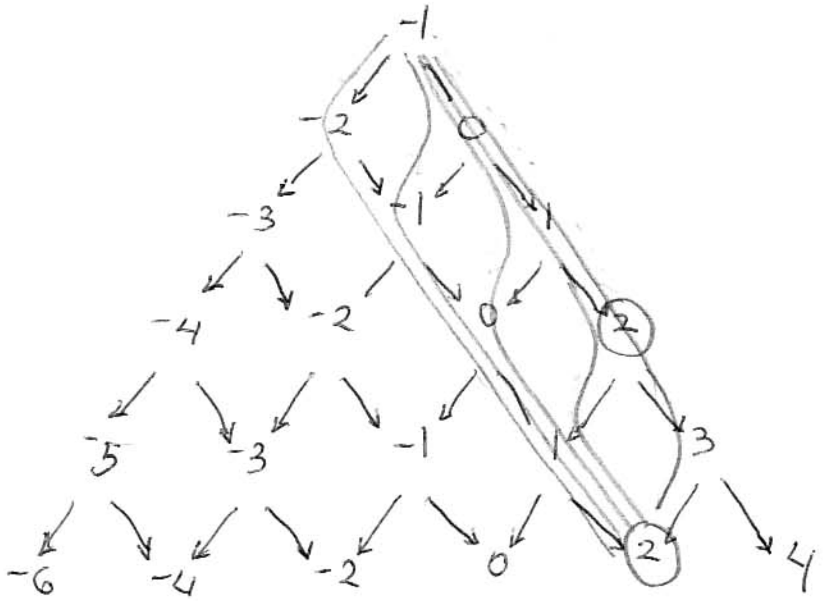
$n=2 \Rightarrow n+3 \neq \text{άρτιος} \Rightarrow p_2(2|-1) = 0$

$n=3 \Rightarrow n+3 = \text{άρτιος} \Rightarrow p_3(2|-1) = Bin(3|3,p) = p^3 > 0$

$n=4 \Rightarrow n+4 \neq \text{άρτιος} \Rightarrow p_4(2|-1) = 0$

$n=5 \Rightarrow n+5 = \text{άρτιος} \Rightarrow p_5(2|-1) = Bin(4|5,p) = 5p^4(1-p) > 0$

κλπ ...



(ii)

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \cdots -3 \;\; -2 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3 \cdots \\ \begin{bmatrix} & \vdots & & & & & & \vdots & \\ \cdots & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & p & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & p & 0 & q & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & p & 0 & q & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & p & 0 & q & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & q & \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & \cdots \\ & \vdots & & & & & & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

Superdiagonal

Subdiagonal

(iii) $p_n(j|j) = \begin{cases} Bin(n/2 \mid n, p), & n = \text{άρτιος} \\ 0, & n = \text{περιττός} \end{cases}, \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow d(j) = \gcd\{2, 4, 6, \dots\} = 2$. Επειδή όλες οι καταστάσεις $j \in \mathbb{Z}$ του τ.π. συγκοινωνούν μεταξύ τους, από την άσκηση στη σελ. 38 θα έχουμε κ' ότι για $\forall j \in \mathbb{Z}$ $d(j) = 2$.

(iv)-(v) $p_{2n+1}(j|j) = 0$, $p_{2n}(j|j) = Bin(n \mid 2n, p) = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n \Rightarrow$

(25.i)

$$\Rightarrow p_{2n}(j|j) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow \frac{(4pq)^n}{2\sqrt{\pi n}} < p_{2n}(j|j) < 2\frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} \quad \forall n \geq N$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_n(j|j) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}(j|j) < N + \sum_{n=N}^{\infty} p_{2n}(j|j) < N + \sum_{n=N}^{\infty} \underbrace{\frac{2(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}}_{b_n} \\ &\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = 4pq\sqrt{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4pq < 1, \quad p \neq 1/2 \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} \frac{2(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} < \infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

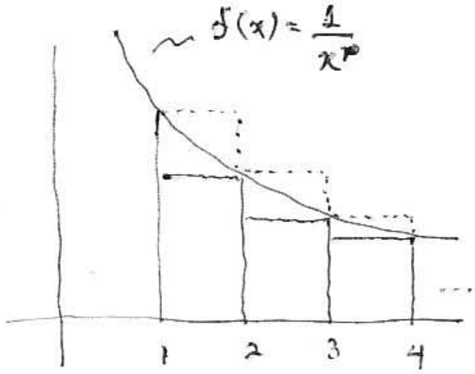
$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_n(j|j) < \infty$ κ' από την πρόταση στην σελ 39 έχουμε ότι $\forall j \in S$ είναι παροδική όταν $p \neq 1/2$.

Όταν $p = 1/2 \Rightarrow pq = 1/4$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(j|j) \geq \sum_{n=N}^{\infty} p_{2n}(j|j) > \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{2\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty \quad (43.i)$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_n(j|j) = \infty$ κ' από την πρόταση στην σελ 39 έχουμε ότι για $\forall j \in S$ η κατάσταση j είναι επανερχόμενη

Παρατήρηση (i)



$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

και $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & p>1 \\ \infty & p \le 1 \end{cases}$

δηλαδή $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$

(ii) Δείξαμε ότι όταν $p=1/2$ ο τυχαίος περίπατος είναι επανερχόμενος $\Rightarrow f_{jj}=1$, που συμπληρώνει την απόδειξη της πρότασης στην σελ 26 δηλ. ότι για τον τυχαίο περίπατο $\forall j \in S$ έχουμε $f_{jj} = 1-|p-q|$.

Άσκηση Έστω $\{X_n\}_{n\ge 0}$ διακατάστατη αλυσίδα Markov με $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p(0|0) & p(0|1) \\ p(1|0) & p(1|1) \end{bmatrix}$ κ' $p(j|i)>0$ $\forall i,j \in S = \{0,1\}$.

(i) Δείξτε ότι η $\{X_n\}_{n\ge0}$ είναι μια αδιαχωρίσιμη (irreducible) κ' απεριοδική (aperiodic) αλυσίδα Markov

(ii) Δείξτε ότι κ' οι 2 καταστάσεις είναι θετικά επανερχόμενες

(i) Οι καταστάσεις 0 κ' 1 επικοινωνούν μεταξύ τους επειδή $p(1|0)>0$ κ' $p(0|1)>0$ δηλαδή $0 \leftrightarrow 1$ κ' η αλυσίδα είναι αδιαχωρίσιμη. Επειδή $p(0|0)>0 \Rightarrow d(0) = gcd\{1,\dots\} = 1$ ομοίως $d(1)=1$.

(ii) Πρώτα θα δείξουμε ότι οι καταστάσεις 0 κ' 1 είναι επανερχόμενες (recurrent).

$$f_{ji}(n) = \begin{cases} 0 \quad , & n=0 \\ p(j|i) \quad , & n=1 \\ \sum\limits_{k\in S\setminus\{j\}} p(k|i)\, f_{jk}(n-1) \quad , & n\geq 2 \end{cases}$$

$$f_{11}(n) = p(0|1)\, f_{10}(n-1) \quad , \quad n\geq 2$$

$$f_{10}(n) = p(0|0)\, f_{10}(n-1) = p(0|0)^2 f_{10}(n-2) = \cdots = p(0|0)^{n-1} f_{10}(1) = p(0|0)^{n-1} p(1|0)$$

$$\Rightarrow \quad f_{11}(n) = p(0|1)\, p(0|0)^{n-2}\, p(1|0) \quad , \quad n\geq 2 \quad , \quad f_{11}(1) = p(1|1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{11}(n) = p(1|1) + \sum_{n=2}^{\infty} p(0|1)\, p(0|0)^{n-2}\, p(1|0) =$$

$$= p(1|1) + p(0|1)p(1|0) \sum_{n=0}^{\infty} p(0|0)^n = p(1|1) + \frac{p(0|1)p(1|0)}{1-p(0|0)} =$$

$$= p(1|1) + \frac{p(0|1)\, p(1|0)}{p(1|0)} = p(1|1) + p(0|1) = 1$$

Δηλαδή η κατάσταση $1 \in S$ είναι επαναρχόμενη. Για να δείξουμε ότι η $1 \in S$ είναι θετικά επαναρχόμενη θα πρέπει να δείξουμε ότι: $\mu_{11} = \mathbb{E}[T_{11}] = \mathbb{E}[T_1 \mid X_0 = 1] < \infty$

$$\mu_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{11}(n) = p(1|1) + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot p(0|1)\, p(0|0)^{n-2}\, p(1|0)$$

$$= p(1|1) + p(0|1)\, p(1|0) \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot p(0|0)^{n-2} \quad : (45.1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot p(0|0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\, p(0|0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p(0|0)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} p(0|0)^n$$

$$= p(0|0) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p(0|0)^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} p(0|0)^n = \frac{p(0|0)}{\left(1-p(0|0)\right)^2} + \frac{2}{1-p(0|0)} =$$

$$= \frac{p(0|0)}{p(1|0)^2} + \frac{2}{p(1|0)} \quad : (45.2)$$

$$(45.1)(45.2) \Rightarrow \mu_{11} = p(1|1) + p(0|1)p(1|0)\left\{\frac{p(0|0)}{p(1|0)^2} + \frac{2}{p(1|0)}\right\} =$$

$$= p(1|1) + p(0|1)\left\{\frac{p(0|0)}{p(1|0)} + 2\right\} < \infty \Rightarrow$$ Η κατάσταση $1 \in S$ είναι θετικά επαναρχόμενη.

Επειδή η κατάσταση $1 \in S$ είναι επαναρχόμενη κ' $1 \leftrightarrow 0$ τότε κ' η $0 \in S$ είναι επαναρχόμενη. Λόγω συμμετρίας έχουμε ότι

$$f_{00} = f_{00}(1) + \sum_{n=2}^{\infty} f_{00}(n) = p(0|0) + \sum_{n=2}^{\infty} p(1|0)p(1|1)^{n-2}p(0|1)$$

$$= p(0|0) + \frac{p(1|0)p(0|1)}{1-p(1|1)} = p(0|0) + \frac{p(1|0)p(0|1)}{p(0|1)} = 1$$

$$\mu_{00} = \mathbb{E}[T_{00}] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}(n) = p(0|0) + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot p(1|0)p(1|1)^{n-2}p(0|1)$$

$$= p(0|0) + p(1|0)p(0|1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)p(1|1)^n = p(0|0) + p(1|0)p(0|1)\left\{\frac{p(1|1)}{p(0|1)^2} + \frac{2}{p(0|1)}\right\}$$

$$= p(0|0) + p(1|0)\left\{\frac{p(1|1)}{p(0|1)} + 2\right\} < \infty \Rightarrow$$ Η κατάσταση $0 \in S$ είναι θετικά επαναρχόμενη.

□

<u>Παρατήρηση</u>: Θέτοντας $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}$ έχουμε ότι

$$\mu_{11} = (1-q) + q\left\{\frac{1-p}{p} + 2\right\} = \frac{q+p}{p} \equiv \frac{1}{p'}$$

$$\mu_{00} = (1-p) + p\left\{\frac{1-q}{q} + 2\right\} = \frac{q+p}{q} \equiv \frac{1}{q'}$$

$$(18.1) \Rightarrow \mathbb{P}_n = \mathbb{P}^n = \begin{pmatrix} q' & q' \\ p' & p' \end{pmatrix} + \alpha_n \cdot \begin{pmatrix} p' & -q' \\ -p' & q' \end{pmatrix},$$ όπου $\alpha_n \equiv (1-p-q)^n$

<u>δηλαδή</u> $\lim_{n\to\infty} P_n(0|0) = \lim_{n\to\infty} P_n(0|1) = q' = \frac{1}{\mu_{00}}$:(46.1)

$$\lim_{n\to\infty} p_n(1|0) = \lim_{n\to\infty} p_n(1|1) = p' = \frac{1}{\mu_{11}} \quad : (47.1)$$

<u>Ορσ</u> Μια κατάσταση $i \in S'$ ονομάζεται <u>εργοδική</u> (ergodic) εάν είναι απεριοδική ($d(i)=1$) κ' θετικά επαναλαμβανόμενη ($\mu_{ii} < \infty$). Μία εργοδική αλυσίδα, είναι μία αδιαχωρίσιμη, απεριοδική κ' θετικά επαναλαμβανόμενη αλυσίδα Markov.

<u>Θεώρημα</u> (Το βασικό οριακό θεώρημα για απεριοδικές αλυσίδες Markov) Έστω $\{X_n\}_{n\geq 0}$ <u>αδιαχωρίσιμη</u> κ' <u>εργοδική</u> αλυσίδα Markov, τότε

$$\lim_{n\to\infty} p_n(j|i) = \frac{1}{\mu_{jj}} \quad , \forall i \in S'$$

<u>όπου</u> $\mu_{jj} = \mathbb{E}[T_{jj}]$ ο μέσος χρόνος επανάληψης (mean recurrence time) για την κατάσταση $j \in S'$. (Εάν $\mu_{jj} = \infty$ δηλαδή η κατάσταση j είναι μηδενικά επαναλαμβανόμενη (null recurrent) τότε $\lim_{n\to\infty} p_n(j|i) = 0$)

<u>Παράδειγμα</u> Στην άσκηση στη σελ. 44 κ' από την παρατήρηση σελ 46 βλέπουμε ότι $\lim_{n\to\infty} p_n(j|i) = 1/\mu_{jj}$, $\forall i,j \in S$.

<u>Θεώρημα</u> (Το βασικό οριακό θεώρημα για περιοδικές αλυσίδες) Έστω $\{X_n\}_{n\geq 0}$ <u>αδιαχωρίσιμη</u> κ' <u>επαναλαμβανόμενη</u> αλυσίδα Markov με περίοδο d, τότε

$$\lim_{n\to\infty} p_{n\cdot d}(j|j) = \frac{d}{\mu_{jj}} \quad , \forall j \in S',$$

κ' $p_m(j|j) = 0$ εάν το m <u>δεν</u> είναι πολλαπλάσιο του d,

οπου μ_{jj} ο μέσος χρόνος επανόδου για την κατάσταση j.
(εαν $\mu_{jj} = \infty$ τότε $\lim_{n\to\infty} p_{n\cdot d}(j|j) = 0$)

Πρόταση Εαν $P_{ji}(z)$ κ' $F_{ji}(z)$ είναι οι γεννήτριες συν/σεις των ακολουθιών $\{p_n(j|i)\}_{n=0}^{\infty}$ κ' $\{f_{ji}(n)\}_{n=0}^{\infty}$, ισχύει ότι

$$P_{ji}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-F_{jj}(z)}, & i=j \quad : (48.1) \\ \dfrac{F_{ji}(z)}{1-F_{jj}(z)}, & i\neq j \quad : (48.2) \end{cases}$$

$$p_n(j|i) = \sum_{k=1}^{n} P\{X_n=j, X_k=j, X_\ell\neq j, 1\le \ell\le k-1 | X_0=i\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P\{X_k=j, X_\ell\neq j, 1\le\ell\le k-1 | X_0=i\}\, P\{X_n=j|X_k=j\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_{ji}(k)\, p_{n-k}(j|j) \quad : (48.3)$$

Οι γεννήτριες συν/σεις των ακολουθιών $\{p_n(j|i)\}_{n=0}^{\infty}$ κ' $\{f_{ji}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ ορίζονται σαν $P_{ji}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(j|i) z^n$ κ' $F_{ji}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ji}(n) z^n$ αντιστοίχως.

$$P_{ii}(z) = p_0(i|i) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(i|i) z^n \overset{(48.3)}{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{ii}(k)\, p_{n-k}(i|i) z^n =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} f_{ii}(k)\, p_{n-k}(i|i) z^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k) z^k \sum_{n=k}^{\infty} p_{n-k}(i|i) z^{n-k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k) z^k \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i|i) z^n = 1 + P_{ii}(z) F_{ii}(z) \Leftrightarrow P_{ii}(z) = \frac{1}{1-F_{ii}(z)}$$

$$j \neq i \Rightarrow P_{ji}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(j|i) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|i) z^n \overset{(48.3)}{=}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ji}(k) p_{n-k}(j|j) z^n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} f_{ji}(k) p_{n-k}(j|j) z^n$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_{ji}(k) z^k \sum_{n=k}^{\infty} p_{n-k}(j|j) z^{n-k} = F_{ji}(z) P_{jj}(z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{ji}(z) = \frac{F_{ji}(z)}{1 - F_{jj}(z)}$$

□

<u>Άσκηση</u> Χρησιμοποιώντας την πρόταση της σελ 48 δείξτε το αποτέλεσμα της πρότασης στην σελ 39, δηλαδή ότι εάν η κατάσταση $j \in S$ είναι επανερχόμενη τότε $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|j) = \infty$ κ' αντίστροφα εάν ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|j) = \infty$ τότε η $j \in S$ είναι επανερχόμενη.

(i) $j \in S$ = επανερχόμενη $\Rightarrow f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}(n) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{z \to 1} F_{jj}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}(n) = 1 \overset{(48.1)}{\Rightarrow} \lim_{z \to 1} P_{jj}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|j) = \infty.$$

(ii) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|j) = \infty \Rightarrow \lim_{z \to 1} P_{jj}(z) = \infty \overset{(48.1)}{\Rightarrow} \lim_{z \to 1} \frac{1}{1 - F_{jj}(z)} = \infty$

$$\Rightarrow \lim_{z \to 1} F_{jj}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}(n) = f_{jj} = 1$$

□