<u>Πρόταση</u> (i) Εαν η κατάσταση $j \in S$ είναι παροδική (transient) τοτε για $\forall i \in S$ έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|i) < \infty$: (50.1)

(ii) Σε μια αλύσιδα Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ με <u>πεπερασμένο</u> χώρο καταστάσεων S, υπάρχει τουλάχιστον μια επανερχόμενη (recurrent) κατάσταση

(i) $j \in S$ = παροδική $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_n(j|j) < \infty$: (50.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|i) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{ji}(k)\, p_{n-k}(j|j) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ji}(k) \sum_{n=k}^{\infty} p_{n-k}(j|j) =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} f_{ji}(k)}_{P\{T_{ji}<\infty\}} \sum_{n=0}^{\infty} p_n(j|j) \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_n(j|j) < \infty$$

(ii) Έστω ότι όλες οι καταστάσεις $j \in S$ είναι παροδικές <u>τότε</u>:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|i) < \infty, \forall i \in S \overset{|S|<\infty}{\Rightarrow} \sum_{j \in S}\sum_{n=1}^{\infty} p_n(j|i) < \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{j \in S} p_n(j|i)}_{1} < \infty \quad \underline{\text{άτοπο}}$$

□

<u>Πρόταση</u> Έστω οτι οι καταστάσεις i κ' j επικοινωνούν ($i \leftrightarrow j$). Τότε εαν οι δύο καταστάσεις είναι επανερχόμενες, θα είναι είτε μηδενικά επανερχόμενες είτε θετικά επανερχόμενες.

State $i \in S$

transient
$f_{ii} < 1, \ \pi_i = 0$

recurrent
$f_{ii} = 1$

+ve recurrent
$\pi_i > 0, \ \mu_{ii} < \infty$

0 - recurrent
$\pi_i = 0, \ \mu_{ii} = \infty$

aperiodic $d(i) = 1$

$$p_n(i|i) \xrightarrow[n \to \infty]{} \pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}} > 0$$

periodic $d_i = d(i) > 1$

$$p_{n \cdot d_i}(i|i) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{d_i}{\mu_{ii}}$$

Από την πρόταση στη σελ. 40 γνωρίζουμε ότι εάν μία από τις δύο καταστάσεις είναι επαναερχόμενη τότε κ' η άλλη θα είναι επαναερχόμενη.

Έστω ότι i κ' j είναι επαναερχόμενες κ' j = μηδενικά επαναερχόμενη

$$i \longleftrightarrow j \iff \exists\, m, n \in \mathbb{N} : p_m(j|i) > 0 \text{ κ' } p_n(i|j) > 0$$

$$p_{m+k+n}(j|j) \overset{(40.1)}{\geq} p_m(j|i)\, p_k(i|i)\, p_n(i|j) \equiv \epsilon \cdot p_k(i|i), \quad \epsilon > 0$$

<u>Εαν j = μηδενικά επαναερχόμενη</u> $\mu_{jj} = \infty$ κ' από το πρώτο θεώρημα στη σελ 47 θα έχουμε $\lim_{k\to\infty} p_{m+k+n}(j|j) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} p_k(i|i) = 0$ κ' i = επαναερχόμενη $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ i = μηδενικά επαναερχόμενη.

<u>Εαν j = θετικά επαναερχόμενη</u>, αναγκαστικά κ' i = θετικά επαναερχόμενη (γιατί στην αντίθετη περίπτωση θα ήταν μηδενικά επαναερχόμενη που θα έδινε μηδενικά επαναερχόμενη κ' την κατάσταση j, που είναι άτοπο)

$\square$

Ορσ Εστω $\{X_n\}_{n\geq 0}$ αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων S κ' πιθανότητα μετάβασης πρώτης τάξης $\mathbb{P}$. Η συνάρτηση πιθανότητας π_j, $j \in S$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\pi_j = \sum_{i \in S} p(j|i)\pi_i \quad , j \in S \qquad : (52.1)$$

λέγεται στάσιμη κατανομή (stationary distribution)

Πρόταση Εαν π_j, $j \in S$ είναι στάσιμη κατανομή της $\{X_n\}_{n\geq 0}$ τότε

$$\pi_j = \sum_{i \in S} p_n(j|i)\pi_i \quad , \quad j \in S \qquad : (52.3)$$

Η περίπτωση $n=1$ ισχύει απο τον ορισμό (52.1). Δεχόμαστε ότι ισχύει η (52.3) κ' την αποδεικνύουμε για $n+1$

$$\sum_{i \in S} p_{n+1}(j|i)\pi_i = \sum_{i \in S}\sum_{k \in S} p_n(j/k)p(k|i)\pi_i =$$

$$= \sum_{k \in S} p_n(j|k) \sum_{i \in S} p(k|i)\pi_i \overset{(52.1)}{=} \sum_{k \in S} p_n(j|k)\pi_k \overset{(52.3)}{=} \pi_j$$

□

Παρατήρηση (i) Η σχέση (52.1) μας λέει ότι το διάνυσμα στήλη $\pi = [\pi_j]_{j \in S}$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 του πίνακα μετάβασης $\mathbb{P}$

$$(52.1) \Leftrightarrow (\pi)_j = (\mathbb{P}\pi)_j \ , \ j \in S \Leftrightarrow \pi = \mathbb{P}\pi \quad : (52.4)$$

(ii) Από την σχέση $\pi = \mathbb{P}\pi$ έχουμε ότι

$$\mathbb{P}^n \pi = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{P}\pi) = \mathbb{P}^{n-1}\pi = \cdots = \mathbb{P}\pi = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\pi)_j = (\mathbb{P}^n \pi)_j, \; j \in S \Leftrightarrow \pi_j = \sum_{i \in S} p_n(j|i)\pi_i$$

<u>Πρόταση</u> Εάν η αλυσίδα Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ έχει στάσιμη κατανομή π, και θέσουμε σαν <u>αρχική κατανομή</u> p_0 την στάσιμη κατανομή π, τότε:

$$P\{X_n = j\} = p_n(j) = \pi_j, \; \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (53.1)$$

κ' η κατανομή της X_n είναι ανεξάρτητη από το n.

<u>Αντίστροφα</u> εάν η κατανομή της X_n είναι ανεξάρτητη του n, τότε η αρχική κατανομή p_0 είναι μια στάσιμη κατανομή.

(i) $P\{X_n = j\} = p_n(j) = (p_n)_j = (\mathbb{P}^n p_0)_j =$

$$= \sum_{i \in S} p_n(j|i) p_0(i) \overset{p_0 = \pi}{=} \sum_{i \in S} p_n(j|i)\pi_i \overset{(52.3)}{=} \pi_j$$

(ii) Υποθέτουμε ότι η κατανομή της X_n είναι ανεξάρτητη του n τότε

$$P\{X_0 = j\} = \underbrace{P\{X_1 = j\}}_{(\mathbb{P}p_0)_j} \Leftrightarrow p_0(j) = \sum_{i \in S} p(j|i) p_0(i) \overset{(52.1)}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow p_0 =$ στάσιμη κατανομή

$\square$

<u>Πρόταση</u> Έστω $\{X_n\}_{n\geq 0}$ αλυσίδα Markov κ' π μια στάσιμη κατανομή. Υποθέτουμε ότι ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} p_n(j|i) = \pi_j \ , \ \forall j,i \in S \quad : (54.1)$$

<u>Τότε</u> $\lim\limits_{n\to\infty} P\{X_n = j\} = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(j) = \pi_j \ , \ \forall j \in S$:

κ' η στάσιμη κατανομή π είναι <u>μοναδική</u>.

Έστω p_0 η αρχική κατανομή της αλυσίδας τότε

$$p_n(j) = (\mathbb{P}^n p_0)_j = \sum_{i\in S} p_n(j|i)\, p_0(i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in S} p_n(j|i)\, p_0(i) \quad : (54.2)$$

<u>Εάν S πεπερασμένο σύνολο</u> :

$$\lim_{n\to\infty} p_n(j) = \sum_{i\in S} \underbrace{\lim_{n\to\infty} p_n(j|i)}_{\pi_j}\, p_0(i) \overset{(54.1)}{=} \sum_{i\in S} \pi_j\, p_0(i) = \pi_j$$

<u>Εάν $S = \mathbb{N}_0$</u> :

$$p_n(j) = (\mathbb{P}^n p_0)_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_n(j|i)\, p_0(i) \geq \sum_{i=0}^{M} p_n(j|i)\, p_0(i) \ , \ \forall M \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n(j) \geq \sum_{i=0}^{M} \underbrace{\lim_{n\to\infty} p_n(j|i)}_{\pi_j}\, p_0(i) = \pi_j \sum_{i=0}^{M} p_0(i) \xRightarrow{\lim_{M\to\infty}(\cdot)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n(j) \geq \pi_j \quad : (54.3)$$

$$p_n(j) = \sum_{i=0}^{\infty} p_n(j|i)\,p_0(i) = \sum_{i=0}^{M} p_n(j|i)\,p_0(i) + \sum_{i=M+1}^{\infty} p_n(j|i)\,p_0(i), \quad \forall M \in \mathbb{N}_0$$

$$\leq \sum_{i=0}^{M} p_n(j|i)\,p_0(i) + \sum_{i=M+1}^{\infty} p_0(i) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n(j) \leq \sum_{i=0}^{M} \underbrace{\lim_{n\to\infty} p_n(j|i)}_{\pi_j} \cdot p_0(i) + \sum_{i=M+1}^{\infty} p_0(i) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_n(j) \leq \pi_j \sum_{i=0}^{M} p_0(i) + \sum_{i=M+1}^{\infty} p_0(i) \quad \overset{\lim_{M\to\infty}(\cdot)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n(j) \leq \pi_j \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} p_0(i)}_{1} + \underbrace{\lim_{i\to\infty} p_0(i)}_{0} = \pi_j \quad \overset{(54.3)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n(j) = \pi_j \quad : (55.1)$$

Δείχνουμε τώρα ότι η <u>σ.κ</u> π είναι κ' μοναδική.

Έστω ότι υπάρχει κ' άλλη <u>σ.κ</u> $\tilde{\pi}$. Θέτουμε $p_0 = \tilde{\pi}$

Τότε από την πρόταση στη <u>σελ 53</u> έχουμε ότι

$$p_n(j) = \tilde{\pi}_j \quad \overset{\lim_{n\to\infty}(\cdot)}{\Longrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} p_n(j) = \tilde{\pi}_j \quad \overset{(55.1)}{\Longrightarrow} \quad \pi_j = \tilde{\pi}_j, \ \forall j \in S$$

□

Θεώρημα Έστω αλυσίδα Markov $\{X_n\}_{n\ge 0}$ που είναι αδιαχώριστη, θετικά επαναλαμβανόμενη κ' απεριοδική, με πίνακα μετάβασης $\mathbb{P}$. Τότε υπάρχει μοναδική στάσιμη κατανομή π, με $\pi_i > 0$ $\forall i \in S$ που ικανοποιεί $\mathbb{P}\pi = \pi$ κ' $\lim_{n\to\infty} p_n(j|i) = \pi_j$ $\forall j,i \in S$, ενώ $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n = [\pi_{ji}]_{j,i\in S}$, $\pi_{ji} = \pi_j$ $\forall i \in S$, κ' $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n p_0 = \pi$ για κάθε αρχική κατανομή p_0.

Παρατηρήσεις (i) Εάν η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη κ' παροδική (τότε θα πρέπει $|S| = \infty$) είτε μηδενικά επαναλαμβανόμενη θα έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} p_n(j|i) = 0$, $\forall j,i \in S$. Αυτό διότι εάν η αλυσίδα είναι παροδική θα έχουμε $\sum_{i=1}^{\infty} p_n(j|i) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n(j|i) = 0$, ενώ εάν η αλυσίδα είναι μηδενικά επαναλαμβανόμενη θα έχουμε $\sum_{i=1}^{\infty} p_n(j|i) = \infty$ αλλά $\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n) = \infty$ κ' έτσι $\lim_{n\to\infty} p_n(j|i) = \frac{1}{\mu_{jj}} = \frac{1}{\infty} = 0$.
Εάν υπήρχε σε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις στάσιμη κατανομή π τέτοια ώστε $\pi_i > 0$, $\forall i \in S$ θα είχαμε θέτοντας $p_0 = \pi$ ότι κ' $p_n = \pi \Leftrightarrow \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_n(j|i)\pi_i \le \sum_{i=0}^{M} p_n(j|i)\pi_i$

$$\Rightarrow \pi_j \le \sum_{i=0}^{M} \underbrace{\lim_{n\to\infty} p_n(j|i)}_{0}\, \pi_i = 0$$

που είναι άτοπο.

(ii) Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα εάν π είναι στάσιμη κατανομή μιας αδιαχώριστης, θετικά επαναλαμβανόμενης κ' απεριοδικής αλυσίδας θα πρέπει $\pi_i > 0, \forall i \in S$

Πράγματι εάν $\pi_i > 0$ κ' το $j \in S$ προσπελάσιμο από την κατάσταση $i \in S$, θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}: p_n(j/i) > 0$.

Επειδή $\pi_j = \sum_{k \in S} p_n(j|k)\pi_k$ έχουμε ότι $\pi_j \geq p_n(j/i)\pi_i > 0$.

(iii) Στην περίπτωση που η στάσιμη κατανομή δεν είναι μοναδική (δεν τηρούνται οι προϋποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος) τότε υπάρχουν άπειρες στάσιμες κατανομές

Πράγματι έστω π κ' $\tilde{\pi}$ στάσιμες κατανομές, με $\pi \neq \tilde{\pi}$

Ορίζουμε $\varphi = \alpha\pi + (1-\alpha)\tilde{\pi}$, $0<\alpha<1$, τότε:

$$\sum_{i \in S} p(j|i)\varphi_i = \sum_{i \in S} p(j|i)\{\alpha\pi_i + (1-\alpha)\tilde{\pi}_i\} =$$

$$= \alpha \sum_{i \in S} p(j|i)\pi_i + (1-\alpha)\sum_{i \in S} p(j|i)\tilde{\pi}_i$$

$$= \alpha\pi_j + (1-\alpha)\tilde{\pi}_j = \varphi_j.$$

Δηλαδή κ' η φ είναι στάσιμη κατανομή για $\forall\, 0<\alpha<1$.

(iv) Όταν ο χώρος των καταστάσεων της αλυσίδας είναι πεπερασμένος $|S|<\infty$ είδαμε ότι (σελ 50) εάν όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους (η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη) τότε θα πρέπει κ' όλες οι καταστάσεις να είναι επαναλαμβανόμενες. Δεν μπορούν να είναι μηδενικά επαναλαμβανόμενες γιατί σε αυτή την περίπτωση θα είχαμε $\lim_{n\to\infty} p_n(j|i) = 0$ επειδή $\mu_{jj} = \infty$, ενώ ο $\mathbb{P}^n$ είναι στοχαστικός από όπου $\sum_{j\in S} p_n(j|i) = 1 \Rightarrow$

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in S} p_n(j|i) \overset{|S|<\infty}{=} \sum_{j\in S} \lim_{n\to\infty} p_n(j|i) = 0$$ που

είναι άτοπο. Δηλαδή σε μία αλυσίδα με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων, που είναι αδιαχώριστη, όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναλαμβανόμενες

<u>Παράδειγμα</u> Να δειχθεί ότι η αλυσίδα Markov με πίνακα μετάβασης $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/6 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος στη <u>σελ 56</u> κ' έχει μία μοναδική στάσιμη κατανομή π στην οποία κ' συγκλίνει.

Εδώ ο χώρος καταστάσεων είναι $S = \{0,1,2\}$ κ' επειδή $p(j|i) > 0$, $\forall j,i \in S$ όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους. Δηλαδή έχουμε μία αδιαχώριστη αλυσίδα με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων, άρα κ' όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναλαμβανόμενες.

Για την στάσιμη κατανομή π ισχύει ότι $\mathbb{P}\pi = \pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i\in S} p(j|i)\pi_i = \pi_j$, $\forall j \in S$ ενώ $\sum_{j\in S} \pi_j = 1 \Rightarrow$

$$\chi_{\mathbb{P}}(x) = (x-1)\big(x-(1-p-q)\big) \Rightarrow \begin{array}{l} p=q=0 : \chi_{\mathbb{P}}(x) = (x-1)^2 \\ p=q=1 : \chi_{\mathbb{P}}(x) = (x-1)(x+1) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \tfrac{1}{3}\pi_0 + \tfrac{1}{4}\pi_1 + \tfrac{1}{6}\pi_2 &= \pi_0 \\ \tfrac{1}{3}\pi_0 + \tfrac{1}{2}\pi_1 + \tfrac{1}{3}\pi_2 &= \pi_1 \\ \tfrac{1}{3}\pi_0 + \tfrac{1}{4}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_2 &= \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} -6\pi_0 \qquad + 4\pi_2 &= 0 \\ 2\pi_0 - 3\pi_1 + 2\pi_2 &= 0 \\ 6\pi_0 \qquad - 4\pi_2 &= 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \pi_2 &= \tfrac{3}{2}\pi_0 \\ \pi_1 &= \tfrac{5}{3}\pi_0 \\ \pi_0 + \tfrac{5}{3}\pi_0 + \tfrac{3}{2}\pi_0 &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \pi_0 &= 6/25 \\ \pi_1 &= 10/25 \\ \pi_2 &= 9/25 \end{aligned}$$

$\square$

Παράδειγμα Να εξεταστεί ως προς την σύγκλιση η αλυσίδα με πίνακα μετάβασης $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}$

Θεωρούμε $S = \{0,1\}$. Εαν $p = q = 0 \Rightarrow \mathbb{P} = \mathbb{1}$ κ' οι οι εξισώσεις για την ύπαρξη στάσιμης κατανομής γίνονται $\mathbb{P}\pi = \pi \Rightarrow \begin{matrix} \pi_0 = \pi_0 \\ \pi_1 = \pi_1 \end{matrix}$ κ' $\pi_0 + \pi_1 = 1$ $\Rightarrow$ Η αλυσίδα σε αυτή την περίπτωση έχει άπειρες στάσιμες κατανομές: $\mathbb{P}\pi = \mathbb{1}\pi = \pi$ για $\pi_1 = 1 - \pi_0$, $0 < \pi_0 < 1$. Παρατηρήστε ότι οι καταστάσεις 0 κ' 1 δεν επικοινωνούν κ' η αλυσίδα <u>δεν είναι</u> αδιαχωρίσιμη.

Εαν $p = q = 1$ $\Rightarrow$ $\mathbb{P}^2 = \mathbb{1}$ κ' οι εξισώσεις για την ύπαρξη στάσιμης κατανομής είναι $\pi_1 = \pi_0$ κ' $\pi_0 + \pi_1 = 1$
$\pi_0 = \pi_1$

$\Rightarrow$ $\pi_0 = \pi_1 = 1/2$. Ενώ όμως υπάρχει στάσιμη κατανομή η αλυσίδα δεν συγκλίνει σε αυτή διότι εάν $p_0 = \begin{pmatrix} p_0(0) \\ p_0(1) \end{pmatrix}$ μια οποιαδήποτε αρχική κατανομή, θα έχουμε:

$$\mathbb{P}^n p_0 = \begin{cases} \begin{pmatrix} p_0(0) \\ p_0(1) \end{pmatrix}, & n = \text{άρτιος} \\[2ex] \begin{pmatrix} p_0(1) \\ p_0(0) \end{pmatrix}, & n = \text{περιττός} \end{cases} \quad \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Αυτό συμβαίνει διότι η αλυσίδα είναι περιοδική με περίοδο 2.

Εαν $|1 - p - q| < 1$ Σε αυτήν την περίπτωση όλες οι προϋποθέσεις για σύγκλιση κ' μοναδικότητα ικανοποιούνται. Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, απεριοδική κ' θετικά επαναλαμβανόμενη.

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}\pi &= \pi \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} (1-p)\pi_0 + q\pi_1 &= \pi_0 \\ p\pi_0 + (1-q)\pi_1 &= \pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} -p\pi_0 + q\pi_1 &= 0 \\ p\pi_0 - q\pi_1 &= 0 \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \dfrac{q}{q+p} \\[2ex] \pi_1 = \dfrac{p}{q+p} \end{cases} \quad : (60.1)$$

$\square$

<u>Παρατήρηση</u>: Το αποτέλεσμα (60.1) ήδη το γνωρίζουμε από τις σχέσεις (18.1) κ' (18.2). Εκεί είδαμε ότι μόνο στην περίπτωση που $|1-p-q|<1$ έχουμε:

$$\mathbb{P}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{bmatrix} \frac{q}{q+p} & \frac{q}{q+p} \\ \frac{p}{q+p} & \frac{p}{q+p} \end{bmatrix} \quad \text{κ'} \quad \mathbb{P}^n p_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{bmatrix} \frac{q}{q+p} \\ \frac{p}{q+p} \end{bmatrix} = \pi$$

για κάθε αρχική κατανομή p_0.

<u>Ορσ</u>: Ένας πίνακας μετάβασης ονομάζεται <u>διπλά στοχαστικός</u> (doubly stochastic) όταν κ' τα στοιχεία κάθε γραμμής του, αθροίζονται στην μονάδα. Δηλαδή για ένα διπλά στοχαστικό πίνακα $\mathbb{P} = [p(j|i)]_{j,i\in S}$ ισχύει $\sum_{j\in S} p(j|i) = 1$ κ' $\sum_{i\in S} p(j|i) = 1$.

<u>Πρόταση</u>: Έστω αλυσίδα Markov με πίνακα μετάβασης $\mathbb{P}$ που είναι διπλά στοχαστικός, τότε η κατανομή $\pi_j = \frac{1}{|S|}$ $\forall j\in S$ είναι στάσιμη κατανομή της αλυσίδας

Εάν π είναι στάσιμη κατανομή θα έχουμε $\pi_j = \sum_{i\in S} p(j|i)\pi_i$

θέτοντας $\pi_j = c$, $\forall j\in S \Rightarrow c = \sum_{i\in S} p(j|i)c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i\in S} p(j|i) = 1$ που είναι αληθές εφόσον $\mathbb{P}$ είναι διπλά στοχαστικός, αλλά $\sum_{j\in S}\pi_j = 1 \Rightarrow c|S| = 1 \Rightarrow \pi_j = \frac{1}{|S|}, \forall j\in S$ □