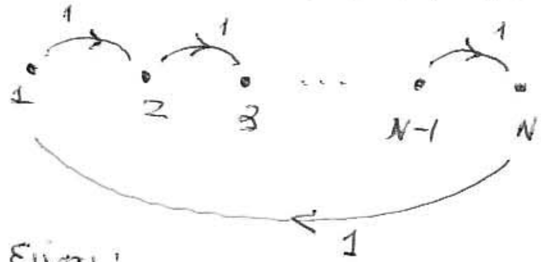
Παράδειγμα Έστω αλυσίδα Μαρκον με προσανατολισμένο γράφημα




ο αντίστοιχος πίνακας μετάβασης είναι:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad : (62.1)$$

Οι εξισώσεις για την στάσιμη κατανομή προκύπτουν από

$$\pi_j = \sum_{i \in S} p(j|i)\pi_i \ , \forall j \in S \ \underline{\kappa'} \ \sum_{j \in S} p(j|i) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_N = \pi_1 \\ \pi_1 = \pi_2 \\ \pi_2 = \pi_3 \\ \vdots \\ \pi_{N-2} = \pi_{N-1} \\ \pi_{N-1} = \pi_N \\ \pi_1 + \cdots + \pi_N = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \pi_2 = \cdots = \pi_N \\ \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_N = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_j = \frac{1}{N}, \forall j \in S \quad : (62.3)$$

Παρατηρούμε ότι $\mathbb{P}^N = \mathbb{I}$, δηλαδή η αλυσίδα είναι $N$-περιοδική

$$\mathbb{P}p_0 = \begin{pmatrix} p_0(N) \\ p_0(1) \\ p_0(2) \\ \vdots \\ p_0(N-2) \\ p_0(N-1) \end{pmatrix}, \ \mathbb{P}^2 p_0 = \begin{pmatrix} p_0(N-1) \\ p_0(N) \\ p_0(1) \\ \vdots \\ p_0(N-3) \\ p_0(N-2) \end{pmatrix}, \ldots, \mathbb{P}^{N-1} p_0 = \begin{pmatrix} p_0(2) \\ p_0(3) \\ p_0(4) \\ \vdots \\ p_0(N) \\ p_0(1) \end{pmatrix}, \ \mathbb{P}^N p_0 = \begin{pmatrix} p_0(1) \\ p_0(2) \\ p_0(3) \\ \vdots \\ p_0(N-1) \\ p_0(N) \end{pmatrix} = p_0$$

Δηλαδή ενώ η αλυσίδα έχει μοναδική στάσιμη κατανομή, δεν συγκλίνει σε αυτήν, εφόσων

$$\mathbb{P}^n p_0 = \begin{cases} \mathbb{P}^\tau p_0, & n = k \cdot N + \tau \quad 0 < \tau \le N-1 \\ p_0, & n = k \cdot N \end{cases}.$$

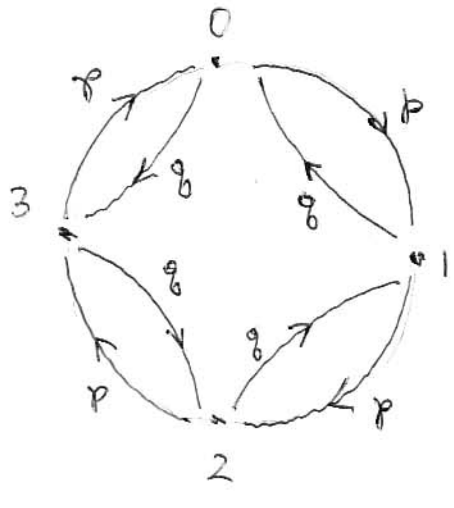
__Παρατηρήστε ότι__: Ο πίνακες στην (62.1) είναι __διπλό στοχαστικός__, έτσι μπορούμε να πάρουμε το αποτέλεσμα (62.3) χρησιμοποιώντας την πρόταση στη __σελ 61__

$\square$

__Παράδειγμα__ Ενα σωματίδιο εκτελεί τυχαίο περίπατο στην περιφέρεια ενός κύκλου στα σημεία 0, 1, 2 κ' 3, κάνοντας ένα βήμα δεξιά με πιθανότητα $p$ ή ένα βήμα αριστερά με πιθανότητα $q = 1-p$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω $\{X_n\}_{n\ge 0}$ η θέση του σωματιδίου μετά από $n$ βήματα.

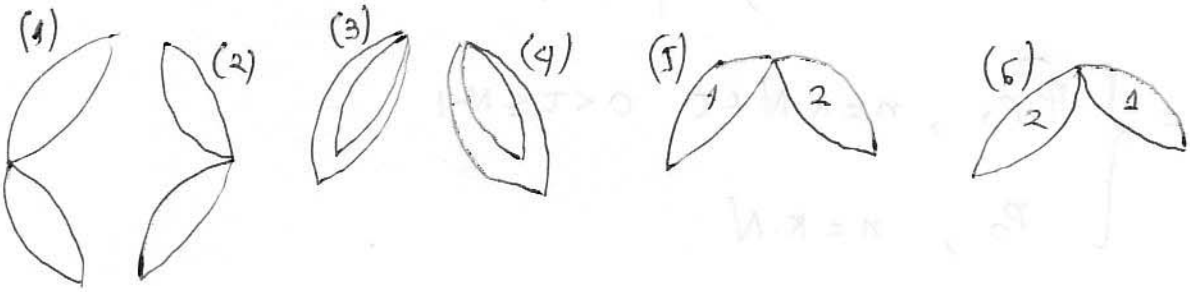
(i) Να προσδιοριστεί ο πίνακες μετάβασης της αλυσίδας

(ii) Να εξεταστεί ως προς την σύγκλιση η αλυσίδα.




$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \\ 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_4(j|j) = 6p^2q^2 + p^4 + q^4$$



Ο πίνακας $\mathbb{P}$ είναι διπλά στοχαστικός κ' από την πρόταση στη σελ <u>61</u> έχουμε ότι το

$\pi = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^T$ είναι στάσιμη κατανομή για την αλυσίδα.
Η $\pi$ είναι κ' η μοναδική στάσιμη κατανομή γιατί η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, γιατί όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν, ενώ είναι θετικά επαναλαμβανόμενη από την παρατήρηση (iv) της σελ <u>56</u>.

Η αλυσίδα <u>δεν</u> είναι όμως απεριοδική γιατί για $i \in S$
$d(i) = \gcd\{n > 0 : P_n(i|i) > 0\} = \gcd\{2, 4, 6, \dots\} = 2$.
Η αλυσίδα λοιπόν αν κ' έχει μοναδική στάσιμη κατανομή δεν συγκλίνει σε αυτήν γιατί <u>δεν υπάρχει</u> το όριο $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}^n$

Για παράδειγμα

$$\mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 2pq & 0 & p^2+q^2 & 0 \\ 0 & 2pq & 0 & p^2+q^2 \\ p^2+q^2 & 0 & 2pq & 0 \\ 0 & p^2+q^2 & 0 & 2pq \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3pq^2+p^3 & 0 & 3p^2q+q^3 \\ 3p^2q+q^3 & 0 & 3pq^2+p^3 & 0 \\ 0 & 3p^2q+q^3 & 0 & 3pq^2+p^3 \\ 3pq^2+p^3 & 0 & 3p^2q+q^3 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Παρατηρούμε ότι</u>

$P_n(j|j) = 0$ όταν $n$ = περιττός

$P_n(j|j) > 0$ όταν $n$ = άρτιος

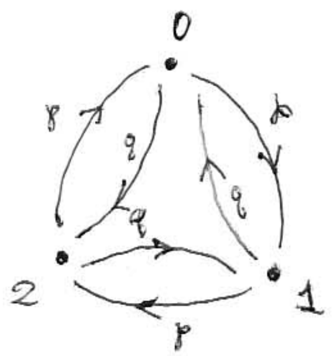
κ' $P_{2n}(j|j) \not\to 0$ διότι στην αντίθετη περίπτωση η κατάσταση $j$ θα ήταν περοδική ή μηδενικά επαναλαμβανόμενη

$\square$

$$N = 3 \Rightarrow \mathcal{X}_{\mathbb{P}}(x) = (x-1)\left(x^2 + x + 1 - 3p + 3p^2\right)$$

$$N = 4 \Rightarrow \mathcal{X}_{\mathbb{P}}(x) = (x-1)(x+1)\left(x^2 + 4p^2 - 4p + 1\right)$$

<u>Παρατηρήσεις</u> (i) Εάν θεωρήσουμε τυχαίο περίπατο στην περιφέρεια του κύκλου <u>αλλά με τρεις καταστάσεις</u> $S' = \{0,1,2\}$.




$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & p \\ p & q & 0 \end{bmatrix}$$

Και πάλι ο $\mathbb{P}$ είναι διπλά στοχαστικό κ' παίρνουμε τη μοναδική στάσιμη κατανομή $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)^T$. Αυτή τη φορά όμως $d(j) = gcd\{n>0 : p_n(j|j)>0\}$ $= gcd\{2,3,\dots\} = 1$.

Δηλαδή η αλυσίδα είναι απεριοδική κ' πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος στη σελ <u>56</u> κ' η αλυσίδα συγκλίνει στην στάσιμη κατανομή $\pi$.

(ii) <u>Γενικά</u> εάν θεωρήσουμε τυχ. περίπατο σε περιφέρεια κύκλου με άρτιο αριθμό καταστάσεων ($|S| = N =$ άρτιος) έχουμε μοναδική στάσιμη κατανομή $\pi_j = \frac{1}{N}$ $0 \le j \le N-1$ αλλά επειδή η αλυσίδα σε αυτή την περίπτωση έχει περίοδο 2 δεν συγκλίνει. Εάν το $N$ είναι περιττός έχουμε κ' σύγκλιση γιατί η αλυσίδα τότε είναι απεριοδική.

## Αλυσίδες Διακλάδωσης (Branching Processes)

Θεωρούμε οργανισμούς οι οποίοι παράγουν νέους οργανισμούς του ιδίου τύπου. Το αρχικό σύνολο των οργανισμών αποτελεί τη γενιά 0. Οι οργανισμοί που παράγονται από την γενιά $n$ αποτελούν τη γενιά $n+1$.

$X_n$ = # των οργανισμών της γενιάς $n$

Για την περιγραφή του συστήματος αυτού με αλυσίδες Markov (i) υποθέτουμε ότι <u>κάθε οργανισμός παράγει $Y$ οργανισμούς</u> της επόμενης γενιάς κ' ότι $Y \sim f(\cdot)$, δηλαδή η $Y$ είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με συν/ση πιθανότητας $f(\cdot)$.

(ii) Επίσης υποθέτουμε ότι οι διάφοροι οργανισμοί στις διάφορες γενιές ενεργούν ανεξάρτητα κ' παράγουν οργανισμούς σύμφωνα με την συν/ση πιθ. $f(\cdot)$.

Η συν/ση μετάβασης πρώτης τάξης είναι:

$$P(j|i) = P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\} = P\{X_1=j \mid X_0=i\}$$

$$= P\{Y_1+Y_2+\dots+Y_i=j\} \quad \forall\, i,j \in S=\{0,1,2,\dots\}=\mathbb{N}_0$$

και $Y_k \overset{i.i.d}{\sim} f(\cdot)$

Για $i=1$ έχουμε $P(j|1) = P\{X_{n+1}=j \mid X_n=1\} = P\{Y_1=j\} = f(j)$

Όταν για κάποιο οργανισμό έχουμε $Y=0$ αυτό σημαίνει ότι ο οργανισμός εξαφανίσθηκε. Υποθέτουμε ότι ένας οργανισμός δίνει $Y$ απογόνους οι οποίοι με την σειρά τους ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο παράγουν άλλους απογόνους. Μετά όμως από μερικές γενιές όλοι οι απόγονοι του αρχικού οργανισμού εξαφανίζονται. Εάν υποθέσουμε ότι η αλυσίδα άρχισε με ένα οργανισμό $X_0=1$ ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας εξαφάνισης (extinction probability) $\rho$

$$\rho = P\{\text{Για κάποιο } n \in \mathbb{N} \ X_n=0 \mid X_0=1\} =$$

$$= P\{T_0<\infty \mid X_0=1\} \overset{(30.1)}{=} f_{01} \quad : (66.1)$$

Εάν αρχίσουμε με $i$ οργανισμούς τότε η πιθανότητα εξαφάνισης είναι $\rho^i$

Πρόγμαπ:

$$P\{T_0<\infty \mid X_0=i\} = P\Big(\bigcap_{k=0}^{i}\{T_0<\infty \mid X_0=1\}\Big) = \Big(P\{T_0<\infty \mid X_0=1\}\Big)^{i} = \rho^{i}$$

Παράδειγμα  Θα δείξουμε ότι η πιθανότητα εξαφάνισης όταν $Y_k \overset{iid}{\sim}$ Bernoulli$(\cdot \mid p)$ είναι $\rho = 1$.

Επειδή $Y_k$ είναι ανεξάρτητες κ' ισόνομες τυχ. μεταβλητές $Bin(\cdot \mid 1,p)$ θα έχουμε ότι $\sum_{k=1}^{i} Y_k \sim Bin(\cdot \mid i,p)$

$$P\{X_1=0 \mid X_0=i\} = P\Big\{\sum_{k=1}^{i} Y_k = 0\Big\} = q^{i} \qquad (q=1-p) \qquad :(67.1)$$

$$P\{X_2=0 \mid X_0=i\} = \sum_{j=0}^{i} P\{X_2=0, X_1=j \mid X_0=i\}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} P\{X_1=j \mid X_0=i\}\, P\{X_2=0 \mid X_1=j\} = \sum_{j=0}^{i} P\{X_1=j \mid X_0=i\}\, P\{X_1=0 \mid X_0=j\}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} Bin(j \mid i,p)\, Bin(0 \mid j,p) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} p^{j} q^{i-j} \times q^{j} =$$

$$= q^{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} p^{j} = q^{i}(1+p)^{i} \qquad :(67.2)$$

$$P\{X_3=0 \mid X_0=i\} = \sum_{j=0}^{i} P\{X_3=0, X_1=j \mid X_0=i\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{i} P\{X_1=j \mid X_0=i\}\, P\{X_3=0 \mid X_1=j\} = \sum_{j=0}^{i} P\{X_1=j \mid X_0=i\}\, P\{X_2=0 \mid X_0=j\}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} p^{j} q^{i-j} \times \{q(1+p)\}^{j} = q^{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (p(1+p))^{j} =$$

$$= q^{i}(1+p+p^{2})^{i} \qquad :(67.3)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \lim_{n\to\infty} P(A_n), \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots = A_1 \cup \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{i+1} \setminus A_i) \right) \overset{P(\cdot)}{\Rightarrow}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} P(A_{i+1} \setminus A_i) = \lim_{n\to\infty} \left\{ P(A_1) + \sum_{i=1}^{n-1} P(A_{i+1} \setminus A_i) \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ P(A_1) + (P(A_2) - P(A_1 A_2)) + (P(A_3) - P(A_2 A_3)) + \dots + P(A_n) - P(A_{n-1} A_n) \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \cancel{P(A_1)} + (\cancel{P(A_2)} - \cancel{P(A_1)}) + (P(A_3) - \cancel{P(A_2)}) + \dots + (P(A_n) - \cancel{P(A_{n-1})}) \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$$A_1' \subset A_2' \subset \dots \Leftrightarrow A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

$$P(A_1' \cup A_2' \cup \dots) = \lim_{n\to\infty} P(A_n')$$

$$P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n') \Leftrightarrow$$

$$1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Απο τις σχέσεις (67.1)–(67.3) βλέπουμε ότι θα πρέπει να ισχύει.

$$P\{X_n=0 \mid X_0=i\} = q^i(1+p+\dots+p^{n-1})^i \quad ,\forall n\geq 1 \qquad (68.1)$$

Αποδεικνύουμε την (68.1) με επαγωγή. Την έχουμε ήδη αποδείξει για $n=1$, δεχόμαστε την (68.1) κ' αποδεικνύουμε για $n+1$.

$$P\{X_{n+1}=0 \mid X_0=i\} = \sum_{j=0}^{i} P\{X_n=0, X_1=j \mid X_0=i\} = \sum_{j=0}^{i} P\{X_1=j \mid X_0=i\}P\{X_{n+1}=0 \mid X_1=j\}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} P\{X_1=j \mid X_0=i\}P\{X_n=0 \mid X_1=j\} = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}p^j q^{i-j} \times q^j(1+p+\dots+p^{n-1})^j$$

$$= q^i \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\{p(1+p+\dots+p^{n-1})\}^j = q^i\left[1+p(1+p+\dots+p^{n-1})\right]^i =$$

$$= q^i(1+p+p^2+\dots+p^n)^i$$

Γνωρίζουμε ότι $\rho = P\{X_n=0, \text{ για κάποιο } n\in\mathbb{N} \mid X_0=1\}$

κ' ότι $\rho^i = P\{X_n=0, \text{ για κάποιο } n\in\mathbb{N} \mid X_0=i\}$ =

$$= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n=0 \mid X_0=i\}\right) = \lim_{n\to\infty} P\{X_n=0 \mid X_0=i\} = \lim_{n\to\infty} P_n(0 \mid i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} q^i(1+p+p^2+\dots+p^{n-1})^i = \left\{q\cdot\sum_{k=0}^{\infty}p^k\right\}^i = \left(\frac{q}{1-p}\right)^i = 1$$

$$\Rightarrow \rho = 1$$

$\square$

<u>Πρόταση</u> Δίνεται διαδικασία διακλάδωσης $\{X_n\}_{n\geq 0}$ όπου κάθε οργανισμός δίνει αριθμό απογόνων $Y$, όπου $Y$ τυχαία μεταβλητή με χώρο καταστάσεων $Y(\Omega)=\{0,1,2,\dots\}$. Τότε ισχύει ότι

$$\Pi_{X_n}(z)=\Pi_{X_0}\left(\Pi_Y^{(n)}(z)\right) \quad n\geq 1$$

όπου $\Pi_{X_i}(z)$ πιθανογεννήτρια συν/ση της $X_i$ $i\geq 0$, $\Pi_Y(z)$ η πιθανογεννήτρια της $Y$, ενώ $\Pi_Y^{(n)}=\underbrace{\Pi_Y\circ\cdots\circ\Pi_Y}_{n-\text{φορές}}$ η $n^{οστής}$ τάξης σύνθεση του $\Pi_Y$ με τον εαυτό του

$$\Pi_{X_n}(z)=\mathbb{E}\left[z^{X_n}\right]=\sum_{j=0}^{\infty}z^jP\{X_n=j\} \quad : (69.1)$$

$$P\{X_n=j\}=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X_{n-1}=i,X_n=j\}=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X_{n-1}=i\}P\{X_n=j\,|\,X_{n-1}=i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X_{n-1}=i\}p(j|i) \quad :(69.2)$$

$$(69.1)(69.2)\Rightarrow \Pi_{X_n}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}z^j\sum_{i=0}^{\infty}P\{X_{n-1}=i\}p(j|i)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X_{n-1}=i\}\sum_{j=0}^{\infty}z^jp(j|i)=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X_{n-1}=i\}\sum_{j=0}^{\infty}z^jP\{Y_1+\dots+Y_i=j\}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}z^jP\{Y_1+\dots+Y_i=j\}=\mathbb{E}\left[z^{Y_1+\dots+Y_i}\right]=\mathbb{E}[z^{Y_1}]\cdots\mathbb{E}[z^{Y_i}]=\{\Pi_Y(z)\}^i$$

$$\Rightarrow \Pi_{X_n}(z)=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X_{n-1}=i\}\cdot\{\Pi_Y(z)\}^i=\Pi_{X_{n-1}}\left(\Pi_Y(z)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi_{X_n}(z)=\Pi_{X_{n-1}}\left(\Pi_Y(z)\right)\Rightarrow \Pi_{X_{n-1}}(z)=\Pi_{X_{n-2}}\left(\Pi_Y(z)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi_{X_n}(z)=\Pi_{X_{n-2}}\left(\Pi_Y^{(2)}(z)\right)\Rightarrow\cdots\Rightarrow \Pi_{X_n}(z)=\Pi_{X_0}\left(\Pi_Y^{(n)}(z)\right) \quad \square$$

Ιδιότητες των διαδικασιών διακλάδωσης.

Εαν $Y$ η τ.μ. της διαδικασίας διακλάδωσης κ' $E[Y]=\mu$, $Var(Y)=\sigma^2$ κ' $S'=\{0,1,2,\dots\}$

(i) $E[X_n \mid X_0=i] = i\cdot\mu^n$

(ii) $E[X_{n+1}^2 \mid X_n=i] = i\sigma^2 + i^2\mu^2$

(iii) $E[X_{n+1}^2 \mid X_0=i] = i\mu^n\sigma^2 + \mu^2 E[X_n^2 \mid X_0=i]$

(iv) $E[X_n^2 \mid X_0=i] = i\sigma^2(\mu^{n-1}+\dots+\mu^{2(n-1)}) + i^2\mu^{2n}$

(v) $Var[X_n \mid X_0=i] = i\sigma^2\mu^{n-1}(1+\mu+\dots+\mu^{n-1})$

(i)/ $E[X_{n+1}] = \sum_{j=0}^{\infty} j\,P\{X_{n+1}=j\} = \sum_{j=0}^{\infty} j \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n=i\}p(j|i) =$

$= \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n=i\} \sum_{j=0}^{\infty} j\,p(j|i)$ : (70.1)

$\sum_{j=0}^{\infty} j\,p(j|i) = \sum_{j=0}^{\infty} j\,P\{Y_1+\dots+Y_i=j\} = E[Y_1+\dots+Y_i] = i\,E[Y] = i\mu$ : (70.2)

(70.1)(70.2) $\Rightarrow E[X_{n+1}] = \mu \sum_{i=0}^{\infty} i\,P\{X_n=i\} = \mu\,E[X_n] \Rightarrow$

$\Rightarrow E[X_n] = \mu^n E[X_0] \Rightarrow E[X_n \mid X_0=i] = \mu^n E[X_0 \mid X_0=i] = i\mu^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{E[X_n \mid X_0=i] = i\mu^n}$

(ii)/ $E[X_{n+1}^2 \mid X_n=i] = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\} = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 p(j|i) =$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} j^2 P\{Y_1+\cdots+Y_i=j\} = \mathbb{E}\left[(Y_1+\cdots+Y_i)^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{i} Y_k^2 + 2\sum_{1\le m<n\le i} Y_m Y_n\right\} = \sum_{k=1}^{i}\mathbb{E}[Y_k^2] + 2\sum_{1\le m<n\le i}\mathbb{E}[Y_m]\mathbb{E}[Y_n]$$

$$= i\,\mathbb{E}[Y^2] + 2\cdot\binom{i}{2}\mathbb{E}[Y]^2 = i\,\mathbb{E}[Y^2] + 2\cdot\frac{i(i-1)}{2}\mathbb{E}[Y]^2$$

$$= i\left\{\mathbb{E}[Y^2]-\mathbb{E}[Y]^2\right\} + \left(i\,\mathbb{E}[Y]\right)^2 = i\sigma^2 + (i\mu)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[X_{n+1}^2 \mid X_n = i] = i\sigma^2 + (i\mu)^2}$$

(iii) $$\mathbb{E}[X_{n+1}^2] = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{E}[X_{n+1}^2 \mid X_n=i]\,P\{X_n=i\} \overset{(ii)}{=}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n=i\}(i\sigma^2+i^2\mu^2) = \sigma^2\sum_{i=0}^{\infty} i\,P\{X_n=i\} + \mu^2\sum_{i=0}^{\infty} i^2 P\{X_n=i\}$$

$$= \sigma^2\,\mathbb{E}[X_n] + \mu^2\,\mathbb{E}[X_n^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_{n+1}^2 \mid X_0=i] = \sigma^2\,\mathbb{E}[X_n \mid X_0=i] + \mu^2\,\mathbb{E}[X_n^2 \mid X_0=i] \overset{(i)}{=}$$

$$= i\sigma^2\mu^n + \mu^2\,\mathbb{E}[X_n^2 \mid X_0=i] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[X_{n+1}^2 \mid X_0=i] = i\sigma^2\mu^n + \mu^2\,\mathbb{E}[X_n^2 \mid X_0=i]}$$

(iv) $$\mathbb{E}[X_n^2 \mid X_0=i] \overset{(iii)}{=} i\sigma^2\mu^{n-1} + \mu^2\,\mathbb{E}[X_{n-1}^2 \mid X_0=i]$$

$$= i\sigma^2\mu^{n-1} + \mu^2\left\{i\sigma^2\mu^{n-2} + \mu^2\,\mathbb{E}[X_{n-2}^2 \mid X_0=i]\right\}$$

$$= i\sigma^2\mu^{n-1}(1+\mu) + \mu^4\,\mathbb{E}[X_{n-2}^2 \mid X_0=i] = i\sigma^2\mu^{n-1}(1+\mu) + \mu^4\left\{i\sigma^2\mu^{n-3} + \mu^2\,\mathbb{E}[X_{n-3}^2 \mid X_0=i]\right\}$$

$$= i\sigma^2\mu^{n-1}(1+\mu+\mu^2) + \mu^6\,\mathbb{E}[X_{n-3}^2 \mid X_0=i] \Rightarrow \cdots \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}[X_n^2 | X_0 = i] = i\sigma^2 \mu^{n-1}(1+\mu+\cdots+\mu^{n-1}) + \mu^{2n}\,\mathbb{E}[X_0^2 | X_0 = i]$$

$$= i\sigma^2 \mu^{n-1}(1+\mu+\cdots+\mu^{n-1}) + \mu^{2n} \cdot i^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[X_n^2 | X_0 = i] = i\sigma^2 \mu^{n-1}(1+\mu+\cdots+\mu^{n-1}) + \mu^{2n} \cdot i^2}$$

(v) $\mathrm{Var}[X_n | X_0 = i] = \mathbb{E}[X_n^2 | X_0 = i] - \mathbb{E}[X_n | X_0 = i]^2 \overset{(i)(iv)}{=}$

$$= i\sigma^2 \mu^{n-1}(1+\mu+\cdots+\mu^{n-1}) + \cancel{\mu^{2n} \cdot i^2} - \cancel{(i\mu^n)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Var}[X_n | X_0 = i] = i\sigma^2 \mu^{n-1}(1+\mu+\cdots+\mu^{n-1})}$$

<u>Θεώρημα</u> Έστω τ.μ. $Y$ (στην περίπτωση μας η τ.μ. που δίνει τον αριθμό των απογόνων ενός οργανισμού κάποιες γενιάς) με χώρο καταστάσεων $Y(\Omega) = \mathbb{N}_0$. Η εξίσωση $z = \Pi_Y(z)$ όταν $\mu = \mathbb{E}[Y] \leq 1$ έχει μόνο τη ρίζα $z = 1$ στο $[0,1]$ κ' η πιθανότητα εξαφάνισης είναι $\rho = 1$. Όταν $\mu > 1$ τότε η εξίσωση $z = \Pi_Y(z)$ έχει 2 ρίζες στο $[0,1]$ την $z = 1$ κ' την $z = z_0$ $0 \leq z_0 < 1$, η πιθανότητα εξαφάνισης $\rho$ τότε είναι $\rho = z_0$.

Πρόταση Η πιθανότητα εξαφάνισης ενός πληθυσμού που μοντελοποιείται από αλυσίδα διακλάδωσης είναι ρίζα της εξίσωσης $\rho = \Pi_Y(\rho)$, όπου $\Pi_Y(z)$ η πιθανογεννήτρια της τ.μ. $Y$ που δίνει τον αριθμό των απογόνων ενός οργανισμού κάποιες γενιές.

$$(33.0) \Rightarrow \quad f_{ji} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ji}(n) = p(j|i) + \sum_{k \in S \setminus \{j\}} p(k|i) f_{jk}$$

$$(66.1) \Rightarrow \quad \rho = f_{01} = p(0|1) + \sum_{k=1}^{\infty} p(k|1) f_{0k}$$

$$\overset{f_{0k} = \rho^k}{\Rightarrow} \quad \rho = P\{Y=0\} + \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y=k\} \rho^k \Leftrightarrow \rho = \Pi_Y(\rho) \qquad \square$$

Παρατήρηση Επειδή $p(0|0)=1$ η κατάσταση 0 είναι απορροφητική. Αποδεικνύεται ότι όλες οι άλλες καταστάσεις είναι παροδικές. Δηλαδή η αλυσίδα τελικά θα απορροφηθεί στην κατάσταση 0 ή θα τείνει στο $\infty$ κ' $P\{\lim_{n\to\infty} X_n = \infty | X_0 = i\} = 1-\rho^i$

Άσκηση Έστω αλυσίδα διακλάδωσης της οποίας η τ.μ. $Y$ είναι Γεωμετρική, δηλαδή $Y \sim Geo(\cdot|p)$. Να βρεθεί η πιθανότητα εξαφάνισης της αλυσίδας

$$\Pi_Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i Geo(i|p) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i p(1-p)^i = \frac{p}{1-(1-p)z}$$

$$\mu = \mathbb{E}[Y] = \Pi_Y'(1) = \frac{1-p}{p}$$

Από το θεώρημα στην σελ 72 έχουμε ότι εάν $\mu \leq 1$

Αλυσίδα διακλάδωση με:

$Y \sim Bin(-13, p)$ ← Άσκηση

$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ p & q & 1-p-q \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow p \geq 1/2$ κ' η εξίσωση $z = \dfrac{p}{1-(1-p)z}$ μέσα στο $[0,1]$ έχει την λύση $z=1$ (η άλλη λύση είναι $z = \dfrac{p}{1-p} > 1$) κ' έτσι $\boxed{\rho = 1}$.

Εαν $\mu > 1 \Leftrightarrow p < 1/2$ κ' η εξίσωση $z = \dfrac{p}{1-(1-p)z}$ έχει 2 ρίζες στο $[0,1]$ την $z=1$ κ' την $z = \dfrac{p}{1-p} < 1$ κ' έτσι $\boxed{\rho = \dfrac{p}{1-p}}$

□

Άσκηση Δίνεται αλυσίδα διακλάδωσης της οποίας η τ.μ. Y έχει κατανομή $P\{Y=0\} = 1/2$, $P\{Y=3\} = 1/2$. Να προσδιοριστεί η πιθανότητα εξαφάνισης $\rho$.

$$\Pi_Y(z) = \frac{1}{2} \cdot z^0 + \frac{1}{2} z^3$$

$$E[Y] = \frac{3}{2} = \mu$$

Επειδη $\mu > 1$ η εξίσωση $\Pi_Y(z) = z$ θα έχει 2 ρίζες στο $[0,1]$ την $z=1$ κ' $z = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ κ' η πιθανότητα εξαφάνισης θα είναι $\rho = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0.618$

□

## Αλυσίδες αναμονής

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης. Άτομα προσέρχονται για εξυπηρέτηση στο σύστημα σε διάφορες χρονικές στιγμές. Άτομα τα οποία έχουν προσέλθει κ' δεν έχουν εξυπηρετηθεί σχηματίζουν γραμμή αναμονής.

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος μετριέται σε λεπτά κ' ότι αν υπάρχουν άτομα στη γραμμή αναμονής στην αρχή κάποιου λεπτού, τότε μόνον ένα άτομο θα εξυπηρετηθεί στο λεπτό αυτό. Ακόμη υποθέτουμε ότι αν δεν υπάρχουν άτομα στη γραμμή αναμονής στην αρχή κάποιου λεπτού τότε κανένας άτομο δεν θα εξυπηρετηθεί στο λεπτό αυτό.

Θέτουμε $Y_n$ τ.μ. που δίνει τον αριθμό των ατόμων που προσήλθαν στο σύστημα κατά το $n^{οστό}$ λεπτό

$Y_n \overset{iid}{\sim} f(\cdot)$, $\forall n \geq 1$.

Θέτουμε $X_0$ τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται αρχικά στο σύστημα κ' $X_n$ τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται στο σύστημα στο τέλος του $n^{οστού}$ λεπτού.

<u>ΤΟΤΕ</u>

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y_{n+1} & , X_n = 0 \\ X_n + Y_{n+1} - 1, & X_n \geq 1 \end{cases} \quad : (75.1)$$

προφανώς $\{X_n\}_{n\geq 0}$ αλυσίδα Markov

$$p(j|0) = P\{X_{n+1}=j \mid X_n=0\} = P\{Y_{n+1}=j\} = f(j)$$

$$p(j|i) = P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\} = P\{Y_{n+1}=j-i+1\} = f(j-i+1), \ i \geq 1$$

<u>Παράδειγμα</u> Έστω αλυσίδα αναμονής $\{X_n\}_{n\geq 0}$ όπου υποθέτουμε ότι εάν υπάρχουν άτομα στο σύστημα, στην αρχή κάποιου λεπτού, τότε υπάρχει πιθανότητα $p$ να εξυπηρετηθεί ένα άτομο κ' πιθανότητα $q=1-p$ να μην εξυπηρετηθεί κανένα άτομο κατά την διάρκεια αυτού του λεπτού. Να βρεθεί η πιθανότητα μετάβασης της αλυσίδας.

Θέτουμε $P\{Z_n=1\}=p$ κ' $P\{Z_n=0\}=1-p=q$ τότε

$$X_{n+1}=\begin{cases} Y_{n+1}, & X_n=0 \\ X_n+Y_{n+1}-Z_{n+1}, & X_n\geq 1, \end{cases}$$ <u>όπου</u> $Y_n \overset{iid}{\sim} f(\cdot)$, $\forall n\geq 1$

$$p(j|0)=P\{X_{n+1}=j\,|\,X_n=0\}=P\{Y_{n+1}=j\}=f(j)$$

$$p(j|i)=P\{X_{n+1}=j\,|\,X_n=i\}=P\{Y_{n+1}-Z_{n+1}=j-i\}=$$

$$=P\{Y_{n+1}-Z_{n+1}=j-i,\,Z_{n+1}=0\}+P\{Y_{n+1}-Z_{n+1}=j-i,\,Z_{n+1}=1\}$$

$$=P\{Z_{n+1}=0\}P\{Y_{n+1}-Z_{n+1}=j-i\,|\,Z_{n+1}=0\}+P\{Z_{n+1}=1\}P\{Y_{n+1}-Z_{n+1}=j-i\,|\,Z_{n+1}=1\}$$

$$=q\,f(j-i)+p\,f(j-i+1)$$

<u>Παράδειγμα</u> Υποθέτουμε ότι το σύστημα αναμονής (75.1) διαθέτει M θέσεις, συμπεριλαμβανομένης κ' της θέσης του ατόμου που εξυπηρετείται. Ένα άτομο που προσέρχεται στο σύστημα κ' διαπιστώνει ότι υπάρχουν M άτομα εγκαταλείπει το σύστημα κ' δεν επιστρέφει. Η τ.μ. που δίνει τον αριθμό των ατόμων που προσέρχονται στο σύστημα κατά την διάρκεια κάποιου λεπτού έχει συν/ση πιθανότητας $f(\cdot)$ κ' κατανομής $F(\cdot)$

$$i-1 \leq j \leq m-1 \Leftrightarrow 0 \leq \overbrace{j-i+1}^{Y_{n+1}} \leq m-i \leq m-1$$

$$1 \leq i \leq m \Leftrightarrow 0 \leq m-i \leq m-1$$

$\underline{i=0}$ $\quad p(m|0) = P\{X_{n+1}=m \mid X_n=0\} = P\{Y_{n+1} \geq m\} =$

$$= 1 - P\{Y_{n+1} \leq m-1\} = 1 - F(m-1)$$

$$p(j|0) = P\{X_{n+1}=j \mid X_n=0\} = P\{Y_{n+1}=j\} = f(j), \quad 0 \leq j \leq m-1$$

$\underline{1 \leq i \leq m}$ $\quad p(m|i) = P\{X_{n+1}=m \mid X_n=i\} = P\{Y_{n+1}+X_n-1=m \mid X_n=i\}$

$$= P\{Y_{n+1} \geq m-i+1\} = 1 - P\{Y_{n+1} \leq m-i\}$$

$$= 1 - F(m-i)$$

$$p(j|i) = P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\} = P\{Y_{n+1}+X_n-1=j \mid X_n=i\}$$

$$= P\{Y_{n+1}=j-i+1\} = f(j-i+1), \quad i-1 \leq j \leq m-1$$

□

<u>Παράδειγμα</u> Δείξτε ότι για το σύστημα αναμονής (75.1) ισχύει ότι
$$z\,Q_{n+1}(z) = \left[(z-1)P\{X_n=0\} + Q_n(z)\right]R(z)$$
όπου $Q_n(z)$ η πιθανογεννήτρια συν/ση του $X_n$ κ' $R(z)$ η πιθανογεννήτρια συν/ση του $Y$

$$Q_{n+1}(z) = \mathbb{E}\left[z^{X_{n+1}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[z^{X_{n+1}} \mid X_n=k\right] P\{X_n=k\}$$

$$= \mathbb{E}\left[z^{X_{n+1}} \mid X_n=0\right] P\{X_n=0\} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[z^{X_{n+1}} \mid X_n=k\right] P\{X_n=k\}$$

$$= \mathbb{E}\left[z^{Y_{n+1}}\right] P\{X_n=0\} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[z^{X_n+Y_{n+1}-1} \mid X_n=k\right] P\{X_n=k\}$$

$$= R(z)\,P\{X_n=0\} + z^{-1}\,\mathbb{E}\left[z^{Y_{n+1}}\right] \sum_{k=1}^{\infty} z^k P\{X_n=k\}$$

$$= R(z)\,P\{X_n=0\} + z^{-1} R(z)\left\{Q_n(z) - P\{X_n=0\}\right\} \Leftrightarrow$$

$$z\,Q_{n+1}(z) = \left\{(z-1)P\{X_n=0\} + Q_n(z)\right\} R(z)$$

□