Παράδειγμα

Sampling distribution: $y|\vartheta \sim N\left(\cdot|\vartheta,\sigma^2\right)$ με σ^2 γνωστό και διακριτό prior

$\vartheta \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_k \end{pmatrix}$ όπου $\pi_i = \pi\left(\vartheta = i\right)$

1. Να βρεθεί το marginal probability density του y (the prior predictive)
2. Να περιγραφεί το sampling scheme από την prior predictive.
3. Να βρεθεί η posterior για $k=2$, $\pi_1=\pi_2=0.5$, $\sigma=2$ και παρατήρηση $y=1$.

1. Το prior predictive είναι

$$\pi\left(y\right)=\sum_{\vartheta\in\Theta}\pi\left(y,\vartheta\right)=\sum_{i=1}^{k}\pi\left(\vartheta=i\right)\pi\left(y|\vartheta=i\right)=\sum_{i=1}^{k}\pi_i N\left(y|i,\sigma^2\right)$$

2. Το sampling scheme για $y\sim\pi\left(\cdot\right)$ είναι

$$step\,1:\quad sample\; u\sim U\left(\cdot|0,1\right)$$

$$step\,2:\quad find\; l\; such\; that\; \pi_1+\cdots+\pi_{l-1}<u\le\pi_1+\cdots+\pi_l \Rightarrow l\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_k \end{pmatrix}$$

$$step\,3:\quad sample\; \xi\sim N\left(\cdot|0,1\right)\Rightarrow y=l+\sigma\xi\sim N\left(\cdot|l,\sigma^2\right)$$

3. Η posterior του ϑ είναι

$$\pi\left(\vartheta=i|y\right)=\frac{\pi\left(\vartheta=i\right)\pi\left(y|\vartheta=i\right)}{\pi\left(y\right)}=\frac{\pi_i N\left(y|i,\sigma^2\right)}{\sum_{i=1}^{k}\pi_i N\left(y|i,\sigma^2\right)},\quad i=1,2$$

Για $k=2$, $\pi_1=\pi_2=0.5$, $\sigma=2$ και $y=1$, έχουμε

$$\pi\left(\vartheta=1|y=1\right)=\frac{0.5N\left(1|1,2^2\right)}{0.5N\left(1|1,2^2\right)+0.5N\left(1|2,2^2\right)}=0.53,\quad \pi\left(\vartheta=2|y=1\right)=0.47.$$

Sampling from mixture distributions

Μια mixture πυκνότητα είναι μια πυκνότητα που είναι κυρτός γραμμικός συνδυασμός από άλλες πυκνότητες.

- Το ***discrete Gaussian mixture*** είναι της μορφής

$$\pi^*(y) = p\left(y|\mu,\tau,\pi(\cdot)\right) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i N\left(y|\mu_i,\tau_i^{-1}\right), \quad k \le \infty .$$

  Όπου $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_k)$ οι μέσοι, $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_k)$ τα ***precisions*** και

  $i \sim \pi(\cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_k \end{pmatrix}$ τα ***mixing*** *proportions* (the mixing measure is $\pi(\cdot)$)

  και $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$.

- Εάν τα mixing proportions δίνονται από κάποια πυκνότητα $\pi(\cdot)$

$$\pi^*(y) = p\left(y|\mu,\tau,\pi(\cdot)\right) = \int_{\Theta} \pi(\vartheta) N\left(y|\mu(\vartheta),\tau(\vartheta)^{-1}\right) d\vartheta$$

- Οι prior και posterior predictive distributions είναι mixtures της οικογένειας $\pi(Data|\vartheta)$ με την prior $\pi(\vartheta)$ και την posterior $\pi(\vartheta|Data)$ αντιστοίχως.

<u>Το sampling scheme για mixtures είναι:</u>

$$\begin{array}{ll} \textit{first sample} & \vartheta \sim \pi(\cdot) \\ \textit{then sample} & y|\vartheta \sim \pi(\cdot|\vartheta) \end{array} \quad \overset{\text{marginally}}{\Longrightarrow} \quad y \sim \pi^*(\cdot) = \int_{\Theta} \pi(\vartheta)\pi(\cdot|\vartheta) d\vartheta$$

Έτσι για να προσομοιώσουμε iid δείγμα $y_i \overset{iid}{\sim} \pi^*(\cdot), 1 \le i \le n$ θα πρέπει πρώτα να προσομοιώσουμε διάνυσμα $(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n)$ με $\vartheta_i \overset{iid}{\sim} \pi(\cdot)$, $1 \le i \le n$ και μετά διάνυσμα $(y_1,\ldots,y_n)$ με $y_i|\vartheta_i \overset{ind}{\sim} \pi(\cdot|\vartheta_i)$, $1 \le i \le n$ τότε θα έχουμε ότι
$y_i \overset{iid}{\sim} \int_{\Theta} \pi(\vartheta)\pi(\cdot|\vartheta) d\vartheta, \; 1 \le i \le n$

Έστω ότι οι πραγματοποιήσεις της τυχαίας μεταβλητής $\tilde{Y}$ είναι τα y στα αριστερά του sampling scheme και οι πραγματοποιήσεις της τυχαίας μεταβλητής Y^* είναι τα y στα δεξιά του sampling scheme θα δείξουμε ότι $\tilde{Y} \overset{d}{=} Y^*$

Η συνάρτηση κατανομής του $\tilde{Y}$ είναι $F_{\tilde{Y}}(y) = P\{\tilde{Y} \le y\}$, conditioning στο ϑ έχουμε

$$F_{\tilde{Y}}(y) = \int_{\Theta} P\{\tilde{Y} \le y | \vartheta\} \pi(\vartheta) d\vartheta = \int_{\Theta} \left(\int_{-\infty}^{y} \pi(u|\vartheta) du \right) \pi(\vartheta) d\vartheta$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{\Theta} \pi(\vartheta) \pi(u|\vartheta) d\vartheta \right) du = \int_{-\infty}^{y} \pi^*(u) du = P\{Y^* \le y\} = F_{Y^*}(y)$$

δηλαδή έχουμε $F_{\tilde{Y}}(y) = F_{Y^*}(y) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{Y} \overset{d}{=} Y^*$.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ότι $n = 70$ με διωνυμική παρατήρηση $x = 34$. Εάν οι πεποιθήσεις των ειδικών είναι $\mu = 0.4$ και $\sigma^2 = 0.02$ και επειδή οι παράμετροι της κατανομής $\vartheta \sim Be(\cdot | p, q)$ σαν συνάρτηση της μέσης τιμής και της διασποράς είναι

$$\begin{aligned} E(\vartheta) &= \frac{p}{p+q} = \mu \\ Var(\vartheta) &= \frac{pq}{(p+q)^2 (p+q+1)} = \sigma^2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} p &= \frac{(1-\mu)\mu^2}{\sigma^2} - \mu \\ q &= \frac{\mu(1-\mu)^2}{\sigma^2} - (1-\mu) \end{aligned},$$

θα έχουμε $p = 4.4$ και $q = 6.6$.

Εάν θέλουμε να κάνουμε δειγματοληψία από την apriori κατανομή πρόβλεψης (prior predictive) $\pi(y)$ του διωνυμικού μοντέλου $x|\vartheta = \sum_{i=1}^{n} y_i | \vartheta \sim Bin(\cdot | n, \vartheta)$, θα έχουμε:

$$for(i \ \ in \ \ 1:SS)\{ \ \vartheta_i \leftarrow beta(4.4, 6.6); \ y_i \leftarrow binomial(70, \vartheta_i)\}$$

όπου SS το μέγεθος του δείγματος (sample size). Δηλαδή $\{y_1, \ldots, y_{SS}\}$ είναι ένα δείγμα μεγέθους SS από την κατανομή beta – binomial με παραμέτρους $(70, 4.4, 6.6)$

- Η *κατανομή* beta-binomial δίνεται από το mixture

$$\pi\left(y\right)=BB\left(y|n,p,q\right)=\int_0^1 Be\left(\vartheta|p,q\right)Bin\left(x|n,\vartheta\right)d\vartheta \ \propto \ \binom{n}{x}\Gamma\left(p+x\right)\Gamma\left(q+n-x\right),$$

με σταθερά κανονικοποίησης $c=\Gamma\left(p+q\right)\left\{\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(q\right)\Gamma\left(p+q+n\right)\right\}^{-1}$ και χώρο καταστάσεων το $X\left(\Omega\right)=\left\{0,1,\ldots,n\right\}$.

Εάν θέλουμε να κάνουμε δειγματοληψία από την a posteriori κατανομή πρόβλεψης (posterior predictive) $\left[\tilde{y}\,|\,x\right]$ για μια νέα παρατήρηση $\tilde{y}$ (μια νέα δοκιμή Bernoulli) του διωνυμικού μοντέλου θα έχουμε:

$$\pi\left(\tilde{y}|x\right)=\int_\Theta \pi\left(\tilde{y},\vartheta|x\right)d\vartheta=\int_\Theta \pi\left(\vartheta|x\right)\pi\left(\tilde{y}|\vartheta\right)d\vartheta=\int_0^1 Be\left(\vartheta|p+x,q-x+n\right)Bin\left(\tilde{y}|1,\vartheta\right)d\vartheta$$

με αποτέλεσμα

$$\pi\left(\tilde{y}|x\right)=BB\left(\tilde{y}|1,p+x,q+n-x\right)=\binom{1}{\tilde{y}}\frac{B\left(\left(p+x\right)+\tilde{y},\left(q+n-x\right)-\tilde{y}+1\right)}{B\left(p+x,q+n-x\right)}$$

$$=\left\{\frac{\Gamma\left(p+x+\tilde{y}\right)\Gamma\left(q+n-x-\tilde{y}+1\right)}{\Gamma\left(p+q+n+1\right)}\right\}\left\{\frac{\Gamma\left(p+q+n\right)}{\Gamma\left(p+x\right)\Gamma\left(q+n-x\right)}\right\},\quad \tilde{y}\in\left\{0,1\right\}$$

και η posterior predictive είναι η δίτιμη τυχαία μεταβλητή

$$\tilde{y}|x\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{q+n-x}{p+q+n} & \dfrac{p+x}{p+q+n}\end{pmatrix},$$

επειδή

$$\pi\left(\tilde{y}=0|x\right)=\left\{\frac{\Gamma\left(p+x\right)\Gamma\left(q+n-x+1\right)}{\Gamma\left(p+q+n+1\right)}\right\}\left\{\frac{\Gamma\left(p+q+n\right)}{\Gamma\left(p+x\right)\Gamma\left(q+n-x\right)}\right\}$$

$$=\left\{\frac{\left(q+n-x\right)\Gamma\left(q+n-x\right)}{\left(p+q+n\right)\Gamma\left(p+q+n\right)}\right\}\left\{\frac{\Gamma\left(p+q+n\right)}{\Gamma\left(q+n-x\right)}\right\}=\frac{q+n-x}{p+q+n}$$

$$\pi\left(\tilde{y}=1|x\right)=1-\pi\left(\tilde{y}=0|x\right)=\frac{p+x}{p+q+n}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} for\ \ i=1\ \ to\ \ SS \\ \qquad \left[\vartheta_i \mid x=34\right]\leftarrow beta\left(4.4+34,\ 6.6+70-34\right) \\ \qquad \left[\tilde{y}_i \mid \vartheta_i\right]\leftarrow binomial\left(1,\ \vartheta_i\right) \\ next\ \ i \end{array}}$$

όπου SS το μέγεθος του δείγματος (sample size). Δηλαδή $\{y_1,\ldots,y_{SS}\}$ είναι ένα δείγμα μεγέθους SS από την κατανομή beta – binomial με παραμέτρους $(70, 4.4, 6.6)$

Έστω ότι έχουμε παράγει δείγμα $\{y_1,\ldots,y_{SS}\}$ μήκους SS από την κατανομή $\left[\tilde{y} \mid x=34\right]$ τότε εάν κ είναι ο αριθμός των 0 και $SS-\kappa$ ο αριθμός των 1 θα πρέπει

$$\lim_{SS\to\infty}\frac{\kappa}{S}=\frac{q+n-x}{S\ p+q+n}=\frac{42.6}{81}$$

Μαρκοβιανές διαδικασίες σε διακριτό χρόνο και συνεχή ή διακριτό χώρο καταστάσεων

Ο χώρος καταστάσεων (state space) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} X_n\left(\Omega\right)$, της διαδικασίας $\left\{X_n\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, είναι ένα συνεχές σύνολο Borel του $\mathbb{R}^d$ είτε κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{Z}^d$ και η ιδιότητα Markov δίνεται αθροιστικά

$$P\left\{X_{t+k}\le y|X_t=x, X_{t-1}=x_{t-1},\ldots,X_0=x_0\right\}=P\left\{X_{t+k}\le y|X_t=x\right\}$$

$= F_{X_{t+k}|X_t}(y|x) = \mathrm{P}(t,\ x,\ t+k,\ (-\infty, y]), \quad k \ge 1$

Δηλαδή η k-τάξης “τάση” μετάβασης από το $x \in S$ κατά την χρονική στιγμή t στο σύνολο $(-\infty, y]$ είναι $\mathrm{P}(t,\ x,\ t+k,\ (-\infty, y])$. Εάν ισχύει ότι

$$\mathrm{P}(t,\ x,\ t+k,\ (-\infty, y]) = \mathrm{P}((t+k)-t,\ x,\ (-\infty, y]) = \mathrm{P}(k,\ x,\ (-\infty, y])$$

λέμε ότι η διαδικασία είναι χρονικά ομογενείς (έχει στάσιμη πιθανότητα μετάβασης) γιατί η πιθανότητα μετάβασης δεν εξαρτάται από τον χρόνο t που γίνεται η μετάβαση, αλλά μόνο από το μήκος του χρονικού διαστήματος k. Στα παρακάτω απλοποιούμαι τον συμβολισμό για $k=1$ με $P(y|x) = \mathrm{P}(x, y) = \mathrm{P}(1,\ x,\ (-\infty, y])$ και συμβολίζουμε $P(B|x) = \mathrm{P}(x, B) = \mathrm{P}(1,\ x,\ B),\ \forall B \in \mathcal{B}(S)$

Η πυκνότητα μετάβασης 1[ης] τάξης ή απλά πυκνότητα μετάβασης $p(y|x) = p(x, y)$ (transition density) από το x στο y είναι

$$p(y|x)dy = P\{y < X_{t+1} \le y+dy | X_t = x\} = P\{X_{t+1} \le y+dy | X_t = x\} - P\{X_{t+1} \le y | X_t = x\}$$

$$= \mathrm{P}(x, y+dy) - \mathrm{P}(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{P}(x, y)\right) dy$$

δηλαδή έχουμε $p(y|x) = \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = f_{X_{t+1}|X_t}(y|x)$ για κάθε $t \in \mathbb{N}_0$.

Άλλοι συμβολισμοί είναι

$$p(y|x)dy = p(x, y)dy = p(x, dy) = p(x, (y, y+dy])$$

Για Markovian αλυσίδα διακριτού χρόνου θα χρησιμοποιούμε για την μετάβαση πρώτης τάξης τον συμβολισμό $p(y|x)$

Συμβολίζουμε την marginal της στοχαστικής διαδικασίας για χρόνο t με $\pi_t(\cdot)$

$$\pi_t(x) \equiv f_{X_t}(x) = \frac{1}{dx} P\{x < X_t \le x+dx\}.$$

1. Ισχύει ότι

$$\pi_{t+1}(y) = \int_S p(y \mid x)\pi_t(x)\,dx .$$

Πράγματι

$$\pi_{t+1}(y) = f_{X_{t+1}}(y) = \int_S f_{X_t, X_{t+1}}(x, y)\,dx = \int_S f_{X_t}(x)\, f_{X_{t+1}|X_t}(y|x)\,dx$$

$$= \int_S p(y \mid x)\pi_t(x)\,dx$$

2. Για το induced measure $\Pi_{t+1}(\cdot)$ της τυχαίας μεταβλητής X_{t+1} ισχύει

$$\Pi_{t+1}(B) = P\{X_{t+1} \in B\} = \int_{y \in B} \pi_{t+1}(y)\,dy = \int_{y \in B}\int_{x \in S} p(y \mid x)\pi_t(x)\,dx\,dy$$

$$= \int_{x \in S} \pi_t(x)\left\{\int_{y \in B} p(y \mid x)\,dy\right\}dx = \int_{x \in S} \pi_t(x)\, p(B \mid x)\,dx$$

Δηλαδή

$$\Pi_{t+1}(B) = \int_S p(B \mid x)\Pi_t(dx)$$

Εάν υποθέσουμε ότι υπάρχει μέτρο $\Pi(\cdot)$ (η στάσιμη κατανομή) τέτοιο ώστε $\lim_{t\to\infty}\Pi_t(B) = \Pi(B)$ αυτό θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Pi(B) = \int_S p(B \mid x)\Pi(dx)$$

πού είναι η εξίσωση του αναλλοίωτου μέτρου που ορίζεται από τη αναδρομική σχέση $\Pi_{t+1}(B) = \int_S p(B \mid x)\Pi_t(dx)$. Η αναλλοίωτη πυκνότητα $\pi(\cdot)$ (invariant density – stationary distribution) τότε θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$\pi(y) = \int_S p(y \mid x)\pi(x)\,dx$$

Πράγματι θέτοντας $B = (y, y+dy]$ στην εξίσωση $\Pi(B) = \int_S p(B \mid x)\Pi(dx)$ παίρνουμε

$$\pi(y)\,dy = \Pi\big((y, y+dy]\big) = \int_{x\in S} p\big((y, y+dy] \mid x\big)\Pi\big((x, x+dx]\big) = \int_{x\in S} \{p(y\mid x)dy\}\{\pi(x)dx\}.$$

Το σχήμα δειγματοληψίας

Για την Markovian διαδικασία $X_n \sim MC\big(p(\cdot\mid\cdot),\, \pi_0(\cdot)\big)$ για $n\in\mathbb{N}_0$ και $S\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ όπου $p(\cdot\mid\cdot)$ η στάσιμη πυκνότητα μετάβασης και $\pi_0(\cdot)$ η αρχική πυκνότητα, επειδή $\pi_{n+1}(y) = \int_S p(y\mid x)\pi_n(x)\,dx$ θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα δειγματοληψίας για mixtures

$$\begin{array}{l} x_0 \sim \pi_0(\cdot) \\ x_i \mid x_{i-1} \sim p(\cdot\mid x_{i-1}),\ i\ge 1 \end{array} \overset{\textit{then marginally}}{\Longrightarrow} x_i \sim \pi_i(\cdot) = \int_S p(\cdot\mid x)\pi_{i-1}(x)\,dx,\ i\ge 1.$$

Σχηματικά

$$\begin{array}{l} x_0 \sim \pi_0(\cdot) \\ x_1 \mid x_0 \sim p(\cdot\mid x_0) \end{array} \overset{\textit{marginally}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} x_1 \sim \pi_1(\cdot) \\ x_2 \mid x_1 \sim p(\cdot\mid x_1) \end{array} \overset{\textit{marginally}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} x_2 \sim \pi_2(\cdot) \\ x_3 \mid x_2 \sim p(\cdot\mid x_2) \end{array} \overset{\textit{marginally}}{\Longrightarrow} \cdots$$

με αποτέλεσμα $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ να είναι μια $\omega-$τροχιά της διαδικασίας $X_n \sim MC\big(p(\cdot\mid\cdot),\, \pi_0(\cdot)\big)$.

Εάν ο χώρος καταστάσεων είναι διακριτός, δηλαδή $X_n \sim MC(\mathbb{P},\, \pi_0)$ για $n\in\mathbb{N}_0$ και $S\subseteq\mathbb{Z}$ όπου $\mathbb{P}=\big[p(j\mid i)\big]_{j,i\in S}$ με $\sum_{j\in S} p(j\mid i)=1$ ο πίνακας μετάβασης 1ης τάξης (η στάσιμη πιθανότητα μετάβασης) και $\pi_0 = \big[P\{X_0 = j\}\big]_{j\in S}$ η αρχική μάζα πιθανότητας, επειδή

$$\pi_n(j) = P\{X_n = j\} = (\mathbb{P}\pi_{n-1})_j = \sum_{i\in S} p(j\mid i)\pi_{n-1}(i)$$

θα έχουμε

$$\begin{array}{l} x_0 \sim \pi_0(\cdot) \\ x_i \mid x_{i-1} \sim \big[p(\cdot\mid x_{i-1})\big] = \mathbb{P}_{x_{i-1}},\ i\ge 1 \end{array} \overset{\textit{marginally}}{\Longrightarrow} x_i \sim \pi_i(\cdot) = \sum_{s\in S} p(\cdot\mid s)\pi_{i-1}(s),\ i\ge 1$$

όπου $\mathbb{P}_{x_{i-1}}$ η $x_{i-1}\in S$ στήλη του $\mathbb{P}$.

Παράδειγμα: Στάσιμη κατανομή και δειγματοληψία από $AR(1)$

Έστω στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ που ικανοποιεί την αναδρομική σχέση $X_{n+1} = \beta X_n + \varepsilon_{n+1}$ με $\varepsilon_n \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2)$, $n \in \mathbb{N}_0$ και $S = \mathbb{R}$. Τότε

$$[X_{n+1} | X_n = x] \overset{d}{=} \beta x + \varepsilon_{n+1} \sim N(\beta x, \sigma^2) \Rightarrow p(y\,|\,x) = N(y|\beta x, \sigma^2)$$

Έστω αρχική πυκνότητα $\pi_0(y) = N(y|0,1)$ τότε

$$\pi_1(y) = \int_{\mathbb{R}} N(y|\beta x, \sigma^2) N(x|0,1) d \propto N\left(y|0, \sigma^2\left(1+\beta^2\right)\right)$$

$$\pi_2(y) = \int_{\mathbb{R}} N(y|\beta x, \sigma^2) N\left(x|0, \sigma^2\left(1+\beta^2\right)\right) d \propto N\left(y|0, \sigma^2\left(1+\beta^2+\beta^4\right)\right)$$

δηλαδή

$$\pi_n(y) = \int_{\mathbb{R}} N(y|\beta x,\ \sigma^2) N\left(x|0,\ \sigma^2 \sum_{j=0}^{n-1} \beta^{2j}\right) d \propto N\left(x|0,\ \sigma^2 \sum_{j=0}^{n} \beta^{2j}\right)$$

και γίνεται εμφανές από το παραπάνω “pattern” ότι εάν υπάρχει stationary distribution, θα υπάρχει για $|\beta| < 1$ και θα είναι η κατανομή:

$$\pi(x) = N\left(x|0, \frac{\sigma^2}{1-\beta^2}\right), \quad |\beta| < 1.$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι για $|\beta| < 1$ ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}} N\left(x|0, \frac{\sigma^2}{1-\beta^2}\right) N(y|\beta x, \sigma^2) dx = N\left(y|0, \frac{\sigma^2}{1-\beta^2}\right)$$

Το ergodic theorem μας λεει ότι κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες (irreducibility και ergodicity) το $\pi(\cdot)$ είναι το μοναδικό stationary distribution και έχουμε σύγκλιση σε αυτό για οποιαδήποτε αρχική πυκνότητα $\pi_0(\cdot)$ με support $S = \mathbb{R}$.

Εφαρμόζοντας το εργοδικό θεώρημα μπορούμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\mathbb{R}} g(x)\Pi(dx)$ πιο συγκεκριμένα, εάν $X \sim \Pi(\cdot)$

$$\mathbb{E}\left[g\left(X\right)\right] = \int_{\mathbb{R}} g\left(x\right)\pi\left(x\right)d\,x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g\left(x_i\right) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=b+1}^{b+N} g\left(x_i\right),$$

όπου b το burn-in period και $\left\{x_0, x_1, \ldots, x_b, x_{b+1}, \ldots, x_{b+N}\right\}$ τροχιά μεγάλου μήκους από την στοχαστική διαδικασία $\left\{X_n\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ με αυθαίρετη αρχική τιμή $x_0 \in S$.

Τα σημεία της τροχιάς της στοχαστικής διαδικασίας τα παίρνουμε εφαρμόζοντας δειγματοληψία από την κατανομή $p\left(x, \cdot\right)$. Για παράδειγμα για την $AR\left(1\right)$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
x_1 | x_0 &\sim p\left(\cdot | x_0\right) = \beta x_0 + \sigma N\left(\cdot|0,1\right) \\
x_2 | x_1 &\sim p\left(\cdot | x_1\right) = \beta x_1 + \sigma N\left(\cdot|0,1\right) \\
&\vdots \\
x_n | x_{n-1} &\sim p\left(\cdot | x_{n-1}\right) = \beta x_{n-1} + \sigma N\left(\cdot|0,1\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$