ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΟΥ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Σ. Ι. ΧΑΤΖΗΣΠΥΡΟΣ

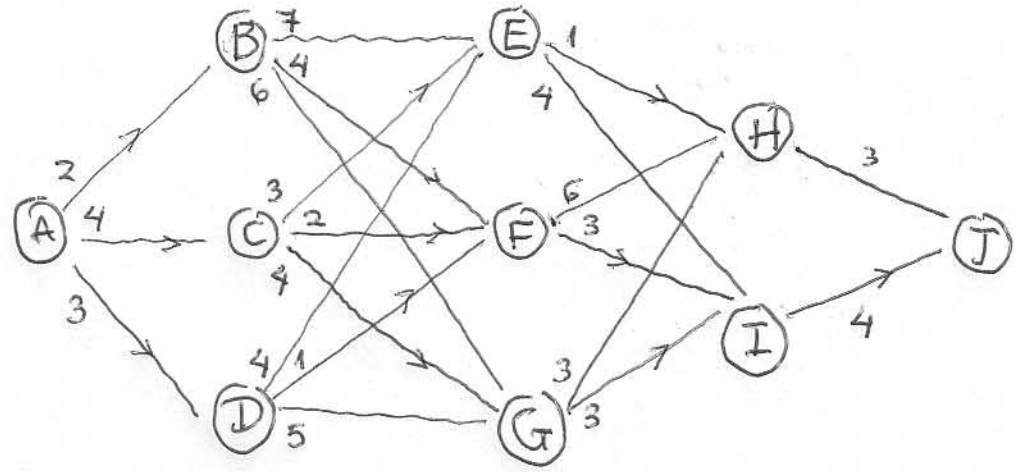
Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Το βασικό στοιχείο του δυναμικού προγραμματισμού (δπ) είναι η <u>αρχή της αριστοποίησης</u>.

<u>Αρχή της αριστοποίησης</u>: Από κάθε σημείο μιας άριστης (optimal) τροχιάς, η υπόλοιπη τροχιά είναι άριστη για το αντίστοιχο πρόβλημα αριστοποίησης που αρχίζει από το συγκεκριμένο σημείο.

Με άλλα λόγια η άριστη ενέργεια στο παρόν δίνεται από την μεγιστοποίηση (ελαχιστοποίηση) του αθροίσματος της χρησιμότητας (κόστους) που σχετίζεται με την ενέργεια στο παρόν <u>και</u> της άριστης επέκτασης στο μέλλον των επιπτώσεων που απορρέουν από αυτή την ενέργεια.

<u>Παράδειγμα</u>: Κάποιος θέλει να ταξιδέψει από την πόλη A στην πόλη J πρώτα ταξιδεύοντας σε μια πόλη από τις B, C, D μετά σε μία από τις E, F και G, μετά σε H ή I κ' τελικά στο J.



Δηλαδή το ταξίδι γίνεται σε 4 στάδια (ο ορίζοντας του προβλήματος είναι $h=4$). Πάνω σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι σημειωμένη κ' η αντίστοιχη απόσταση, για παράδειγμα $c(B, A)=2$, $c(I, F)=3$.

Θέλουμε να βρούμε την ακολουθία ενεργειών ή αποφάσεων που ελαχιστοποιεί την απόσταση από το A στο J. Θέλουμε να βρούμε την βέλτιστη πολιτική $\pi = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ τέτοια ώστε:

$$V_0(A) = \inf_{\pi} \sum_{i=0}^{3} c(\alpha_i, \alpha_{i-1}) \quad , \quad \alpha_{-1} = s_0 = A$$

Η ελάχιστη απόσταση από το A στο J

η αρχική κατάσταση

$\alpha_3 = J$

η τελική κατάσταση

παρατηρούμε ότι $V_4(J)$ = η ελάχιστη απόσταση από το J στο J $= 0$

$$V_3(H) = c(J,H) = c(J,H) + V_4(J) = \min_{\alpha \in \{J\}} \left[c(\alpha_3, H) + V_4(\alpha_3) \right] = 3 \qquad \alpha_3^* = J$$

$$V_3(I) = c(J,I) = c(J,I) + V_4(I) = \min_{\alpha \in \{J\}} \left[c(\alpha_3, I) + V_4(\alpha_3) \right] = 4 \qquad \alpha_3^* = J$$

$$V_2(E) = \min \left\{ \overbrace{c(H,E) + V_3(H)}^{1},\ \overbrace{c(I,E) + V_3(I)}^{4} \right\}$$

$$= \min_{\alpha_2 \in \{H,I\}} \left[c(\alpha_2, E) + V_3(\alpha_2) \right] = 4 , \quad \alpha_2^* = H$$

$$V_2(F) = \min \left\{ \overset{6}{c(H,F)} + \overset{3}{V_3(H)},\ \overset{3}{c(I,F)} + \overset{4}{V_3(I)} \right\} = 7, \quad \alpha_2^* = I$$

$$V_2(G) = \min \left\{ \overset{3}{c(H,G)} + V_3(H),\ \overset{3}{c(I,G)} + V_3(I) \right\} = 6, \ \alpha_2^* = H$$

$$V_1(B) = \min \left\{ \overset{7}{c(E,B)} + \overset{4}{V_2(E)},\ \overset{4}{c(F,B)} + \overset{7}{V_2(F)},\ \overset{6}{c(G,B)} + \overset{6}{V_2(G)} \right\}$$

$$= \min_{\alpha_1 \in \{E,F,G\}} \left[c(\alpha_1, B) + V_2(\alpha_1) \right] = 11 , \quad \alpha_1^* \in \{E,F\}$$

$$V_1(C) = \min \left\{ \overset{3}{c(E,C)} + \overset{4}{V_2(E)},\ \overset{2}{c(F,C)} + \overset{7}{V_2(F)},\ \overset{4}{c(G,C)} + \overset{6}{V_2(G)} \right\}$$

$$= 7 , \quad \alpha_1^* = E$$

$$V_1(D) = \min \left\{ \overset{4}{c(E,D)} + \overset{4}{V_2(E)},\ \overset{1}{c(F,D)} + \overset{7}{V_2(F)},\ \overset{5}{c(G,D)} + \overset{6}{V_2(G)} \right\}$$

$$= 8 , \quad \alpha_1^* \in \{E,F\}$$

<u>Τελικό</u>:

$$V_0(A) = \min_{\alpha_0 \in \{B, C, D\}} \left[c(\alpha_0, A) + V_1(\alpha_0) \right]$$

$$= \min \left\{ \overset{2}{c(B,A)} + \overset{11}{V_1(B)},\ \overset{4}{c(C,A)} + \overset{7}{V_1(C)},\ \overset{3}{c(D,A)} + \overset{8}{V_1(D)} \right\}$$

$$= 11, \quad \alpha_0^* \in \{C, D\}$$

Συγκεντρωτικά η συνάρτηση ελάχιστης απόστασης πάνω στο <u>πλέγμα</u>

$$\begin{array}{ccccc} & B & E & & \\ & & & H & \\ A & C & F & & J \\ & & & I & \\ & D & G & & \end{array}$$

είναι:

$$V_4(\underset{J}{S_4}) = 0, \qquad S_4 \in \{J\}$$

$$V_3(s_3) = \begin{cases} 3, & s_3 = H, \ \alpha_3^* = J \\ 4, & s_3 = I, \ \alpha_3^* = J \end{cases}, \qquad s_3 \in \{H, I\}$$

$$V_2(s_2) = \begin{cases} 4, & s_2 = E, \ \alpha_2^* = H \\ 7, & s_2 = F, \ \alpha_2^* = I \\ 6, & s_2 = G, \ \alpha_2^* = H \end{cases}, \qquad s_2 \in \{E, F, G\}$$

Το σύνολο των καταστάσεων την περίοδο 2

$$V_1(s_1) = \begin{cases} 11, & s_1 = B, \ \alpha_1^* \in \{E, F\} \\ 7, & s_1 = C, \ \alpha_1^* = E \\ 8, & s_1 = D, \ \alpha_1^* \in \{E, F\} \end{cases}, \qquad s_1 \in \{B, C, D\}$$

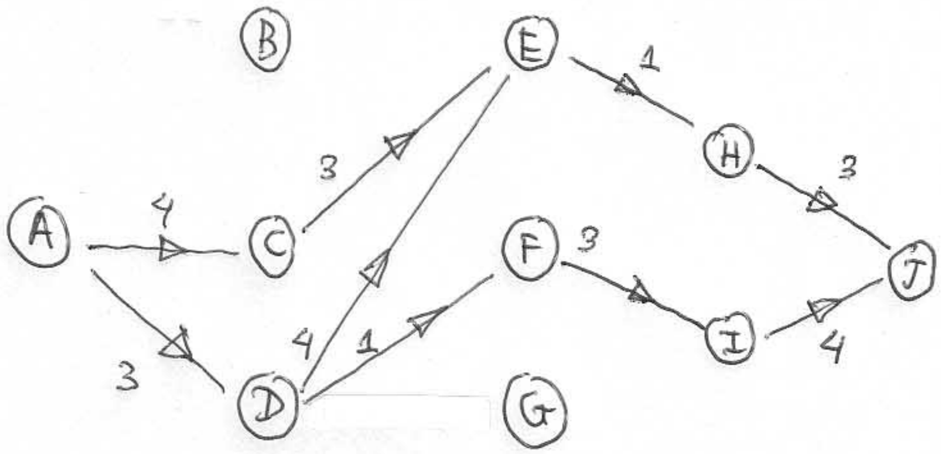
$$V_0(\underset{A}{s_0}) = 11, \quad \alpha_0^* \in \{C, D\}, \qquad s_0 \in \{A\}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε 3 βέλτιστες πολιτικές

$\pi_1 = (C, E, H, J)$

$\pi_2 = (D, E, H, J)$

$\pi_3 = (D, F, I, J)$ $\qquad$ <u>με</u> $V_0(A) = 11$



Για να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιήσαμε <u>προς τα πίσω επαγωγή</u> (backward induction) στην εξίσωση <u>Bellman</u>:

Η κατάσταση την χρονική στιγμή i+1

$$V_i(s_i) = \inf_{a_i} \left\{ c(a_i, s_i) + V_{i+1}(s_{i+1}) \right\}, \quad 0 \le i \le h-1$$

με <u>τελική συνθήκη</u> $V_h(s_h) = 0$.

(Στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε ότι $s_{i+1} = s_{i+1}(s_i, \alpha_i) \equiv \alpha_i$)