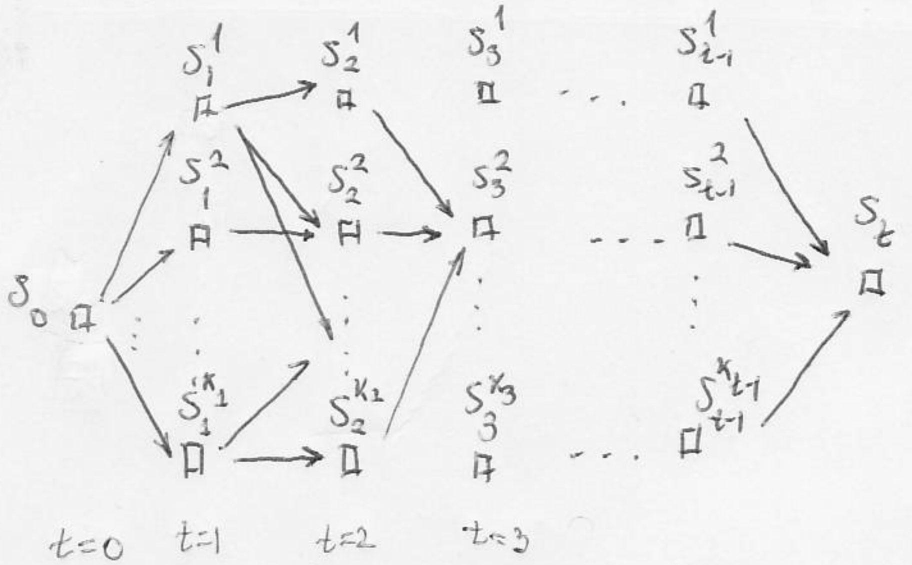



$t$ = time horizon $\leq \infty$

Το κόστος μετάβασης από την κατάσταση $s_i$ στην $s_{i+1}$ είναι $c_i(s_{i+1}, s_i)$. Στην ουσία η απόφαση για την μετάβαση στο $s_{i+1}$, παίρνεται την χρονική στιγμή $i$ με την ενέργεια $\alpha_i$. Έτσι γράφουμε το κόστος μετάβασης σαν $c_i(\alpha_i, s_i)$ γιατί θεωρούμε ότι $s_{i+1} = s_{i+1}(\alpha_i, s_i)$.

Εάν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος μετάβασης από το $s_0$ στο $s_t$ θα έχουμε:

$$\underbrace{V_0(s_0)}_{\text{άριστο κόστος}} = \inf_{\underbrace{(\alpha_0,\dots,\alpha_{t-1})}_{\text{μεταβλητές ελέγχου (ακολουθία ελέγχων)}}} \left\{ \sum_{i=0}^{t-1} c_i(\alpha_i, s_i) + \overbrace{\underbrace{V_t(s_t)}_{\text{συνοριακή συνθήκη που καθορίζεται από το πρόβλημα}}}^{\text{η τελική κατάσταση}} \right\} =$$

$$= \inf_{\alpha_0} \inf_{\alpha_1} \cdots \inf_{\alpha_{t-1}} \left\{ c_0(\alpha_0, s_0) + c_1(\alpha_1, s_1) + \dots + c_{t-1}(\alpha_{t-1}, s_{t-1}) + V_t(s_t) \right\} =$$

$$= \inf_{\alpha_0} \left\{ c_0(\alpha_0, s_0) + \underbrace{\inf_{\alpha_1} \left\{ c_1(\alpha_1, s_1) + \dots + \underbrace{\inf_{\alpha_{t-1}} \left\{ c_{t-1}(\alpha_{t-1}, s_{t-1}) + V_t(s_t) \right\}}_{V_{t-1}(s_{t-1})} \dots \right\}}_{V_1(s_1)} \right\}$$

κ' έτσι βλέπουμε ότι :

$$\underbrace{V_i(s_i) = \inf_{\alpha_i} \left\{ c_i(\alpha_i, s_i) + V_{i+1}(s_{i+1}) \right\}}, \quad 0 \le i \le t-1$$

Δηλ. από κάθε σημείο $i$ μιας άριστης τροχιάς, η υπόλοιπη τροχιά είναι άριστη για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης που άρχισε από το $i$.

(αρχή της αριστοποίησης)

<u>Πιο γενικά θα έχουμε:</u>

discount

$$V_i(s_i) = \inf_{\alpha_i \in A_i(s_i)} \left\{ c_i(\alpha_i, s_i) + \beta V_{i+1}(s_{i+1}(\alpha_i, s_i)) \right\}$$

<u>είτε για πρόβλημα μεγιστοποίησης</u> :

$$V_i(s_i) = \sup_{\alpha_i \in A_i(s_i)} \left\{ b_i(\alpha_i, s_i) + \beta V_{i+1}(s_{i+1}(\alpha_i, s_i)) \right\}$$

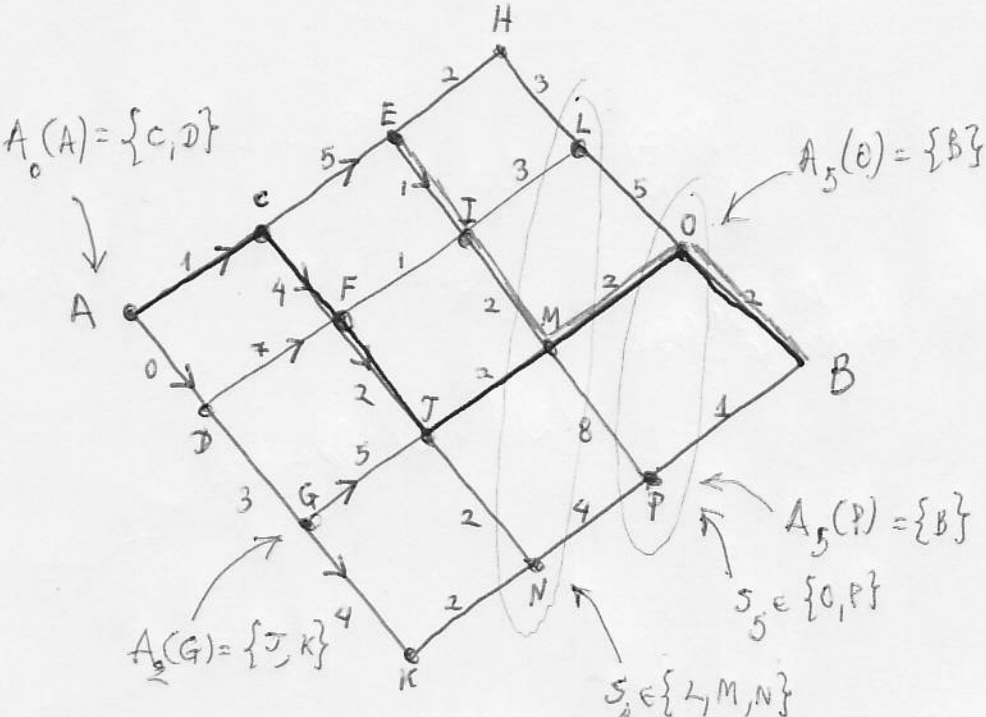
το κέρδος (benefit) την περίοδο $i$

$\beta = (1+r)^{-1}$

$A_i(s_i)$ = το σύνολο των δυνατών actions εαν βρισκόμαστε σε κατάσταση $s_i$

# ΠΡΟΒΛΗΜΑ NETWORK 1

Θέλουμε να ταξιδέψουμε με ελάχιστο κόστος από την αφετηρία A στο τέρμα B, στο επόμενο network




Ο αριθμός ανάμεσα σε δύο κορυφές είναι το κόστος της μετακίνησης από την μία στην άλλη κορυφή. Για παράδειγμα $C(P, M) = 8$ είναι το κόστος μετακίνησης από την κατάσταση M στην κατάσταση P. Ένας από τους τρόπους να λύσουμε αυτό το πρόβλημα θα ήταν φυσικό να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος όλων των μονοπατιών από το A στο B. Ένας καλύτερος τρόπος (πιο αποτελεσματικός) θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραμματισμό.

Χρησιμοποιώντας την αρχή της αριστοποίησης έχουμε

$$\begin{cases} V_t(s_t) = \inf\limits_{\alpha_t \in A_t(s_t)} \left\{ \underbrace{c_t(\alpha_t, s_t)}_{c(\alpha_t, s_t)} + V_{t+1}\left( \underbrace{s_{t+1}(\alpha_t, s_t)}_{\alpha_t} \right) \right\} \\ \text{με συνοριακη συνθηκη } V_6(B) = 0 \quad , \quad 0 \le t \le 5 \end{cases}$$

$\boxed{t=5} \Rightarrow A_5(O) = A_5(P) = \{B\} \ni \alpha_5 \quad , s_5 \in \{O, P\}$

$$V_5(s_5) = \inf_{\alpha_5 \in A_5(s_5)} c(\alpha_5, s_5) = \begin{cases} c(B, O) ; & s_5 = O \\ c(B, P) ; & s_5 = P \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2 , & s_5 = O , \ \alpha_5^* = B \\ 1 , & s_5 = P , \ \alpha_5^* = B \end{cases}$$

$\boxed{t=4}$ $\quad V_4(s_4) = \inf\limits_{\alpha_4 \in A_4(s_4)} \left\{ c(\alpha_4, s_4) + V_5(\alpha_4) \right\}$

$$s_4 \in \{L, M, N\} \qquad A_4(s_4) = \begin{cases} \{O\} , & s_4 = L \\ \{O, P\} , & s_4 = M \\ \{P\} , & s_4 = N \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_4(L) = c(O, L) + V_5(O) = 5 + 2 = 7 \ ; \ \alpha_4^* = O \\ V_4(M) = \inf\left\{ \underbrace{c(O, M)}_{2} + \underbrace{V_5(O)}_{2} , \underbrace{c(P, M)}_{8} + \overset{1}{V_5(P)} \right\} = 4 \ ; \ \alpha_4^* = O \\ V_4(N) = \underbrace{c(P, N)}_{4} + \underbrace{V_5(P)}_{1} = 5 \ , \ \alpha_4^* = P \end{cases}$$

$t=3: \; s_3 \in \{ H, I, J, K \}$

$$A_3(s_3) = \begin{cases} \{L\} & , \; s_3 = H \\ \{L, M\} & , \; s_3 = I \\ \{M, N\} & , \; s_3 = J \\ \{N\} & , \; s_3 = K \end{cases}$$

$$V_3(H) = \overbrace{c(L,H)}^{3} + \overbrace{V_4(L)}^{7} = 10 \quad , \quad \alpha_3^* = L$$

$$V_3(I) = \inf \{ \overbrace{c(L,I)}^{3} + \overbrace{V_4(L)}^{7} , \; \overbrace{c(M,I)}^{4} + \overbrace{V_4(M)}^{4} \} = 8 \; , \; \alpha_3^* = M$$

$$V_3(J) = \inf \{ \overbrace{c(M,J)}^{2} + \overbrace{V_4(M)}^{4} , \; \overbrace{c(N,J)}^{2} + \overbrace{V_4(N)}^{5} \} = 6 \; , \; \alpha_3^* = M$$

$$V_3(K) = \overbrace{c(N,K)}^{2} + \overbrace{V_4(N)}^{5} = 7 \; , \; \alpha_3^* = N$$

$t=2: \; s_2 \in \{ E, F, G \}$

$$A_2(s_2) = \begin{cases} \{H, I\} & , \; s_2 = E \\ \{I, J\} & , \; s_2 = F \\ \{J, K\} & , \; s_2 = G \end{cases}$$

$$V_2(E) = \inf \{ \overbrace{c(H,E)}^{2} + \overbrace{V_3(H)}^{10} , \; \underline{\overbrace{c(I,E)}^{1} + \overbrace{V_3(I)}^{8}} \} = 9 \; , \; \alpha_2^* = I$$

$$V_2(F) = \inf \{ \overbrace{c(I,F)}^{1} + \overbrace{V_3(I)}^{8} , \; \underline{\overbrace{c(J,F)}^{2} + \overbrace{V_3(J)}^{6}} \} = 8 \; , \; \alpha_2^* = J$$

$$V_2(G) = \inf \{ \underbrace{c(J,G)}_{5} + \underbrace{V_3(J)}_{6} , \; \underbrace{c(K,G)}_{4} + \underbrace{V_3(K)}_{7} \} = 11 , \; \begin{cases} \alpha_2^* = J \\ \eta' \\ \alpha_2^* = K \end{cases}$$

$t=1$: $S_1 \in \{C, D\}$

$$A_1(S_1) = \begin{cases} \{E, F\}, & S_1 = C \\ \{F, G\}, & S_1 = D \end{cases}$$

$$V_1(C) = \inf\{\overbrace{c(E,C)}^{5} + \overbrace{V_2(E)}^{9},\ \overbrace{c(F,C)}^{4} + \overbrace{V_2(F)}^{8}\} = 12, \quad \alpha_1^* = F$$

$$V_1(D) = \inf\{\overbrace{c(F,D)}^{7} + \overbrace{V_2(F)}^{8},\ \overbrace{c(G,D)}^{3} + \overbrace{V_2(G)}^{11}\} = 14, \quad \alpha_1^* = G$$

$S_0 \in \{A\}$

$A_0(A) = \{C, D\}$

$t=0$: $$V_0(A) = \inf\{\underbrace{c(C,A)}_{1} + \underbrace{V_1(C)}_{12},\ \underbrace{c(D,A)}_{0} + \underbrace{V_1(D)}_{14}\} = 13, \quad \alpha_0^* = C$$

<u>έτσι</u>

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $V_0(A) = 13$ | $V_1(C) = 12$ | $V_2(F) = 8$ | $V_3(J) = 6$ | $V_4(M) = 4$ | $V_5(O) = 2$ |
| $\alpha_0^* = C$ | $\alpha_1^* = F$ | $\alpha_2^* = J$ | $\alpha_3^* = M$ | $\alpha_4^* = O$ | $\alpha_1^* = B$ |

$V_6(B) = 0$

δηλαδή έχουμε ελάχιστο κόστος για την μετάβαση από το A στο B ίσο με 13, για την ακολουθία ενεργειών $\underbrace{A \to C \to F \to J \to M \to O \to B}_{\text{η βέλτιστη πολιτική}}$

(ii) Ποια είναι η άριστη διαδρομή από το E στο B?

Ήδη την έχουμε υπολογίσει:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $V_2(E)=9$ | $V_3(I)=8$ | $V_4(M)=4$ | $V_5(O)=2$ | $V_6(B)=0$ |
| $\alpha_2^*=I$ | $\alpha_3^*=M$ | $\alpha_4^*=O$ | $\alpha_5^*=B$ | |

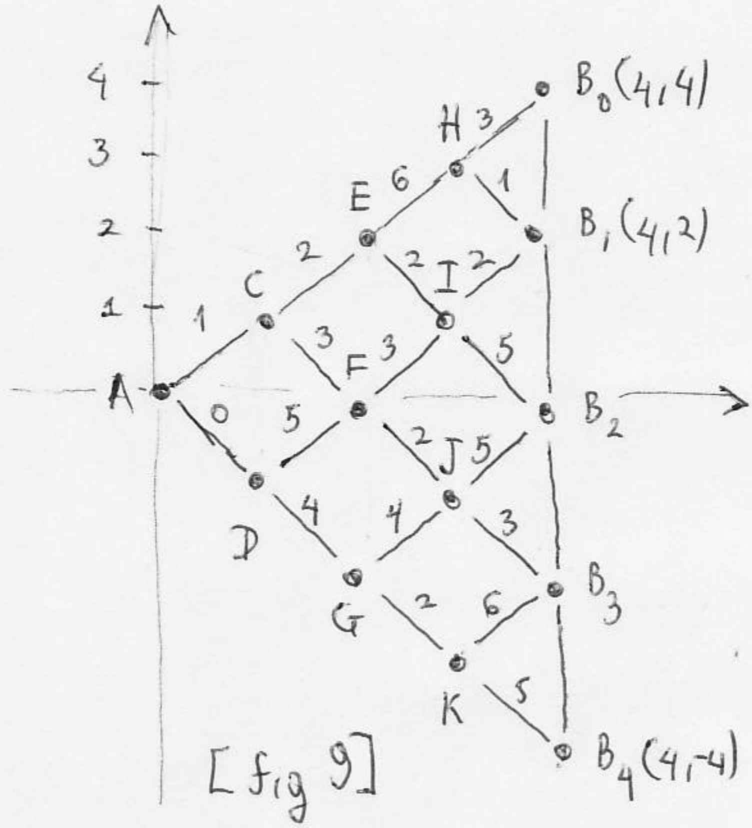
Δηλαδή: για τα actions: $E \to I \to M \to O \to B$

Παρατήρηση: Ας συγκρίνουμε την δυναμική λύση με την "απλή" λύση αριστοποίησης που προκύπτει εάν υπολογίσουμε τα κόστη όλων των δυνατών μονοπατιών από το A στο B. Επειδή το network είναι 4x4 τα δυνατά paths είναι $8!/(4!)^2 = 20$ ενώ εμείς κάναμε 15 υπολογισμούς. Στην γενική περίπτωση θα είχαμε να κάνουμε $N^2-1$ "δυναμικούς" υπολογισμούς σε σύγκριση με $[2(N-1)]!/((N-1)!)^2$ "απλών" υπολογισμών. Η διαφορά είναι ουσιώδης ήδη για $N=8 \Rightarrow N^2-1 = 63$ , $\frac{(2(N-1))!}{((N-1)!)^2} = 3,432$

Α

Πρόβλημα:

Να βρεθεί η διαδρομή ελαχίστου κόστους μεταξύ του $A(0,0)$ κ' της ευθείας $\{B_i(4, 4-2i) \mid i=0,1,2,3,4\}$




[fig 9]

Έχουμε

$$V_t(s_t) = \inf_{\alpha_t \in A_t(s_t)} \{ c_t(\alpha_t, s_t) + V_{t+1}(s_{t+1}) \}$$

όπου $s_{t+1} = s_{t+1}(\alpha_t, s_t) = \alpha_t$

κ' συνοριακές συνθήκες

$$V_4(B_i) = 0, \quad i = 0, \dots, 4.$$

$*$ $\boxed{t=3} \Rightarrow s_3 \in \{H, I, J, K\} \Rightarrow A_3(s_3) = \begin{cases} \{B_0, B_1\}, & s_3 = H \\ \{B_1, B_2\}, & s_3 = I \\ \{B_2, B_3\}, & s_3 = J \\ \{B_3, B_4\}, & s_3 = K \end{cases}$

$$V_3(H) = \inf\{ \underbrace{c(B_0, H)}_{3} + \underbrace{V_4(B_0)}_{0}, \underbrace{c(B_1, H)}_{1} + \underbrace{V_4(B_1)}_{0} \} = 1, \quad \alpha_3^* = B_1$$

$$V_3(I) = \inf\{ \underbrace{c(B_1, I)}_{2} + \underbrace{V_4(B_1)}_{0}, \underbrace{c(B_2, I)}_{5} + \underbrace{V_4(B_2)}_{0} \} = 2, \quad \alpha_3^* = B_1$$

$$V_3(J) = \inf\{ \underbrace{c(B_2, J)}_{} + \underbrace{V_4(B_2)}_{0}, \underbrace{c(B_3, J)}_{3} + \underbrace{V_4(B_3)}_{0} \} = 3, \quad \alpha_3^* = B_3$$

$$V_3(K) = \inf\{ \underbrace{c(B_3, K)}_{6} + \underbrace{V_4(B_3)}_{0}, \underbrace{c(B_4, K)}_{5} + \underbrace{V_4(B_4)}_{0} \} = 5, \quad \alpha_3^* = B_4$$

$*$ $\boxed{t=2} \Rightarrow s_2 \in \{E, F, G\} \Rightarrow A_2(s_2) = \begin{cases} \{H, I\}, & s_2 = E \\ \{I, J\}, & s_2 = F \\ \{J, K\}, & s_2 = G \end{cases}$

$V_2(E) = 4, \quad \alpha_2^* = I$

$V_2(F) = 5, \quad \alpha_2^* \in \{I, J\}$

$V_2(G) = 7, \quad \alpha_2^* \in \{J, K\}$

$\boxed{t=1} \Rightarrow S_2 \in \{C, D\} \Rightarrow A_1(S_1) = \begin{cases} \{E, F\}, & S_1 = C \\ \{F, G\}, & S_1 = D \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} V_1(C) = 6, & \alpha_1^* = E \\ V_1(D) = 10, & \alpha_1^* = F \end{cases}$

$\boxed{t=0} \Rightarrow S_0 \in \{A\}, \quad A_1(S_0) = \{C, D\}, \; S_0 = A \Rightarrow$

$\Rightarrow V_0(A) = 7, \; \alpha_0^* = C$

<u>Για την βέλτιστη πολιτική έχουμε:</u>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $V_0(A) = 7$ | $V_1(C) = 6$ | $V_2(E) = 4$ | $V_3(I) = 2$ | $V_4(B_1) = 0$ |
| $\alpha_0^* = C$ | $\alpha_1^* = E$ | $\alpha_2^* = I$ | $\alpha_3^* = B_1$ | |

<u>Παρατήρηση:</u> Εαν $S_t = (x, y) \Rightarrow \alpha_t \in \{(x+1, y+1), (x+1, y-1)\}$

Εαν λοιπόν <u>θέσουμε:</u>

$\begin{cases} u(x,y) = C((x+1, y+1), (x,y)) = \text{κόστος μεταξύ των κορυφών } (x,y) \text{ κ' } (x+1, y+1) \\ d(x,y) = C((x+1, y-1), (x,y)) = \text{κόστος μεταξύ των κορυφών } (x,y) \text{ κ' } (x+1, y-1) \end{cases}$

η <u>επαναληπτική σχέση του προηγούμενου προβλήματος</u> <u>γίνεται:</u>

Το ελάχιστο κόστος μεταξύ της κορυφής $(x,y)$ κ' $\{B_i\}$

$$V(x,y) = \min\{u(x,y) + V(x+1, y+1), \; d(x,y) + V(x+1, y-1)\}$$

<u>με:</u> $V(4, 4-2i) = 0, \quad i = 0, \ldots, 4$

με τον προηγούμενο συμβολισμό η <u>βέλτιστη πολιτική</u> <u>μετατρέπεται σε:</u> $(0,0) \xrightarrow{u} (1,1) \xrightarrow{u} (2,2) \xrightarrow{d} (3,1) \xrightarrow{u} (4,2)$

Σε όλα τα προηγούμενα οι επαναληπτικές μας σχέσεις δούλευαν προς τα πίσω (backward). Στα επόμενα θα ορίσουμε επαναληπτική μέθοδο εύρεσης του ελαχίστου κόστους προς τα εμπρός (forward).

Τώρα το $V(x,y)$ = το ελάχιστο κόστος μεταξύ της κορυφής $A(0,0)$ κ' $(x,y)$

$$\begin{tikzcd}
M(x-1,y+1) \arrow[dr, "d"] & \\
& Q(x,y) \\
N(x-1,y-1) \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

Το άριστο κόστος έως το M

το άριστο κόστος έως το N

$$V(Q) = \min\{C(M,Q)+V(M),\ C(N,Q)+V(N)\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} V(x,y) = \min\{d(x,y)+V(x-1,y+1),\ u(x,y)+V(x-1,y-1)\} \\ d(x,y) = C((x-1,y+1),(x,y)) \\ u(x,y) = C((x-1,y-1),(x,y)) \qquad ; \ V(0,0)=0 \end{cases}$$

<u>Παρατηρούμε ότι</u> $V(Q) = \min\limits_{\alpha\in\{M,N\}} \{C(\alpha,Q)+V(\alpha)\}$

$$\Updownarrow$$

$$V_t(s_t) = \inf_{\alpha_{t-1}\in A_{t-1}(s_{t-1})} \{C(\alpha_{t-1},s_t)+V_{t-1}(\alpha_{t-1})\}$$

Πρόβλημα:

Να βρεθεί η διαδρομή ελαχίστου κόστους στο [fig 9] με forward δυναμικούς υπολογισμούς.

$t=1$: $V(C) = C(A,C) + V(A) = 1$, $\alpha_1^* = A$

$V(D) = C(A,D) + V(A) = 0$, $\alpha_1^* = A$

$t=2$: $V(E) = C(C,E) + V(C) = 3$, $\alpha_2^* = C$

$V(F) = \min\{C(C,F)+V(C),\ C(D,F)+V(D)\} = 4$, $\alpha_2^* = C$

$V(G) = C(D,G) + V(D) = 4$, $\alpha_2^* = D$.

$t=3$: $V(H) = C(E,H) + V(E)$, $\alpha_3^* = E$.

$V(I) = \min\{C(E,I)+V(E),\ C(F,I)+V(F)\} = 5$, $\alpha_3^* = E$

$V(J) = \min\{C(F,J)+V(F),\ C(G,J)+V(G)\} = 6$, $\alpha_3^* = F$

$V(K) = C(G,K) + V(G) = 6$, $\alpha_3^* = G$

$t=4$: $V(B_0) = C(H,B_0) + V(H) = 12$ $\alpha_4^* = H$

$V(B_1) = \min\{C(H,B_1)+V(H),\ C(I,B_1)+V(I)\} = 7$, $\alpha_4^* = I$

$V(B_2) = \min\{C(I,B_2)+V(I),\ C(J,B_2)+V(J)\} = 10$, $\alpha_4^* = I$

$V(B_3) = \min\{C(J,B_3)+V(J),\ C(K,B_3)+V(K)\} = 9$, $\alpha_4^* = J$

$V(B_4) = C(K,B_4) + V(K) = 11$, $\alpha_4^* = K$

Βέλτιστη πολιτική: $A \to C \to E \to I \to B_1$