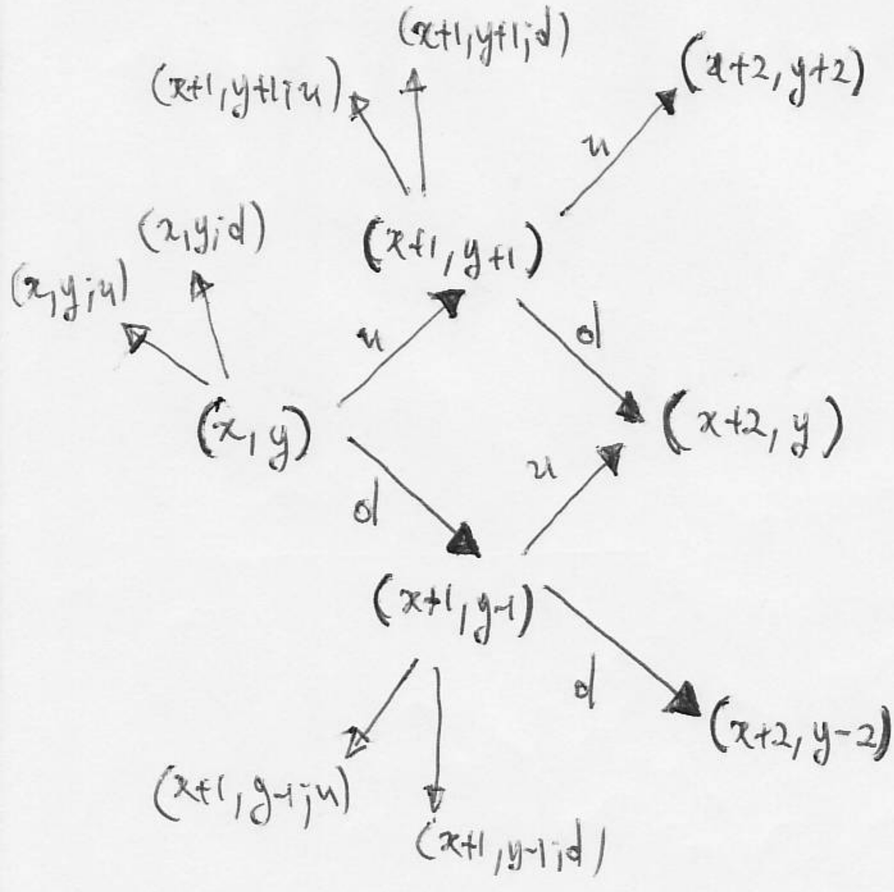
Μια πολυδιάστατη βέλτιστη συν/ση. [Penalty Network]

Πάλι θα χρησιμοποιήσουμε το Network στο [fig 9]. Για λόγους ασφαλείας αποφεύγουμε να κάνουμε μετάβαση από την μία κορυφή στην άλλη με την ίδια διεύθυνση. Θέτουμε λοιπόν penalty 2 όταν ακολουθούμε κορυφή με την ίδια διεύθυνση.

Από την τοπολογία του Network στο [fig 9] σε κάθε επανάληψη έχουμε 2 καταστάσεις (για το backward σχήμα) είτε u (up) είτε d (down). Όμως τώρα η βέλτιστη συν/ση V παίρνει κ' τις τιμές της διεύθυνσης που είναι κ' αυτές u και d σύμφωνα με το παρακάτω διάγραμμα:



$(x, y; u)$ = ξεκινάω από το (x,y) αλλά προς τα πάνω

$(x, y; d)$ = ξεκινάω από το (x,y) αλλά προς τα κάτω.

$$\min \begin{cases} V_t(s_t;u) = \underbrace{c(a_t^u, s_t)}_{u(x,y)} + \min\{ V_{t+1}(\overset{s_{t+1}^u}{a_t^u};u) + \overset{\text{penalty}}{2},\ V_{t+1}(a_t^u;d)\} \\ V_t(s_t;d) = \underbrace{c(a_t^d, s_t)}_{d(x,y)} + \min\{ V_{t+1}(\underset{s_{t+1}^d}{a_t^d};u),\ V_{t+1}(a_t^d;d) + \underset{\text{penalty}}{2}\} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

για ευκολία στον συμβολισμό δεν χρησιμο-ποιούμε υπο-δείκτες στην V.

$$(14{\cdot}1):\quad \min \begin{cases} V(x,y;u) = u(x,y) + \min\{V(x+1,y+1;u)+2,\ V(x+1,y+1;d)\} \\ V(x,y;d) = d(x,y) + \min\{V(x+1,y-1;u),\ V(x+1,y-1;d)+2\} \end{cases}$$

<u>με συνοριακές συνθήκες</u> $\begin{cases} V(B_i;u) = V(B_i;d) = 0, \\ 0 \le i \le 4. \end{cases}$ $t=4$

<u>$t=3$</u>:

$$\min \begin{cases} V(H;u) = 3 + \min\{V(B_0;u)+2,\ V(B_0;d)\} = 3 \\ V(H;d) = 1 + \min\{V(B_1;u),\ V(B_1;d)+2\} = 1 \end{cases}$$

$$\min \begin{cases} \boxed{V(I;u) = 2 + \min\{V(B_1;u)+2,\ V(B_1;d)\} = 2} \quad \boxed{a_3^* = B_1} \\ V(I;d) = 5 + \min\{V(B_2;u),\ V(B_2;d)+2\} = 5 \end{cases}$$

$$\min \begin{cases} V(J;u) = 5 \\ \boxed{V(J;d) = 3} \quad \boxed{a_3^* = B_3} \end{cases}$$

$$\min \begin{cases} V(K;u) = 6 \\ \boxed{V(K;d) = 5} \quad \boxed{a_3^* = B_4} \end{cases}$$

$\underline{t=2}$:
$$\min\begin{cases} V(E;u) = 6 + \min\{\overbrace{V(H;u)+2}^{3}, \overbrace{V(H;d)}^{1}\} = 7 \\ \boxed{V(E;d) = 2 + \min\{\overbrace{V(I;u)}^{2}, \overbrace{V(I;d)+2}^{5}\} = 4} \end{cases} \quad \boxed{a_2^* = I}$$

$$\min\begin{cases} \boxed{V(F;u) = 3 + \min\{\overbrace{V(I;u)+2}^{2}, \overbrace{V(I;d)}^{5}\} = 5} \\ V(F;d) = 2 + \min\{\overbrace{V(J;u)}^{5}, \overbrace{V(J;d)+2}^{3}\} = 7 \end{cases} \quad \boxed{\alpha_2^* = I}$$

$$\min\begin{cases} \boxed{V(G;u) = 4 + \min\{V(J;u)+2, V(J;d)\} = 7} \\ V(G;d) = 2 + \min\{V(K;u), V(K;d)+2\} = 8 \end{cases} \quad \boxed{\alpha_2^* = J}$$

$\underline{t=1}$:
$$\min\begin{cases} \boxed{V(C;u) = 2 + \min\{V(E;u)+2, V(E;d)\} = 6} \\ V(C;d) = 3 + \min\{V(F;u), V(F;d)+2\} = 8 \end{cases} \quad \boxed{a_1^* = E}$$

$$\min\begin{cases} V(D;u) = 5 + \min\{V(F;u)+2, V(F;d)\} = 12 \\ \boxed{V(D;d) = 4 + \min\{V(G;u), V(G;d)+2\} = 11} \end{cases} \quad \boxed{\alpha_1^* = G}$$

$\underline{t=0}$:
$$\min\begin{cases} \boxed{V(A;u) = 1 + \min\{V(C;u)+2, V(C;d)\} = 9} \\ V(A;d) = 0 + \min\{V(D;u), V(D;d)+2\} = 12 \end{cases} \quad \boxed{a_0^* = C}$$

<u>έτσι η βέλτιστη πολιτική είναι:</u>

$V_0(A;u) = 9$	$V_1(C;u) = 6$	$V_2(E;d) = 4$	$V_3(I;u) = 2$	$V_4(B_1) = 0$
$\alpha_0^* = C$	$\alpha_1^* = E$	$\alpha_2^* = I$	$\alpha_3^* = B_1$	

$\square$

Άσκηση Να βρεθεί το σχήμα των forward επαναλή-ψεων που αντιστοιχεί στην σχέση (14.1).

$$
\begin{tikzcd}
J(x-2,y+2) \arrow[dr, "d"] & & & \\
& M(x-1,y+1) \arrow[dr, "d"] & & {} \\
K(x-2,y) \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "d"'] & & Q(x,y) \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "d"'] & \\
& N(x-1,y-1) \arrow[ur, "u"'] & & {} \\
L(x-2,y-2) \arrow[ur, "u"] & & &
\end{tikzcd}
$$

η προηγούμενη περίοδος είναι M

$$
\min \begin{cases} V(Q;d) = c(M,Q) + \min\{V(M;u),\ V(M;d)+2\} \\[2ex] V(Q;u) = c(N,Q) + \min\{V(N;u)+2,\ V(N;d)\} \end{cases}
$$

η προηγούμενη περίοδος είναι N

$$\Downarrow$$

$$
\min \begin{cases} V(x,y;d) = d(x,y) + \min\{V(x-1,y+1;u),\ V(x-1,y+1;d)+2\} \\[2ex] V(x,y;u) = u(x,y) + \min\{V(x-1,y-1;u)+2,\ V(x-1,y-1;d)\} \end{cases}
$$

□