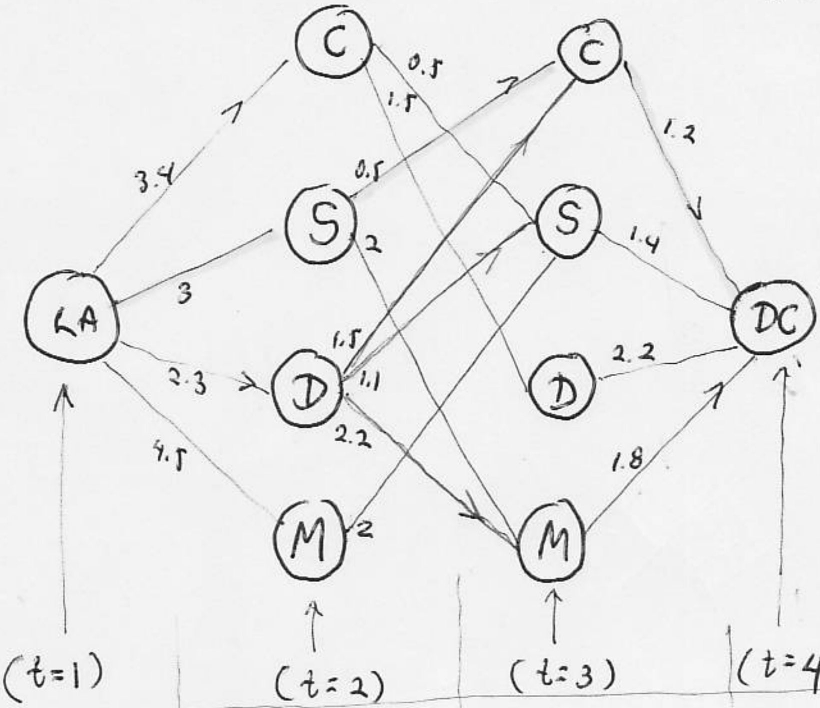
ΠΡΟΒΛΗΜΑ NETWORK



$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$S_1 = \{LA\}$	$S_2 = \{C, S, D, M\}$	$S_3 \in \{C, S, D, M\}$	$S_4 = \{DC\}$
$A_2(LA) = \{C, S, D, M\}$	$A_2(C) = \{S, D\}$	$A_3(C) = \{DC\}$	$A_4(s_4) = A_4(DC) = \emptyset$
	$A_2(S) = \{C, M\}$	$A_3(S) = \{DC\}$	
	$A_2(D) = \{C, S, M\}$	$A_3(D) = \{DC\}$	
	$A_2(M) = \{S\}$	$A_3(M) = \{DC\}$	
	$A_2(S_2)$	$A_3(S_3)$	

Προσοχή!

Εδώ έχουμε:

$$s_{t+1} = s_{t+1}(\alpha_t, s_t) \equiv \alpha_t$$

$$V_4(s_4) = 0$$

$$V_3(s_3) = \inf_{\alpha_3 \in A_3(s_3)} \Big\{ c_3(\alpha_3, s_3) + \underbrace{V_4(s_4(\overbrace{\alpha_3, s_3}^{\alpha_3}))}_{0} \Big\} = \inf_{\alpha_3 \in \{DC\}} \Big\{ c_3(\alpha_3, s_3) \Big\}$$

$$= c_3(DC, s_3) = \begin{cases} c_3(DC, C) = 1.2\ ;\ s_3 = C \\ c_3(DC, S) = 1.4\ ;\ s_3 = S \\ c_3(DC, D) = 2.2\ ;\ s_3 = D \\ c_3(DC, M) = 1.8\ ;\ s_3 = M \end{cases} \underset{\alpha_3^* = DC}{=} \begin{cases} V_3(C) = 1.2 \quad C \longrightarrow DC \\ V_3(S) = 1.4 \\ V_3(D) = 2.2 \\ V_3(M) = 1.8 \end{cases}$$

$$V_2(s_2) = \inf_{\alpha_2 \in A_2(s_2)} \Big\{ c_2(\alpha_2, s_2) + \underbrace{V_3(s_3)}_{V_3(s_3(\underbrace{\alpha_2, s_2}_{\alpha_2}))} \Big\} = \begin{cases} \inf_{\alpha_2 \in \{S, D\} = A_2(C)} \Big\{ c_2(\alpha_2, C) + V_3(\overbrace{s_3(\alpha_2, C)}^{\alpha_2}) \Big\},\ s_2 = C \\ \inf_{\alpha_2 \in \{C, M\} = A_2(S)} \Big\{ c_2(\alpha_2, S) + V_3(\overbrace{s_3(\alpha_2, S)}^{\alpha_2}) \Big\},\ s_2 = S \\ \inf_{\alpha_2 \in \{C, S, M\}} \Big\{ c_2(\alpha_2, D) + V_3(s_3(\alpha_2, D)) \Big\},\ s_2 = D \\ \inf_{\alpha_2 \in \{S\}} \Big\{ c_2(\alpha_2, M) + V_3(s_3(\alpha_2, M)) \Big\},\ s_2 = M \end{cases}$$

$$
= \begin{cases}
\inf\{\overbrace{c_2(S,C)}^{0.5} + \overbrace{V_3(S)}^{1.4},\ \overbrace{c_2(D,C)}^{1.5} + \overbrace{V_3(D)}^{2.2}\} = 1.9 = V_2(C) & \alpha_2^* = S \\
\inf\{\overbrace{c_2(C,S)}^{0.5} + \overbrace{V_3(C)}^{1.2},\ \overbrace{c_2(M,S)}^{2.0} + \overbrace{V_3(M)}^{1.8}\} = 1.7 = V_2(S) & \alpha_2^* = C \quad S \to C \\
\inf\{\overbrace{c_2(C,D)}^{1.5} + \overbrace{V_3(C)}^{1.2},\ \overbrace{c_2(S,D)}^{1.1} + \overbrace{V_3(S)}^{1.4},\ \overbrace{c_2(M,D)}^{2.2} + \overbrace{V_3(M)}^{1.8}\} = 2.7 = V_2(D) & \alpha_2^* = S \\
\overbrace{c_2(S,M)}^{2.0} + \overbrace{V_3(S)}^{1.4} = 3.4 = V_2(M) & \alpha_2^* = S
\end{cases}
$$

$$V_1(s_1) = \inf_{\alpha_1 \in A_1(s_1)} \{ c_1(\alpha_1, s_1) + V_2(\overbrace{s_2(\alpha_1, s_1)}^{\alpha_1}) \}$$

$\Downarrow$ επειδή: $s_1 \in S_1' = \{LA\} \Rightarrow A_1(s_1) = \{C, S, D, M\}$

$$V_1(LA) = \inf_{\alpha_1 \in \{C,S,D,M\}} \{ c_1(\alpha_1, LA) + V_2(\alpha_1) \}$$

$$= \inf\{ \underbrace{c_1(C,LA)}_{3.4} + \underbrace{V_2(C)}_{1.9},\ \underbrace{c_1(S,LA)}_{3.0} + \underbrace{V_2(S)}_{1.7},$$

$$\underbrace{c_1(D,LA)}_{2.3} + \underbrace{V_2(D)}_{2.7},\ \underbrace{c_1(M,LA)}_{4.5} + \underbrace{V_2(M)}_{3.4} \} = 4.7 \Rightarrow LA \to S \qquad \alpha_1^* = S$$

Therefore (i) the optimal cost is 4.7

(ii) the optimal trajectory (που εδώ είναι μοναδική)

$$\underbrace{LA \to S \to C \to DC}_{\text{η άριστη "πολιτική"}}$$

$V_1(LA) = 4.7$	$V_2(S) = 1.7$	$V_3(C) = 1.2$	$V_4(DC) = 0$
$\alpha_1^* = S$	$\alpha_2^* = C$	$\alpha_3^* = DC$	

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ UTILITY

Έστω φοιτητής που εξασφαλίζη από τούς γονής του ένα σταθερο ποσό M για να το καταναλώση στο παν/μιο σε διάστημα 4 ετών.

Η χρησιμότητα απο την κατανάλωση που αντιμετωπίζη ο φοιτητής είναι $u(c)=\sqrt{c}$ και δίνεται το discount factor $0<\beta=(1+r)^{-1}<1$ <u>Ποιός ο βέλτιστος καταμερισμός των πόρων</u> (optimal allocation of resources) <u>στα 4 χρόνια των σπουδών</u>? [Υποθέτουμε ότι ο φοιτητής δεν έχει επιπρόσθετο εισόδημα κ' ότι θα πρέπει να χρησιμοποιήση όλο το ποσό M.]

Θα λύσουμε το πρόβλημα οπισθοδρομικά όπως κ' στα Network. Δηλαδή θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Bellman (optimality equation) ή dynamic programming equation. (DPE)

$$V_t(s_t) = \sup_{a_t \in A_t(s_t)} \left\{ \underbrace{b_t(a_t, s_t)} + \beta V_{t+1}\left(S_{t+1}(a_t, s_t)\right) \right\}$$

Η ευχαρίστηση που αποκομίζη ο καταναλωτής (<u>benefit</u>)

Το maximum utility την χρονική στιγμή t

Το σύνολο των δυνατών αποφάσεων την χρονική στιγμή t είναι συν/ση της κατάστασης s_t που βρίσκεται το δυναμικό σύστημα (ΔΣ) την χρονική στιγμή t.

Η κατάσταση που βρίσκεται το ΔΣ την επόμενη χρονική στιγμή είναι συν/ση της κατάστασης που βρισκόταν το ΔΣ την στιγμή t καθώς κ' της απόφασης την στιγμή t.

Τι όμως σημαίνει κατάσταση (state s_t), απόφαση (action $= \alpha_t$) κ' όφελος (b_t = benefit) για το ΔΣ ?

- <u>state s_t</u> = το ποσό των χρημάτων που έχουν απομείνει σε χρόνο t.
- <u>action α_t</u> = το ποσό των χρημάτων που θα καταναλωθούν την περίοδο t.

$A_t(s_t)$ = το σύνολο των δυνατών actions (αποφάσεων) όταν το ΔΣ βρίσκεται στην κατάσταση s_t
$= [0, s_t]$

- <u>benefit</u> b_t = η χρησιμότητα (ευχαρίστηση) του καταναλωτή από την κατανάλωση πόρων.

Αρχίζουμε την λύση την περίοδο $t=4$ $\Rightarrow$ Ο φοιτητής θα ξοδέψει όλα τα λεφτά που του απομένουν
<u>οπότε</u>:

$$V_4(s_4) = \sqrt{s_4} \qquad : (4.1)$$

$$V_3(s_3) = \sup_{\alpha_3 \in [0, s_3]} \left\{ \underbrace{b_3(\alpha_3, s_3)}_{b_3(\alpha_3)} + \beta V_4\big(\underbrace{s_4(\alpha_3, s_3)}_{s_3 - \alpha_3}\big) \right\} :$$

$$= \sup_{0 \le \alpha_3 \le s_3} \left\{ \sqrt{\alpha_3} + \beta \sqrt{s_3 - \alpha_3} \right\} \qquad : (4.2)$$

$$= f_1(\alpha_3^*, s_3) = \sqrt{(1+\beta^2) s_3}$$

<u>όπου</u>: $f_1(\alpha_3, s_3) = \sqrt{\alpha_3} + \beta\sqrt{s_3 - \alpha_3}$ <u>και</u> $\alpha_3^* = \overbrace{\arg\max_{\alpha_3 \in [0, s_3]} f_1(\alpha_3, s_3)}^{\frac{s_3}{1+\beta^2}}$

$$\begin{cases} V_2(s_2) = \sup\limits_{0 \le \alpha_2 \le s_2} \left\{ \sqrt{\alpha_2} + \beta \underbrace{\sqrt{(1+\beta^2)(s_2-\alpha_2)}}_{V_3(s_3) = V_3(s_2-\alpha_2)} \right\} = f_2(\alpha_2^*, s_2) \\ \underline{\text{θέτοντας}} \quad f_2(\alpha_2, s_2) = \sqrt{\alpha_2} + \beta\sqrt{(1+\beta^2)(s_2-\alpha_2)} \\ \underline{\text{βρίσκουμε}} \quad \alpha_2^* = \arg\max\limits_{\alpha_2 \in [0, s_2]} f_2(\alpha_2, s_2) = \dfrac{s_2}{1+\beta^2+\beta^4} \quad : (5.1) \\ \underline{\text{έτσι}}: \quad V_2(s_2) = \sqrt{(1+\beta^2+\beta^4)s_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1(s_1) = \sup\limits_{0 \le \alpha_1 \le s_1 = M} \left\{ \sqrt{\alpha_1} + \beta \overbrace{\sqrt{(1+\beta^2+\beta^4)(s_1-\alpha_1)}}^{V_2(s_2) = V_2(s_1-\alpha_1)} \right\} \\ f_3(\alpha_1, s_1) = \sqrt{\alpha_1} + \beta\sqrt{(1+\beta^2+\beta^4)(s_1-\alpha_1)} \\ \text{με} \quad \alpha_1^* = \dfrac{S_1}{1+\beta^2+\beta^4+\beta^6} \quad ; \quad S_1 = M \quad : (5.2) \end{cases}$$

$$V_1(S_1) = V_1(M) = \sqrt{(1+\beta^2+\beta^4+\beta^6)\, M}$$

<u>π.χ</u>

για $\beta = 0.9 \Rightarrow \alpha_1^* \approx \dfrac{M}{3}$ { δηλαδή ο φοιτητής δαπανά το 1/3 του συνολικού ποσού την πρώτη περίοδο.

$$(5.2) \Rightarrow s_2^* = \overbrace{M - \frac{M}{1+\beta^2+\beta^4+\beta^6}}^{s_1^* - \alpha_1^*} \stackrel{(5.1)}{\Longrightarrow} \alpha_2^* = \frac{M\beta^2}{1+\beta^2+\beta^4+\beta^6}$$

$$\Rightarrow s_3^* = s_2^* - \alpha_2^* = \frac{M\beta^4(1+\beta^2)}{1+\beta^2+\beta^4+\beta^6} \Rightarrow \alpha_3^* = \frac{M\beta^4}{1+\beta^2+\beta^4+\beta^6}$$

$$\Rightarrow s_4^* = s_3^* - \alpha_3^* \quad \Rightarrow \alpha_4^* = s_4^*$$

□

Παρατήρηση :

$$\alpha_3^* = \frac{S_3}{1+\beta^2} = g(s_3;\beta) \Rightarrow \alpha_2^* = g(S_2;\beta\sqrt{1+\beta^2}) = \frac{S_2}{1+\beta^2+\beta^4}$$

$$\Rightarrow \alpha_1^* = g(S_1;\beta\sqrt{1+\beta^2+\beta^4}) = \frac{S_1}{1+\beta^2+\beta^4+\beta^6};\ S_1 = M$$

$$\begin{cases} S_1^* = M = \text{όλο το ποσό} \\ \alpha_1^* = \frac{S_1^*}{\gamma} = \frac{M}{\gamma}\ ;\ \gamma = 1+\beta^2+\beta^4+\beta^6 \end{cases} \leftarrow 1^{\eta} \text{ άριστη ενέργεια}$$

$$\begin{cases} S_2^* = S_1^* - \alpha_1^* = M - M/\gamma = \frac{\beta^2(1+\beta^2+\beta^4)}{\gamma}\cdot M \\ \alpha_2^* = \frac{S_2^*}{1+\beta^2+\beta^4} = \frac{\beta^2}{\gamma}\cdot M \end{cases} \leftarrow 2^{\eta} \text{ άριστη ενέργεια}$$

$$\begin{cases} S_3^* = S_2^* - \alpha_2^* = \frac{\beta^4(1+\beta^2)}{\gamma}\cdot M \\ \alpha_3^* = \frac{S_3^*}{1+\beta^2} = \frac{\beta^4}{\gamma} M \end{cases} \leftarrow 3^{\eta} \text{ άριστη ενέργεια}$$

$$\begin{cases} S_4^* = S_3^* - \alpha_3^* = \frac{\beta^6}{\gamma} M \\ \alpha_4^* = S_4^* - 0 = \frac{\beta^6}{\gamma} M \end{cases} \leftarrow \text{τελική άριστη ενέργεια}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Έτσι η βέλτιστη πολιτική παίρνει τη μορφή} \\ \alpha_t^* = \gamma^{-1}\cdot\beta^{2(t-1)}\cdot M,\quad t=1,2,3,4,\quad \gamma = \sum_{i=0}^{3}\beta^{2i} \end{array}}$$

$$\alpha_t^* = \alpha_t^*(t,\beta,M)$$

Άσκηση: Θέστε στο προηγούμενο πρόβλημα $b_t(\alpha_t, s_t) = \ln(\alpha_t)$ τότε:

Έχουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\begin{cases} V_t(s_t) = \sup\limits_{0 \le \alpha_t \le s_t} \left\{ \ln(\alpha_t) + \beta V_{t+1}(s_t - \alpha_t) \right\} \\ V_5(s_5) = 0 \quad \text{και} \quad 1 \le t \le 4. \end{cases}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΠΟΓΡΑΦΗΣ (Inventory)

Έστω ότι η ζήτηση είναι γνωστή για τις επόμενες 4 περιόδους.

Η εταιρεία θα πρέπει να αποφασίσει (actions) πόσες μονάδες παραγωγής θα πρέπει να παράγει ανά περίοδο.

* Η δυνατότητες παραγωγής είναι περιορισμένες
* Σε κάθε περίοδο υπάρχουν σταθερά κ' μεταβλητά κόστη (FC κ' VC αντίστοιχα)
* Η εταιρεία έχει περιορισμένες δυνατότητες αποθήκευσης των παραγομένων μονάδων.
* Η εταιρεία έχει κόστη αποθήκευσης.

t	Ζήτηση D_t
1	2
2	3
3	3
4	4

αρχή περιόδου t

↓

απόφαση για την παραγωγή (α_t) αριθμού μονάδων

↙ FC ↘ VC

FC ↓

Δίνουν το έναυσμα για παραγωγή σε 1 περίοδο περισσοτέρων της ζήτησης μονάδων κ' να τις αποθηκεύσει για να αποφύγει τα αντίστοιχα FCs. Έστω ότι παράγει S_t μονάδες.

→ Η αποθήκευση έχει κόστος ανά μονάδα παραγωγής

↓

Το κέρδος θα είναι μεγαλύτερο όσο λιγότερες μονάδες παραγωγής αποθηκευτούν

Το <u>DPI</u> παίρνει την μορφή:

$$\begin{cases} V_t(s_t) = \inf\limits_{\alpha_t \in A_t(s_t)} \left\{ C_t(\alpha_t, s_t, D_t) + V_{t+1}(s_{t+1}(\alpha_t, s_t, D_t)) \right\} \quad (7.1) \\ \alpha_t = \text{actions} = \#\text{ μονάδων παραγωγής την } t \text{ περίοδο} \\ s_t = \text{state} = \#\text{ των αποθηκευμένων μονάδων την } t \text{ περίοδο} \end{cases}$$

$$C_t(\alpha_t, s_t, D_t) = \overbrace{K + p\cdot\alpha_t}^{c(\alpha_t) = \text{κόστος παραγωγής}} + \overbrace{h\cdot(s_t + \alpha_t - D_t)}^{I(\alpha_t, s_t) = \text{κόστος αποθήκευσης}}$$

K → σταθερό κόστος παραγωγής

p → κόστος <u>ανά μονάδα</u> παραγωγής

$h\cdot(s_t+\alpha_t-D_t)$ → κόστος αποθήκευσης <u>ανά μονάδα</u> παραγωγής

$$s_{t+1}(\alpha_t, s_t, D_t) = s_t + \alpha_t - D_t \quad \underline{\text{και}} \quad \boxed{s_1 = s_5 = 0}$$

<u>Δίνεται ότι:</u>

Το inventory για $t=1$ είναι 0 δηλαδή $s_1=0$

K = (ανεξάρτητο του t) = 5

p = 2

h = (κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα) = 0.5

$\overline{q}$ = (το παραγωγικό όριο) = 5

$\overline{I}$ = (η χωρητικότητα αποθήκευσης) = 3

<u>$t=4$</u> ⇒ Απλά ικανοποιούμε την ζήτηση για $t=4$

Εάν ο αριθμός των αποθηκευμένων μονάδων είναι s_4 τότε θα πρέπει να παραχθούν $\alpha_4 = D_4 - s_4 = 4 - s_4$ μονάδες για να καλυφθεί η ζήτηση $\boxed{s_5 = s_4 + \alpha_4 - D_4 = 0}$ ⇒

$$\Rightarrow V_4(s_4) = K + p\cdot\alpha_4 = K + p(D_4 - s_4) = 13 - 2s_4 \quad 0 \le s_4 \le \overline{I}$$

$$\Rightarrow V_4(s_4) = \begin{cases} 13, & s_4 = 0, \ \alpha_4^* = 4 \\ 11, & s_4 = 1, \ \alpha_4^* = 3 \\ 9, & s_4 = 2, \ \alpha_4^* = 2 \\ 7, & s_4 = 3, \ \alpha_4^* = 1 \end{cases} \qquad s_4 + \alpha_4^* - D_4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_4^* = 4 - s_4}$$

$\underline{\underline{t=3}}$:

$$\Rightarrow \boxed{s_3 = 0} \Rightarrow \left.\begin{array}{lll} \alpha_3 = 0 \Rightarrow s_4 = \overbrace{0+0-3}^{s_3+\alpha_3-D_3} < 0 & \text{n.α.} \\ \alpha_3 = 1 \Rightarrow s_4 = 0+1-3 < 0 & \text{n.α.} \\ \alpha_3 = 2 \Rightarrow s_4 = 0+2-3 < 0 & \text{n.α.} \\ \alpha_3 = 3 \Rightarrow s_4 = 0+3-3 = 0 \\ \alpha_3 = 4 \Rightarrow s_4 = 0+4-3 = 1 \\ \alpha_3 = 5 \Rightarrow s_4 = 0+5-3 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

(Διότι $0 \le s_4 \le 3$)

$$\Rightarrow A_3(0) = \{3,4,5\} = \left\{\begin{array}{l}\text{σύνολο των δυνατών αποφάσεων} \\ \text{για } t=3 \text{ κ' state} = s_3 = 0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow V_3(0) = \inf_{\alpha_3 \in \{3,4,5\}} \left\{ \underbrace{C(\alpha_3, 0, 3)}_{K + p\alpha_3 + h(0+\alpha_3-3)} + V_4(s_4) \right\} =$$

$$= \inf \begin{cases} 24.0, & \alpha_3 = 3 \\ 24.5, & \alpha_3 = 4 \\ 25.0, & \alpha_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_3(0) = 24 \quad \text{και} \quad \alpha_3^* = 3}$$

the optimal action για $s_3 = 0$

$$\boxed{s_3 = 1} \Rightarrow \left.\begin{array}{lll} \alpha_3 = 0 \Rightarrow s_4 = 1+0-3 < 0 & \text{n.α} \\ \alpha_3 = 1 \Rightarrow s_4 = 1+1-3 < 0 & \text{n.α} \\ \alpha_3 = 2 \Rightarrow s_4 = 1+2-3 = 0 \\ \alpha_3 = 3 \Rightarrow s_4 = 1 \\ \alpha_3 = 4 \Rightarrow s_4 = 2 \\ \alpha_3 = 5 \Rightarrow s_4 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$(0 \le s_4 \le 3)$

$$\Rightarrow A_3(1) = \{2,3,4,5\}$$

$$\Rightarrow V_3(1) = \inf_{\alpha_3 \in \{2,3,4,5\}} \{ \underbrace{C_3(\alpha_3,1,3)}_{K+p\alpha_3+h(1+\alpha_3-3)} + V_4(S_4) \} =$$

$$= \inf \left\{ \begin{array}{l} C(2) + h\cdot 0 + V_4(0) = 22.0 \\ C(3) + h\cdot 1 + V_4(1) = 22.5 \\ C(4) + h\cdot 2 + V_4(2) = 23.0 \\ C(5) + h\cdot 3 + V_4(3) = 23.5 \end{array} \right\} = 22.0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_3(1) = 22 \quad \text{και} \quad \alpha_3^* = 2}$$

$$\boxed{S_3 = 2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha_3 = 0 \Rightarrow S_4 < 0 \quad \text{n.α} \\ \alpha_3 = 1 \Rightarrow S_4 = 0 \\ \alpha_3 = 2 \Rightarrow S_4 = 1 \\ \alpha_3 = 3 \Rightarrow S_4 = 2 \\ \alpha_3 = 4 \Rightarrow S_4 = 3 \\ \alpha_3 = 5 \Rightarrow S_4 = 4 \geq \overline{I} \quad \text{n.α} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\Rightarrow A_3(2) = \{1,2,3,4\} \Rightarrow \boxed{V_3(2) = 20 \quad \text{και} \quad \alpha_3^* = 1}$$

$$\boxed{S_3 = 3} \Rightarrow A_3(3) = \{0,1,2,3\} \Rightarrow \boxed{V_3(3) = 13 \quad \text{και} \quad \alpha_3^* = 0}$$

<u>Δηλαδή</u>:
$$V_3(s_3) = \left\{ \begin{array}{lll} 24, & s_3 = 0, & \alpha_3^* = 3 \\ 22, & s_3 = 1, & \alpha_3^* = 2 \\ 20, & s_3 = 2, & \alpha_3^* = 1 \\ 13, & s_3 = 3, & \alpha_3^* = 0 \end{array} \right.$$

<u>$t=2$</u>:
$$V_2(s_2) = \left\{ \begin{array}{lll} 35, & s_2 = 0, & \alpha_2^* = 3 \\ 29.5, & s_2 = 1, & \alpha_2^* = 5 \\ 27.5, & s_2 = 2, & \alpha_2^* = 4 \\ 24, & s_2 = 3, & \alpha_2^* = 0 \end{array} \right.$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε ότι για

$t=1$ inventory $=0 \Longrightarrow S_1 = 0$

Το βέλτιστο κόστος κ' για τις 4 περιόδους

$\underline{t=1}$: $V_1(0) = 40.5$ και $\alpha_1^* = 5$

optimal production schedule

Συμπέρασμα: Η βέλτιστη $\underbrace{\text{γραμμή παραγωγής}}_{\text{ακολουθία αποφάσεων}}$

θα είναι: $\boxed{\begin{matrix} \alpha_1^* \to \alpha_2^* \to \alpha_3^* \to \alpha_4^* \\ 5 \quad\ 0 \quad\ 3 \quad\ 4 \end{matrix}} \Longleftarrow V_1(0) = 40.5$

$\left.\begin{matrix} \boxed{S_1^* = 0} \\ \alpha_1^* = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_1^* + \alpha_1^* - D_1 = 0 + 5 - 2 = \boxed{3 = S_2^*}$

$\to V_1(0) = 40.5$

$\left.\begin{matrix} \boxed{S_2^* = 3} \\ \alpha_2^* = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_2^* + \alpha_2^* - D_2 = 3 + 0 - 3 = \boxed{0 = S_3^*}$

$\to V_2(3) = 24$

$\left.\begin{matrix} \boxed{S_3^* = 0} \\ \alpha_3^* = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_3^* + \alpha_3^* - D_3 = 0 + 3 - 3 = \boxed{0 = S_4^*}$

$\to V_3(0) = 24$

$\left.\begin{matrix} \boxed{S_4^* = 0} \\ \alpha_4^* = 4 - S_4 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_4^* + \alpha_4^* - D_4 = 0 + 4 - 4 = \boxed{0 = S_5^*}$

$\to V_4(0) = 13$

$\square$

Πινακοποίηση του προηγούμενου παραδείγματος:

γραμμές → οι καταστάσεις s_t

στήλες → οι αποφάσεις a_t

$s_4 \backslash a_4$	0	1	2	3	4	5	$V_4(s_4)$	a_4^*
0	.	.	.	.	13		13	4
1	.	.	.	11	.		11	3
2		.	9	.	.		9	2
3	.	7	.	.	.		7	1

$s_3 \backslash a_3$	0	1	2	3	4	5	$V_3(s_3)$	a_3^*	s_4^*
0	.	.	.	24	24.5	25	24	3	0
1	.	.	22	22.5	23	23.5	22	2	0
2	.	20	20.5	21	21.5	.	20	1	0
3	13	16.5	19	19.5	.	.	13	0	0

$s_2 \backslash a_2$	0	1	2	3	4	5	$V_2(s_2)$	a_2^*	s_3^*
0	.	.	.	35	35.5	36	35	3	0
1	.	.	33	33.5	34	29.5	29.5	5	3
2	.	31	31.5	32	27.5	.	27.5	4	3
3	24	29.5	27.5	25.5	.	.	24	0	0

$$s_3^* = s_2^* + a_2^* - \overset{3}{\overset{\shortparallel}{D_2}}$$

$s_1 \backslash a_1$	0	1	2	3	4	5	$V_1(s_1)$	a_1^*	s_2^*
0	.	.	44	41	41.5	40.5	40.5	5	3

$$s_2^* = s_1^* + a_1^* - D_1 = 0 + 5 - 2 = 3$$