ΜΕΡΙΚΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Τα αιτιοκρατικά προβλήματα στον δυναμικό προγραμματισμό έχουν την μορφή:

$$V_t(s_t) = \sup_{\alpha_t \in A_t(s_t)} \left\{ b_t(\alpha_t, s_t) + \beta V_{t+1}(s_{t+1}(\alpha_t, s_t)) \right\}$$

Στην πραγματικότητα όμως πολύ συχνά τέτοια προβλήματα εμπεριέχουν κ' απροσδιοριστία.

- Η ζήτηση σε ένα πρόβλημα απογραφής σε συγκεκριμένες περιόδους συχνά δεν είναι γνωστή εξ αρχής.
- Ο φοιτητής με το σταθερό ποσό M, που θα πρέπει να καταναλώση σε 4 περιόδους, θα μπορούσε να επενδύει $s_{t+1} = s_t - \alpha_t$ ποσό σε κάποιο χρεόγραφο που εμπεριέχει κίνδυνο. Έτσι δεν θα ξέρει από πριν το ποσό που του έχει απομείνει την χρονική στιγμή $t+1$

Σκοπός μας τώρα είναι να επιλύσουμε προβλήματα της μορφής:

$$V_t(s_t) = \sup_{\alpha_t \in A_t(s_t)} \left\{ \mathbb{E}\left(b_t(\alpha_t, s_t)\right) + \beta\, \mathbb{E}\left(V_{t+1}(s_{t+1}(\alpha_t, s_t))\right) \right\}$$

όπου $\mathbb{E}(\cdot)$ ο τελεστής της αναμενομενόμενης τιμής ως προς τις από κοινού στοχαστικές μεταβλητές των παραπάνω εκφράσεων.

Παράδειγμα με expected utility.

Στο πρόβλημα της σελ. [4] θεωρούμε ότι το benefit b_t είναι αιτιοκρατικό. Είχαμε ότι $b_t(\alpha_t, s_t) = U(\alpha_t) = \sqrt{\alpha_t}$ κ' θεωρούμε ότι όταν ο φοιτητής παίρνει στην κυριότητα του το ποσό M (με το οποίο θα πρέπει να επιβιώσει τις επόμενες 4 περιόδους), επενδύει το ποσό που υπολείπεται, σε κάθε περίοδο, σε μια μετοχή. Έστω τ.μ. ξ τέτοια ώστε $\xi - 1$ = απόδοση της μετοχής σε μια περίοδο

Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι:

$P\{\xi_t = 1.3\} = P\{\xi_t = 0.9\} = 0.5$, σε κάθε χρονική περίοδο. (δηλαδή: $\xi_t = \xi, \forall t$)

$$V_t(s_t) = \sup_{\alpha_t \in [0, s_t]} \left\{ U(\alpha_t) + \beta \mathbb{E}_{\xi}\left[V_{t+1}\left(\overbrace{\xi \cdot (s_t - \alpha_t)}^{s_{t+1}(s_t, \alpha_t; \xi)} \right) \right] \right\} \quad : (13.1)$$

$(4.1) \Rightarrow V_4(s_4) = U(s_4) = \sqrt{s_4}$. ενώ:

$$V_3(s_3) = \sup_{\alpha_3 \in [0, s_3]} \left\{ \sqrt{\alpha_3} + \beta \mathbb{E}_{\xi}\left[V_4(\xi \cdot (s_3 - \alpha_3)) \right] \right\}$$

$$\beta \mathbb{E}_{\xi}\left[V_4(\xi(\alpha_3 - \alpha_3)) \right] = \beta \mathbb{E}_{\xi}\left\{ \sqrt{\xi(\alpha_3 - s_3)} \right\} = \beta \sqrt{s_3 - \alpha_3} \cdot \mathbb{E}_{\xi}(\sqrt{\xi})$$

$$= b \cdot \sqrt{s_3 - \alpha_3} \quad ; \quad b = \beta \mathbb{E}_{\xi}(U(\xi))$$

Στο συγκεκριμένο υπόδειγμα η λύση του στοχαστικού προβλήματος μπορεί να αναχθεί στην λύση του αντίστοιχου αιτιοκρατικού (δοθέντος ότι $\xi_t \overset{d}{=} \xi$). Εάν η ξ_t είναι μία γενική στοχαστική διαδικασία το b θα πρέπει να αντικατασταθεί με $b_t = \beta\,\mathbb{E}[U(\xi_t)]$ που θα είναι μια συν/ση του t.

Το στοχαστικό πρόβλημα απογραφής

Θεωρούμε ότι σε κάθε περίοδο η ζήτηση είναι στοχαστική, ενώ ο αριθμός των αποθηκευμένων μονάδων για $t=1$ είναι 0 δηλ: $S_1 = 0$. Ζητάμε η εταιρεία να ικανοποιεί την ζήτηση σε κάθε περίοδο. Όλες οι μονάδες παραγωγής που δεν θα διατεθούν, στο τέλος της $4^{ης}$ περιόδου, θεωρούμε ότι μπορούν να πωληθούν στην τιμή των $r=2$ μονάδων

περίοδος	ζήτηση
1	$D_1 \overset{d}{=} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$
2	$D_2 \overset{d}{=} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$
3	$D_3 \overset{d}{=} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$
4	$D_4 \overset{d}{=} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

συναλλαγής ενώ για κάθε τέτοια μονάδα απαιτούνται έξοδα αποθήκευσης $h=0.5$ μονάδες.

$$V_t(s_t) = \inf_{\alpha_t} \left\{ \mathbb{E}\left[C_t(\alpha_t, s_t, D_t)\right] + \mathbb{E}\left[V_{t+1}\left(S_{t+1}(\alpha_t, s_t, D_t)\right)\right] \right\}$$

Επειδή για $t=4$ η μέγιστη ζήτηση είναι $\max D_4 = 4$ ενώ το max της αποθήκευσης 3, για να είμαστε σίγουροι ότι η ζήτηση θα ικανοποιηθεί σε όλες τις περιπτώσεις $(0 \le S_4 \le 3)$ το α_4 θα πρέπει να είναι πάντα θετικό. Δηλαδή μέσα στο $\mathbb{E}(C_4)$ θα έχουμε fixed costs K. κ'

$$\mathbb{E}(C_4) = K + \underbrace{(\max D_4 - S_4)}_{\alpha_4} p + \underbrace{(r-h)\,\mathbb{E}(D_4 - \min D_4)}$$

(εαν αποτέλεσμα $S_5 = 0$)

$$V_4(S_4) = \mathbb{E}(C_4) = 5 + \overbrace{(4 - S_4)}^{\alpha_4} 2 + (2 - 0.5)(3.5 - 3)$$

$$= 12.25 - 2S_4 \quad , \quad 0 \le S_4 \le \bar{I} = 3$$

$$V_4(S_4) = \begin{cases} 12.25 \, , & S_4 = 0 \, , \ \alpha_4^* = 4 \\ 10.25 \, , & S_4 = 1 \, , \ \alpha_4^* = 3 \\ 8.25 \, , & S_4 = 2 \, , \ \alpha_4^* = 2 \\ 6.25 \, , & S_4 = 3 \, , \ \alpha_4^* = 1 \end{cases}$$

<u>$t=3$</u>:

υπάρχει μόνο αν $\alpha_3 > 0$

$$\mathbb{E}(C_3) = K + p \cdot \alpha_3 + \mathbb{E}(S_3 + \alpha_3 - D_3) \cdot h$$

$$= K + p \cdot \alpha_3 + (S_3 + \alpha_3 - \mathbb{E}(D_3)) \cdot h$$

$$\mathbb{E}(V_4(S_4)) = \mathbb{E}(V_4(S_3 + \alpha_3 - D_3)) = \tfrac{1}{2} V_4(S_3 + \alpha_3 - 3) + \tfrac{1}{2} V_4(S_3 + \alpha_3 - 2)$$

$$V_3(S_3) = \min_{\alpha_3} \Big\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{εαν } \alpha_3 > 0}}{K} + p\alpha_3 + \Big[\tfrac{1}{2} h (S_3 + \alpha_3 - 3) + \tfrac{1}{2} h (S_3 + \alpha_3 - 2)\Big] + \Big[\tfrac{1}{2} V_4(S_3 + \alpha_3 - 3) + \tfrac{1}{2} V_4(S_3 + \alpha_3 - 2)\Big] \Big\}$$

$$\Rightarrow V_3(s_3) = \min_{\alpha_3 \in A_3(s_3)} \Big\{ K \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\alpha_3) + p\alpha_3 + h \cdot (s_3 + \alpha_3 - 2.5)$$

$$+ \tfrac{1}{2} V_4(s_3+\alpha_3-2) + \tfrac{1}{2} V_4(s_3+\alpha_3-3) \Big\}.$$

$$s_3 = 0 \Rightarrow \quad s_3 + \alpha_3 - 2.5 \begin{cases} <0, & \alpha_3 = 0,1,2 \\ 0.5, & \alpha_3 = 3 \\ 1.5, & \alpha_3 = 4 \\ 2.5 & \alpha_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow A_3(0) = \{3,4,5\}$$

$$V_3(0) = \min_{\alpha_3 \in \{3,4,5\}} \Big\{ 5 + 2\alpha_3 + 0.5(0 + \alpha_3 - 2.5) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} V_4(\alpha_3 - 2) + \tfrac{1}{2} V_4(\alpha_3 - 3) \Big\} = 22.5, \quad \alpha_3^* = 3$$

$$s_3 = 1 \Rightarrow \quad s_3 + \alpha_3 - 2.5 \begin{cases} <0 & \alpha_3 = 0,1 \\ 0.5 & \alpha_3 = 2 \\ 1.5 & \alpha_3 = 3 \\ 2.5 & \alpha_3 = 4 \\ 3.5 & \alpha_3 = 5 \end{cases}$$

$$V_3(1) = \min_{\alpha_3 \in \{2,3,4,5\}} \Big\{ 5 + 2\alpha_3 + 0.5(1 + \alpha_3 - 2.5) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} V_4(\alpha_3 - 2) + \tfrac{1}{2} V_4(\alpha_3 - 3) \Big\} = 20.5, \quad \alpha_3^* = 2$$

<u>τελικά</u> καταλήγουμε στην παρακάτω πινακοποίηση:

$s_3 \backslash \alpha_3$	0	1	2	3	4	5	α_3^*	$V_3(s_3)$
0	.	.	.	22.5	23	23.5	3	22.5
1	.	.	20.5	21	21.5	22.75	2	20.5
2	.	18.5	19	19.5	20.75	.	1	18.5
3	11.5	12	12.5	18.75	.	.	0	11.5

$t=2$

$S_2 \backslash \alpha_2$	0	1	2	3	4	5	$V_2(S_2)$	α_2^*
0	.	.	.	32.75	32.25	31.25	31.25	5
1	.	.	30.75	31.25	29.25	28	28	5
2	.	28.75	29.25	27.25	26	.	26	4
3	21.75	27.25	25.25	24	.	.	21.75	0

$t=1$: Εχουμε $S_1 = 0 \Rightarrow S_2 = S_1 + \alpha_1 - D_1 = \alpha_1 - D_1 \Rightarrow$

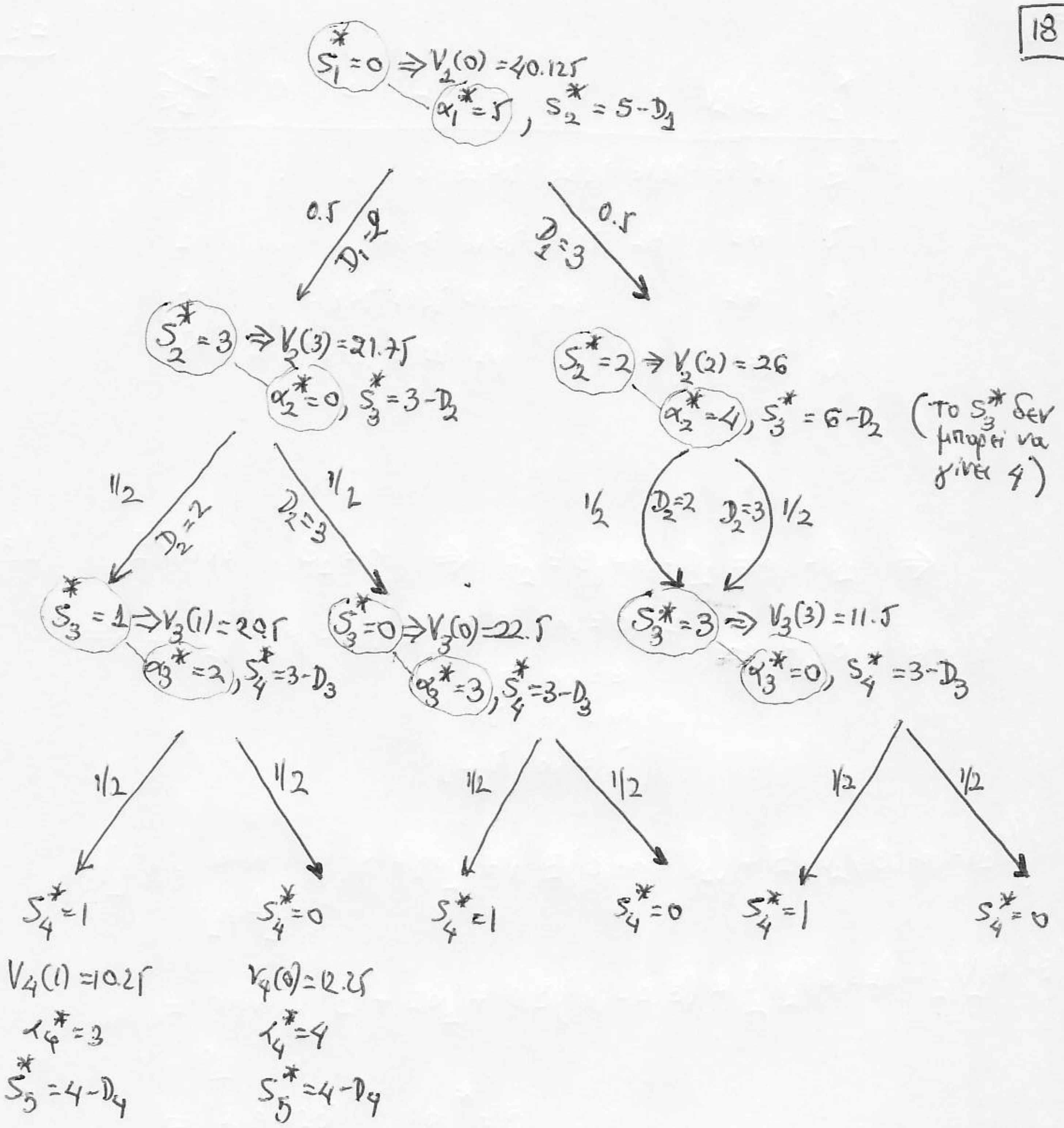
$$\Rightarrow \mathbb{E}(S_2) = \alpha_1 - 2.5 = \begin{cases} <0 & \alpha_1 = 0,1,2 \\ 0.5 & \alpha_1 = 3 \\ 1.5 & \alpha_1 = 4 \\ 2.5 & \alpha_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow A_1(0) = \{3,4,5\}$$

$$V_1(0) = \min_{\alpha_1 \in A_1(0)} \left\{ K + p\alpha_1 + h \cdot \mathbb{E}(S_1 + \alpha_1 - D_1) + \mathbb{E}\left(V_2(S_1 + \alpha_1 - D_1)\right) \right\}$$

$$= \min_{\alpha_1} \left\{ 5 + 2\alpha_1 + 0.5(\alpha_1 - 2.5) + \tfrac{1}{2} V_2(\alpha_1 - 2) + \tfrac{1}{2} V_2(\alpha_1 - 3) \right\}$$

$$= 40.125 \quad , \quad \alpha_1^* = 5$$

$S_1 \backslash \alpha_1$	0	1	2	3	4	5	$V_1(S_1)$	α_1^*
0	.	.	.	40.87	40.75	40.125	40.125	5



Δηλαδή για κάθε πραγματοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ εμείς έχουμε μια άριστη (ελαχίστου κόστους) πολιτική $\{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \alpha_4^*\}$.

□

ΕΝΑ ΤΥΧΕΡΟ ΠΑΙΓΝΙΟ

Έστω ακολουθία από τυχερά παίγνια όπου είναι παίκτης στοιχηματίζει ποσοστό της περιουσίας του. Ο παίκτης μπορεί να στοιχηματίσει σε n διαδοχικά παίγνια, με σκοπό να μεγιστοποιήσει τον λογάριθμο της τελικής του περιουσίας

Εάν
$$\begin{cases} V_n(x) = \text{μέγιστη αναμενόμενη απόδοση για περιουσία } x \text{ την χρονική στιγμή } n \text{ time to go} \\ V_0(x) = \ln(x) \quad \cancel{(\text{η αρχική συνθήκη})} \end{cases}$$

$$V_n(x) = \sup_{\alpha_{n-1} \in [0,1]} \left\{ p V_{n-1}(x + \alpha_{n-1} x) + q V_{n-1}(x - \alpha_{n-1} x) \right\}$$

$$V_1(x) = \sup_{\alpha_0 \in [0,1]} \left\{ p \ln(x + \alpha_0 x) + q \ln(x - \alpha_0 x) \right\}$$

$$= \ln(x) + \sup_{\alpha_0 \in [0,1]} \left\{ p \ln(1 + \alpha_0) + q \ln(1 - \alpha_0) \right\}$$

Τότε
$$\begin{cases} \alpha_0^* = p - q \\ V_1(x) = \ln(x) + \overbrace{\left[\ln(2) + p \ln(p) + q \ln(q) \right]}^{C(p)} \end{cases}$$

Έτσι:
$$V_2(x) = \sup_{\alpha_1 \in [0,1]} \left\{ p \ln(x + \alpha_1 x) + p C(p) + q \ln(x - \alpha_1 x) + q C(p) \right\}$$

$$= C(p) + \ln(x) + \sup_{\alpha_1 \in [0,1]} \left\{ p \ln(1 + \alpha_1) + q \ln(1 - \alpha_1) \right\}$$

τότε:
$$\begin{cases} \alpha_1^* = p - q \\ V_2(x) = 2\mathbb{C}(p) + \ln(x) \end{cases}$$

Ανακυκλώνοντας έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha_{n-1}^* = p - q \\ V_n(x) = n\,\mathbb{C}(p) + \ln(x) \end{cases}$$

Ενώ θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη $\mathbb{C}'(p) > 0$ που συμβαίνει για $p > 1/2$ (τότε $\alpha_t^* > 0$)

ΕΝΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΓΙΑ OPTIONS

Εάν S_t είναι η τιμή μιάς μετοχής την t χρονική περίοδο υποθέτουμε ότι:

$$S_{t+1} = S_t + \xi_{t+1} \qquad \text{όπου: } \{\xi_t\} = \text{iid} \ \ \text{κ'} \ \xi_t \overset{d}{=} \xi \in L^1$$

Δηλαδή μοντελοποιούμε την τιμή της μετοχής με ένα random walk.

Έστω American call option με strike price X κ' N ο αριθμός των χρονικών περιόδων έως την λήξη του option τότε:

$$V_t(S_t) = \max\left\{ S_t - X, \beta\mathbb{E}\left[V_{t+1}(S_{t+1})\right] \right\}$$

$$= \max\left\{ S_t - X, \beta \int_{\xi(\Omega) \ni x} V_{t+1}(S_t + x)\, P_\xi(dx) \right\} : (20.1)$$

<u>με συνοριακή συνθήκη</u>: $V_N(S_N) = \max(S_N - X, 0)$:(21.1)

Για παράδειγμα εάν η ξ είναι μία διτιμη τ.μ με $P\{\xi = x\} = p$ κ' $P\{\xi = -x\} = 1-p = q$ θα έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} S_t = S_{t-1} + \xi_t = \dots = S_0 + \sum_{i=1}^{t} \xi_i \\ \underline{\text{Ενώ}} \quad \sum_{i=1}^{t} \xi_i \in \{(2j-t)x \mid 0 \le j \le t\} \end{array}\right\} S_t^j := S_0 + (2j-t)x, \quad 0 \le j \le t$$

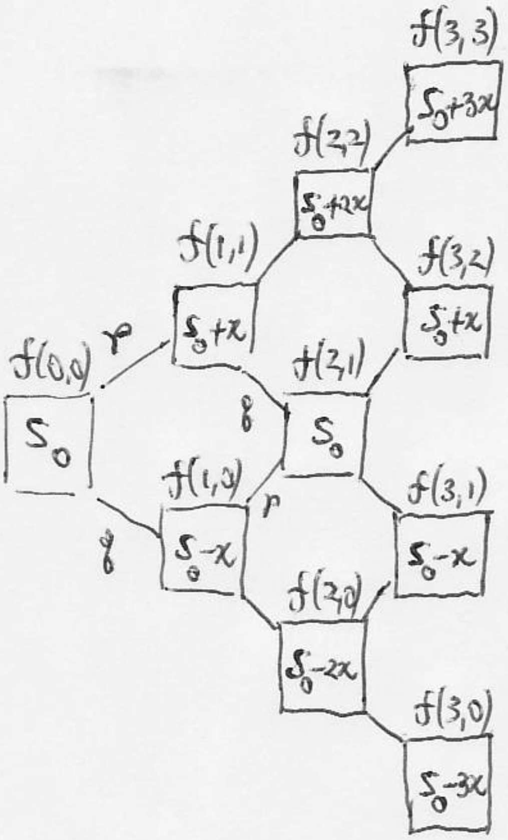
επειδή $V_t(S_t^j) = \max\left\{S_t^j - X, \beta\left[pV_{t+1}(S_t^j + x) + qV_{t+1}(S_t^j - x)\right]\right\}$

$$\Rightarrow V_t(S_0 + (2j-t)x) = \max\{S_0 + (2j-t)x - X,$$
$$\beta \cdot \left[pV_{t+1}(S_0 + (2(j+1) - (t+1))x) + qV_{t+1}(S_0 + (2j - (t+1))x)\right]$$

$$\Big\Downarrow \; f(t,j) := V_t(S_0 + (2j-t)x)$$

$$\begin{cases} f(t,j) = \max\left\{S_t^j - X, \beta\left[pf(t+1, j+1) + qf(t+1, j)\right]\right\} \\ \text{για } 0 \le j \le t \quad \text{και} \quad t = 0, 1, \dots, N \\ f(N,j) = \max\{S_N^j - X, 0\}, \quad 0 \le j \le N \quad (\text{συνοριακή συνθήκη}) \end{cases}$$

Για παράδειγμα για $N=3$ θα έχουμε (για ευκολία $\beta=1$):



$t=3=N$:

$$f(3,3) = \max\{S_0+3x-X, 0\}$$
$$f(3,2) = \max\{S_0+x-X, 0\}$$
$$f(3,1) = \max\{S_0-x-X, 0\}$$
$$f(3,0) = \max\{S_0-3x-X, 0\}$$

$t=2$:

$$f(2,2) = \max\{S_0+2x-X,\ p f(3,3)+q f(3,2)\}$$
$$f(2,1) = \max\{S_0-X,\ p f(3,2)+q f(3,1)\}$$
$$f(2,0) = \max\{S_0-2x-X,\ p f(3,1)+q f(3,0)\}$$

$t=1$:

$$f(1,1) = \max\{S_0+x-X,\ p f(2,2)+q f(2,1)\}$$
$$f(1,0) = \max\{S_0-x-X,\ p f(2,1)+q f(2,0)\}$$

$t=0$:

$$f(0,0) = \max\{S_0-X,\ p f(1,1)+q f(1,0)\}$$

Σε κάθε βήμα η απόφαση α_t^* θα είναι η εξάσκηση ή μη εξάσκηση του call.

π.χ

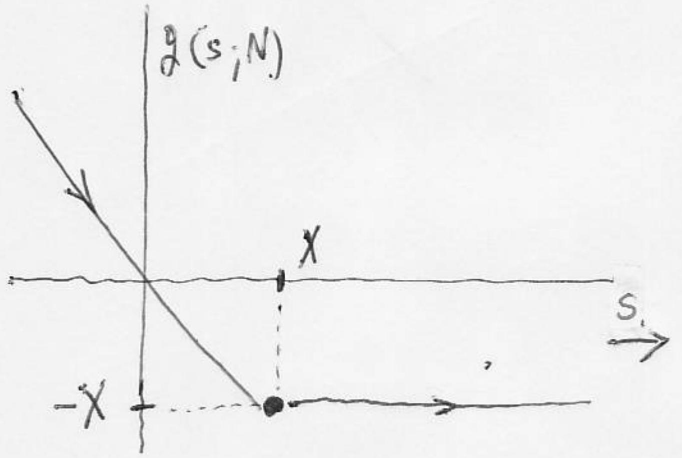
$$\begin{cases} f(t,j) = \max\{\alpha_t^1, \alpha_t^2\} \\ \alpha_t^* = \begin{cases} \text{εξασκούμε}, & \alpha_t^1 \geq \alpha_t^2 \\ \text{δεν εξασκούμε}, & \alpha_t^1 < \alpha_t^2 \end{cases} \end{cases}$$

Άσκηση: Να δειχθεί ότι οι σχέσεις (20.1) κ' (21.1) ορίζουν ως προς s κ' για κάθε $0 \le t \le N$ την φθίνουσα συν/ση

$$g(s;t) := V_t(s) - s$$

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή προς τα πίσω.

$$g(s;N) = V_N(s) - s = \max(-X, -s) = \begin{cases} -s, & s \le X \\ -X, & s > X \end{cases},$$



που είναι προφανώς φθίνουσα ως προς s.

Υποθέτουμε ότι $g(s;t)$ φθίνουσα ως προς s. Θα δείξουμε ότι κ' $g(s;t-1)$ φθίνουσα ως προς s

$$g(s;t-1) = \max\left\{ s - X, \beta \int_{\xi(\Omega)} V_t(s+x) P_\xi(dx) \right\} - s$$

$$= \max\left\{ -X, \beta \int_{\xi(\Omega)} [V_t(s+x) - (s+x)] P_\xi(dx) + \underbrace{\beta \int (s+x) P_\xi(dx) - s}_{(\beta-1)s + \beta \mathbb{E}(\xi)} \right\}$$

$$= \max\left\{ -X, \underbrace{\beta \int g(s+x;t) P_\xi(dx) + (\beta-1)s + \beta \mathbb{E}(\xi)}_{F(s;t,\beta)} \right\}$$

Για s τέτοια ώστε $F(s;t,\beta) \le -X$ έχουμε $g(s;t-1) = -X$

εαν όμως το s δίνει $F(s;t,\beta) > -X$, $g(s;t-1) = F(s;t,\beta)$

αλλα $\dfrac{\partial F(s;t,\beta)}{\partial s} = \beta \displaystyle\int \frac{\partial g(s+x;t)}{\partial s} P_\xi(dx) + (\beta-1) \le 0$ διότι

διότι $0<\beta\leq 1$ κ' από την υπόθεση της επαγωγής

$$\frac{\partial g(s+x;t)}{\partial s}\leq 0 \Rightarrow \beta\int \frac{\partial g(s+x;t)}{\partial s}P_{\xi}(dx)\leq 0$$

$\square$

Παρατήρηση: (i) Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι $V_t(s)$ είναι αύξουσα ως προς s

(ii) Για put-American option έχουμε από συμμετρία ότι $g(s;t)$ είναι αύξουσα ως προς s κ' $V_t(s)$ φθίνουσα ως προς s.

(iii) Εξασκώ το option όταν το κέρδος από την εξάσκηση την χρονική στιγμή t είναι μεγαλύτερο (ή ίσο) της προεξοφλημένης αναμενόμενης απόδοσης του option την χρονική στιγμή $t+1$, δηλαδή όταν

$$S_t - X \geq \beta\,\mathbb{E}_x\left(V_t(S_t+x)\right) \quad : (24.1).$$