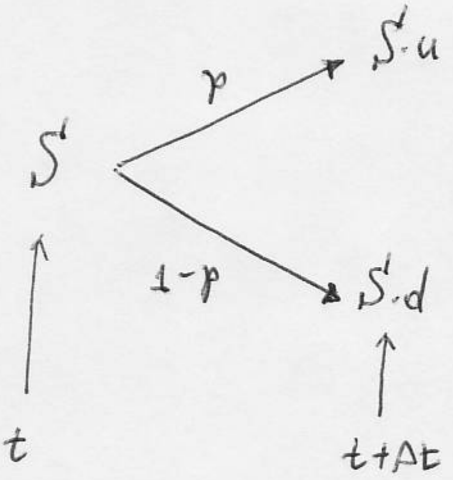
ΔΙΩΝΥΜΙΚΑ ΔΕΝΔΡΑ
(binomial trees)

Υποθέτουμε ότι οι κινήσεις μιας μετοχής είναι διωνυμικές μέσα σε ένα "μικρό" χρονικό διάστημα μήκους Δt

Θέλουμε να αποτιμήσουμε το δικαίωμα (option) πάνω σε μια μετοχή που δεν δίνει μέρισμα (non-divident-paying stock). Αρχίζουμε διαιρώντας την διάρκεια ζωής του παραγώγου σε ένα μεγάλο αριθμό από μικρά χρονικά διαστήματα μήκους Δt. και υποθέτουμε ότι



$$p = P\{ S_{t+\Delta t} = S \cdot u \mid S_t = S \}$$

$$q = P\{ S_{t+\Delta t} = S \cdot d \mid S_t = S \} = 1-p$$

$$u > 1 \ , \quad d < 1$$

Η αρχή του risk-neutral valuation:

1. Η αναμενόμενη απόδοση σε όλα τα προσφερόμενα συμβόλαια είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (risk-free interest rate) r.
2. Όλες οι μελλοντικές αποδόσεις μπορούν να αποτιμηθούν με την προεξόφληση (discounting to present value) των αναμενόμενων τους τιμών με το r

Έστω μ κ' σ σταθερές

Η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής (θετική ή αρνητική)

Το volatility της μετοχής.

Υποθέτουμε ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί το υπόδειγμα της γεωμετρικής κίνησης Brown δηλαδή

$$dS_t = \underbrace{\mu S_t\, dt}_{\text{drift όρος}} + \underbrace{\sigma S_t\, dW_t}_{\text{diffusion όρος}} \quad (26.1)$$

όπου: $W_t = W(t,\omega) = W(t)$ είναι η διαδικασία Wiener (γεωμετρική κίνηση Brown)

Η $\{W_t \mid t \geq 0\}$ είναι Markovian, Gaussian με στάσιμες κ' ανεξάρτητες προσαυξήσεις δηλαδή:

(i) $W(t_i) \mid \{W(t_{i-1}) = x_{i-1}\} \stackrel{d}{=} N(x_{i-1}, t_i - t_{i-1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow W(t) \mid \{W(0)=0\} \stackrel{d}{=} N(0,t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}\, N(0,1)$

(ii) $W(t_i) - W(t_{i-1}) \stackrel{d}{=} W(t_i - t_{i-1})$

(iii) $\left\{W(t) - W(s),\ \mathcal{F}_s^W = \sigma\{W(r) \mid r \in [0,s]\}\right\}$ = ανεξάρτητα

$\Leftrightarrow \forall\ 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ οι προσαυξήσεις

$W(t_1) - W(t_0),\ W(t_2) - W(t_1),\ \dots,\ W(t_n) - W(t_{n-1})$

είναι ανεξάρτητες.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Itô η σχέση (26.1) γίνεται $d\ln(S_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t$. Ολοκληρώνοντας από το t στο T παίρνουμε

$$S_T = S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} \stackrel{d}{=} LN\left(\ln(S_t) + (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

Εάν $\xi \stackrel{d}{=} LN(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \mathbb{E}(\xi) = e^{\mu + \sigma^2/2}$, $Var(\xi) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$ με αποτέλεσμα:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(S_T) = S_t e^{\mu(T-t)} & : (27.1) \\ Var(S_T) = S_t^2 e^{2\mu(T-t)}\left[e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right] & : (27.2) \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή του risk-neutral valuation η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής θα πρέπει να είναι το risk-free-rate, έτσι:

$$\hat{\mathbb{E}}(S_T) = S_t e^{r\Delta t} = pS_t \cdot u + (1-p)S_t \cdot d \Rightarrow \boxed{e^{r\Delta t} = p \cdot u + (1-p) \cdot d} \quad (27.3)$$

Η risk-free διασπορά (κρατώντας μέχρι όρους Δt) από την σχέση (3.2) δίνεται από το $S_t^2 \sigma^2 \Delta t$ έτσι:

$$S_t^2 \sigma^2 \Delta t = \underbrace{pS_t^2 u^2 + (1-p)S_t^2 d^2}_{\hat{\mathbb{E}}(S_T^2)} - \underbrace{\left[pS_t \cdot u + (1-p)S_t \cdot d\right]^2}_{\hat{\mathbb{E}}(S_T)^2} \Rightarrow$$

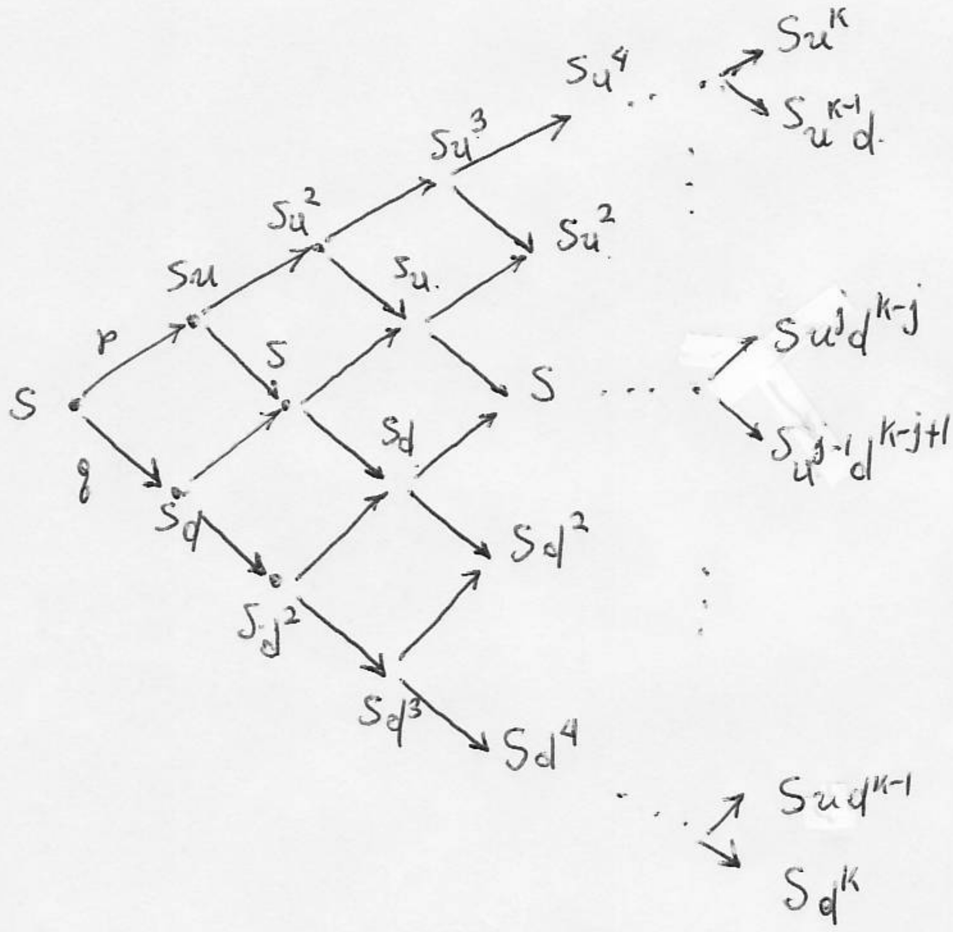
$$\Rightarrow \boxed{\sigma^2 \Delta_t = pu^2 + (1-p)d^2 - \left[pu + (1-p)d\right]^2} \quad : (27.4)$$

Τέλος δίνουμε την συνθήκη $\boxed{u \cdot d = 1}$; (28.1)

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (27.3) (27.4) κ' (28.1) παίρνουμε

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p = (e^{r\Delta t} - d)/(u-d).$$

ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ ΣΤΟ BINOMIAL TREE.



Δηλαδή την χρονική στιγμή $t = k \cdot \Delta t$ θα έχουμε $k+1$ τιμές της μετοχής $\{ S \cdot u^j d^{k-j} \mid 0 \le j \le k \}$. Ειδικότερα

$$S_{t+1} = \eta_{t+1} S_t = (\eta_{t+1}\eta_t) S_{t-1} = \dots = (\eta_{t+1}\eta_t \cdots \eta_1) S_0 \quad ; \; S = S_0$$

$$\text{με } \{\eta_i\} = \text{iid} \;\; \text{κ'} \;\; \eta_i \overset{d}{=} \eta \overset{d}{=} \begin{pmatrix} u & d \\ p & q \end{pmatrix}$$

Τότε: $P\{S_{t+1}=y \mid S_t = x, S_{t-1}=x_{t-1}, \dots, S_0 = x_0\} =$

$$= P\{\eta_{t+1} = y/x\} = \begin{cases} p, & y = xu \\ q, & y = xd \end{cases} = P\{S_{t+1} = y \mid S_t = x\}$$

$= P(x,y) =$ πιθ. μετάβασης 1ης τάξης από το x στο y.

$$S_n \mid \{S_0 = S\} \in \{Su^n, Su^{n-1}d, \dots, Sd^n\} \quad \kappa'$$

$$P^n(x,y) = P\{S_n = y \mid S_0 = x\} = P\{J_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

η $n^{οστής}$ τάξης πιθανότητα μετάβασης από το x στο y

Η ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΔΕΝΔΡΟΥ.

Έστω American-put-option για non-divident-paying μετοχή. Διαιρούμε την διάρκεια ζωής του option σε N υποδιαστήματα μήκους Δt. Εάν $F(t, S_t)$ είναι η αποτίμηση του option την χρονική στιγμή t θα έχουμε

$$f(k,j) := F(k \cdot \Delta t, \; S \cdot u^j \cdot d^{k-j}) \quad , 0 \le k \le N, \; 0 \le j \le k$$

Η τιμή του option στην κορυφή (k,j)

Συνοριακές συνθήκες: $f(N, j) = \max(X - Su^j d^{N-j}, 0)$ για κάθε $0 \le j \le N$

$$\begin{array}{l} \nearrow^{p}\ (k+1,\ j+1) \\ (k,j) \\ \searrow_{q}\ (k+1,\ j) \end{array}$$

ο παράγοντας προεξόφλησης

$$f(k,j) = \max\left\{ X - S\cdot u^j \cdot d^{k-j},\ \beta\, \mathbb{E}\left[f(k+1,j) \right] \right\} \quad , \ \beta = e^{-r\Delta t}$$

<u>όπου</u>: $\mathbb{E}\left[f(k+1,j) \right] = \left[p\, f(k+1,j+1) + q\, f(k+1,j) \right]$

<u>Παρατήρηση</u>: Στο όριο $\Delta t \to 0$, η ακριβείς τιμή του (παίρνεται) American put. Πρακτικά, $N=30$, συνήθως δίνει αποτελέσματα κοντά στην πραγματική τιμή.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω American put option (για non-dividend-paying μετοχή), με διάρκεια ζωής $T=5$ μήνες όταν $S=50$ ($) κ' strike price $X=50$. Το risk-free επιτόκιο είναι 10% το χρόνο κ' το volatility 40% το χρόνο. Να γίνει αποτίμηση του American put διαιρώντας την διάρκεια ζωής σε $N=5$ χρονικά διαστήματα

$S = 50$	$\Delta t = T/5 = 0.0833$	
$X = 50$	$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.1224$	
$r = 0.10$	$d = u^{-1} = 0.8909$	
$\sigma = 0.40$	$e^{r\Delta t} = 1.0084$	
$T = 5/12 = 0.4167$	$p = 0.5076$	$q = 1 - p = 0.4924$

$N = 5$

	0	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	
						89,07 0,00 W	
					79,35 0,00 W		
				70,70 0,00 W		70,70 0,00 W	
			62,99 0,64 W		62,99 0,00 W		
		56,12 2,16 W		56,12 1,30 W		56,12 0,00 W	
	X 50,00 4,49 W		X 50,00 3,77 W		50,00 2,66 W	$f(3,0)$	
		X 44,55 6,96 W		X 44,55 6,38 W		44,55 5,45 E	
			39,69 10,36 W		X 39,69 10,31 E	$f(4,0)$	
				35,36 14,64 E		X 35,36 14,64 E	$= V_5(S_5)$, $S_5 = 35.36$
					31,50 18,50 E	$f(5,0)$	
						28,07 21,93 E	$= V_5(S_5)$, $S_5 = 28.07$

$$V_5(S_5) = \max(X - S_5, 0) \; ; \; S_5 \in \{28.07, 35.36, 44.55, 56.12, 70.70, 89.07\} = \{S u^j d^{5-j}\}_{j=0,..,5}$$

Έστω η πραγματοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας της τιμής της μετοχής $\{S_t, 0 \le t \le 5\}$

$\{S_t\}$	$V_t(S_t)$	α_t^*
$S_0^0 = 50.00$	4.49	W
$S_1^2 = 44.55$	6.96	W
$S_2^2 = 50.00$	3.77	W
$S_3^3 = 44.55$	6.38	W
$S_4^4 = 36.69$	10.31	E $\leftarrow X - S_4^4 \ge \beta \mathbb{E}_x\left(V_5(S_4^4 x)\right)$
$S_5^5 = 35.36$	14.64	E

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ
(Machine replacement)

Έστω ότι έχουμε μια μηχανή που θέλουμε να συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε και τις υπόλοιπες T χρονικές περιόδους. Πόσες φορές θα πρέπει να αντικαταστήσουμε την μηχανή έτσι ώστε το κόστος να είναι ελάχιστο?

<u>Δεδομένα</u>: $k(t)$ = το κόστος χρήσης της μηχανής για μία χρονική περίοδο όταν έχει ήδη υποστεί παλαίωση t χρονικών περιόδων

$\alpha(t)$ = η τιμή αντικατάστασης της, ηλικίας t, μηχανής με μια νέα.

$\pi(t)$ = η τιμή πώλησης της, ηλικίας t, μηχανής

$A(t)$ = η τιμή αγοράς νέας μηχανής

Επειδή $$V_t(s_t) = \inf_{\alpha_t \in A_t(s_t)} \left\{ c_t(\alpha_t, s_t) + V_{t+1}\left(s_{t+1}(\alpha_t, s_t)\right) \right\}$$

s_t = η ηλικία της μηχανής στην αρχή της t περιόδου χρήσης

$\alpha_t \in \{0, 1\} = A_t(s_t)$

0: δεν αντικαθιστώ με νέα μηχανή

1: αντικαθιστώ με νέα μηχανή

$$\Rightarrow s_{t+1}(\alpha_t, s_t) = \begin{cases} s_t + 1, & \alpha_t = 0 \\ 1, & \alpha_t = 1 \end{cases}$$

$$V_t(s_t) = \min\left\{ c_t(0, s_t) + V_{t+1}(s_t+1),\ c_t(1, s_t) + V_{t+1}(1) \right\},$$

$c_t(1, s_t) = A(t) - \alpha(s_t) + k(0)$ = κόστος με αντικατάσταση κ' παλαιότητα s_t

$c_t(0, s_t) = k(s_t)$ = κόστος χωρίς αντικατάσταση κ' παλαιότητα s_t

$$1 \le s_t \le t + t_0 - 1 \quad , \quad 1 \le t \le T+1 .$$

t_0 = η αρχική ηλικία της μηχανής που μου προτείνεται για χρήση στην αρχή της $1^{ης}$ περιόδου χρήσης

T = ο αριθμός των περιόδων χρήσης

<u>Παρατήρηση</u>: Το t έχει μέγιστη τιμή $T+1$ διότι αν κ' δεν θα κάνω χρήση της μηχανής την χρονική περίοδο $T+1$ μπορώ να αρχίσω να ελαχιστοποιώ το κόστος χρήσης (η συνοριακή συνθήκη) πουλώντας το s_{T+1} ηλικίας μηχάνημα.

<u>Αριθμητικό παράδειγμα</u>: Έστω ότι έχω την επιλογή στην αρχή της 1ης περιόδου χρήσης να χρησιμοποιήσω μηχάνημα ηλικίας $t_0 = 2$ για $T = 4$ χρονικές περιόδους χρήσης κ' μου δίνονται οι παρακάτω συν/σεις

x	$k(x)$	$\alpha(x)$	$\pi(x)$	$A(x) = \text{σταθ.} = A$
0	5	70	70	70
1	10	55	45	70
2	15	40	40	70
3	20	30	30	70
4	25	20	15	70
5	35	10	10	70
6	50	2	2	70

$1 \le t \le 5$

$\underline{t=5}$: $s_5 \in \{1, 2, \dots, 6\}$, $\boxed{V_5(s_5) = -\pi(s_5)}$ έπι :

$$\begin{cases} V_5(6) = -2, \quad V_5(5) = -10, \quad V_5(4) = -15 \\ V_5(3) = -30, \quad \boxed{V_5(2) = -40}, \quad V_5(1) = -45. \end{cases}$$

$\underline{t=4}$: $s_4 \in \{1, 2, \dots, 5\}$, $V_4(s_4) = \min\Big\{ \overbrace{k(s_4) + V_5(s_4+1)}^{\alpha_4 = 0},$

$$\underbrace{A - \alpha(s_4) + k(0) + V_5(1)}_{\alpha_4 = 1} \Big\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_4(s_4) = \min\{ k(s_4) + V_5(s_4+1), 30 - \alpha(s_4) \}}$$

$$\begin{cases} \boxed{V_4(1) = \min\{-30, -25\} = -30, \quad \alpha_4^* = 0} \\ V_4(2) = \min\{-15, -10\} = -15, \quad \alpha_4^* = 0 \\ V_4(3) = \min\{5, 0\} = 0, \quad \alpha_4^* = 1 \\ V_4(4) = \min\{15, 10\} = 10, \quad \alpha_4^* = 1 \\ V_4(5) = \min\{33, 20\} = 20, \quad \alpha_4^* = 1 \end{cases}$$

$\underline{t=3}$: $s_3 \in \{1,2,3,4\}$, $V_3(s_3) = \min\{ k(s_3) + V_4(s_3+1),$

$A - \alpha(s_3) + k(0) + V_4(1) \} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad V_3(s_3) = \min\{ k(s_3) + V_4(s_3+1),\ 30 - \alpha(s_4) \}$

$$\begin{cases} \boxed{V_3(1) = \min\{-5, -10\} = -10, \quad \alpha_3^* = 1} \\ V_3(2) = \min\{15, 5\} = 5, \quad \alpha_3^* = 1 \\ V_3(3) = \min\{30, 15\} = 15, \quad \alpha_3^* = 1 \\ V_3(4) = \min\{45, 25\} = 25, \quad \alpha_3^* = 1 \end{cases}$$

$\underline{t=2}$: $s_2 \in \{1,2,3\}$, $V_2(s_2) = \min\{ k(s_2) + V_3(s_2+1),$

$A - \alpha(s_2) + k(0) + V_3(1) \} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_2(s_2) = \min\{ k(s_2) + V_3(s_2+1),\ 65 - \alpha(s_2) \}$

$$\begin{cases} \boxed{V_2(1) = \min\{15, 10\} = 10, \quad \alpha_2^* = 1} \\ V_2(2) = \min\{30, 25\} = 25, \quad \alpha_2^* = 1 \\ V_2(3) = \min\{45, 35\} = 35, \quad \alpha_2^* = 1 \end{cases}$$

$\underline{t=1}$: $s_1 \in \{1,2\}$, $V_1(s_1) = \min\{k(s_1) + V_2(s_1+1),$

$A - \alpha(s_1) + k(0) + V_2(1)\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_1(s_1) = \min\{k(s_1) + V_2(s_1+1),\ 85 - \alpha(s_1)\}$$

$$\begin{cases} V_1(1) = \min\{35, 30\} = 30, \quad \alpha_1^* = 1 \quad : (\text{δεν χρειάζεται}) \\ \boxed{V_1(2) = \min\{50, 45\} = 45, \quad \alpha_2^* = 1} \end{cases}$$

Παρατήρηση: (i) Θα μπορούσα να υπολογίσω και $V_0(1) =$
$= k(0) + V_1(1) = 35$, $\alpha_0^* = 0$ (δηλαδή αρχίζω με ηλικία μηχανήματος 0 κ' κάνω χρήση για 6 περιόδους).

(ii) Η τιμή $V_1(1) = 30$, $\alpha_1^* = 1$ είναι λογική αλλά <u>δεν μου χρειάζεται</u> εφόσον το πρόβλημα είναι για $t_0 = 2$ (αρχική παλαιότητα 2)

Βέλτιστη τροχιά:

$$\begin{array}{ccccccccc} V_1(2)=45 & \Rightarrow & V_2(1)=10 & \Rightarrow & V_3(1)=-10 & \Rightarrow & V_4(1)=-30 & \Rightarrow & V_5(2)=-40 \\ (\alpha_1^*=1) & & (\alpha_2^*=1) & & (\alpha_3^*=1) & & (\alpha_4^*=0) & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ s_2^*=1 & & s_3^*=1 & & s_4^*=1 & & s_5^*=2 & & \end{array}$$

ΤΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ.

Όλες οι ποσότητες $k(t)$, $\alpha(t)$, $\pi(t)$ κ' $A(t)$ θα μπορούσαν να μετατραπούν σε στοχαστικές διαδικασίες.

Εαν κάνουμε στοχαστικό μόνο το $k(t)$ παίρνουμε:

$\{k(t)=x\}$ = το ενδεχόμενο το κόστος χρήσης της μηχανής, για μια χρονική περίοδο, να είναι x · με ηλικία μηχανής, στην αρχή της περιόδου, t.

$P\{k(t)=x\} = p(t,x)$ <u>και</u> $\sum_{x} p(t,x) = 1$:

$$V_t(s_t) = \min\Big\{ \mathbb{E}[c_t(0,s_t)] + \mathbb{E}[V_{t+1}(s_t+1)],\ \mathbb{E}[c_t(1,s_t)] + \mathbb{E}[V_{t+1}(1)] \Big\}$$

$$\mathbb{E}[c_t(0,s_t)] = \mathbb{E}[k(s_t)]$$

$$\mathbb{E}[c_t(1,s_t)] = A(t) - \alpha(s_t) + \mathbb{E}[k(0)]$$