Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική.

Τόμος ΙΙ: Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική

Α. Ν. Γιαννακοπουλος
Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

30 Ιανουαρίου 2004

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Αγορές τίτλων.

1.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παραθέσουμε μερικές βασικές ιδέες σχετικά με τις **αγορές τίτλων** και θα εισάγουμε ορισμένες έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν στα ακόλουθα κεφάλαια όπου θα ασχοληθούμε με την αποτίμηση ορισμένων χρηματοοικονομικών συμβολαίων.

1.2 Αγορές με διακριτό σύνολο καταστάσεων.

Οι έννοιες αυτές μπορούν να κατανοηθούν καλύτερα να τις εισάγουμε αρχικά για αγορές τίτλων με διακριτό αριθμό καταστάσεων. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μία οικονομία η οποία λειτουργεί κάτω από συνθήκες **αβεβαιότητας**. Θεωρούμε επίσης ότι όλες οι πιθανές καταστάσεις της οικονομίας αυτής αποτελούν ένα **διακριτό** σύνολο από S καταστάσεις $\{1, 2, ...s\}$. Κάθε φορά, μόνο μία από τις καταστάσεις αυτές μπορεί να πραγματοποιηθεί και κάθε φορά μία οικονομική μονάδα (agent , συναλλασόμενος) δεν γνωρίζει με σιγουριά ποιά από όλες τις καταστάσεις θα είναι. Προς το παρόν θα θεωρήσουμε ότι η οικονομία την οποία μελετάμε έχει δύο μόνο περιόδους $t = 0$ και $t = 1$ και ο συναλλασόμενος ανακαλύπτει ποιά είναι η πραγματική κατάσταση της οικονομίας την χρονική στιγμή $t = 1$. Το μοντέλο φυσικά μπορεί να γενικευτεί και για περισσότερες από μία περιόδους.

1.2.1 Περιουσιακά στοιχεία και χαρτοφυλάκια.

Ορισμός 1.2.1 *Ένα* **περιουσιακό στοιχείο** *ή* **χρεόγραφο** *είναι ένας τίτλος (ή συμβόλαιο) για να λάβουμε ένα ποσό r_i την χρονική στιγμή $t = 1$, αν η κατάσταση i της οικονομίας πραγματοποιηθεί. Έχουμε λοιπόν ένα διάνυσμα $(r_1, r_2, ..., r_s) \in \mathbb{R}^S$ το οποίο είναι το* **διάνυσμα απόδοσης** *του τίτλου.*

Στην περίπτωση αυτή οι τίτλοι ονομάζονται χρηματοοικονομικοί τίτλοι γιατί αντιστοιχούν σε χρηματικά ποσά. Ένα τίτλος μπορεί κάλλιστα να αντιστοιχεί σε ένα αγαθό (π.χ. πετρέλαιο, σιτάρι κλπ.) και στην περίπτωση αυτή ονομάζονται πραγματικοί τίτλοι (real assets). Το βιβλίο αυτό ασχολείται ως επί το πλείστον με χρηματοοικονομικούς τίτλους, αλλά οι μέθοδοι που αναπτύσσονται έχουν γενικότερη ισχύ και μπορεί να εφαρμοστούν εξίσου καλά σε πραγματικούς τίτλους. Ένας συναλλασόμενος μπορεί να έχει παραπάνω από ένα τίτλο στην κατοχή του.

Η ιδέα των καταστάσεων μίας οικονομίας (ή καταστάσεων του κόσμου) και των τίτλων μπορεί να φαίνεται λίγο ασαφής σε πρωτη προσέγγιση αλλά είναι πολύ φυσική. Ας θεωρήσουμε τα ακόλουθα απλά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.2.1 *Ένας μικροπωλητής ειδικεύεται σε κουλούρια και παγωτά, ανάλογα με τον καιρό. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η ποσότητα των κουλουριών που έχει στο απόθεμα του ο μικροπωλητής μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας τίτλος* 1 *και η ποσότητα των παγωτών μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας τίτλος* 2. *Ο καιρός μπορεί να είναι είτε ζεστός είτε κρύος. Για τον συγκεκριμένο συναλλαγόμενο, οι καταστάσεις της οικονομίας (καταστάσεις του κόσμου) είναι 2. Η κατάσταση 1 αντιστοιχεί σε κρύο και η κατάσταση 2 αντιστοιχεί σε ζέστη. Μία κρύα μέρα ο μικροπωλητής θα πουλήσει κουλούρια αξίας 100 bhat* [1] *ενώ σε μία ζεστή μέρα θα πουλήσει κουλούρια αξίας 10 bhat . Το διάνυσμα απόδοσης του τίτλου 1 είναι* $(100, 10)$ *(παραλείπονται οι μονάδες). Μία κρύα μέρα ο μικροπωλητής θα πουλήσει παγωτά αξίας 20 bhat ενώ μία ζεστή μέρα θα πουλήσει παγωτά αξίας 200 bhat . Το διάνυσμα απόδοσης του τίτλου 2 είναι* $(20, 200)$. *Το γεγονός ότι στο παράδειγμα αυτό ο αριθμός των τίτλων είναι ίσος με τον αριθμό των καταστάσεων της οικονομίας οφείλεται σε σύμπτωση.*

Θα ακολουθήσουν τώρα δύο παραδείγματα τα οποία είναι σημαντικά για την συνέχεια του βιβλίου.

Παράδειγμα 1.2.2 *Ένα παράδειγμα τίτλου είναι μία* **μετοχή**. *Μία μετοχή είναι ένας τίτλος που επιτρέπει στον κάτοχο του να 'έχει' στην διάθεση του ένα μέρος μίας επιχείρησης. Η αξία αυτού του τίτλου είναι λοιπόν η αξία του τμήματος της επιχείρησης που αντιστοιχεί στην μετοχή. Οι διαφορετικές καταστάσεις του κόσμου, είναι οι διαφορετικές πιθανές καταστάσεις της παγκόσμιας οικονομίας (δεδομένων των εθνικών και παγκόσμιων συνθηκών). Θα θεωρήσουμε προς το παρόν ότι οι καταστάσεις της οικονομίας συνιστούν ένα διακριτό σύνολο που αποτελείται από* S *διαφορετικές καταστάσεις. Σε κάθε μία από ιτς καταστάσεις αυτές η επιχείρηση έχει διαφορετική απόδοση και συνεπώς διαφορετική αξία. Έτσι, ο τίτλος έχει* S *διαφορετικές αποδόσεις οι οποίες και φτιάχνουν το διάνυσμα απόδοσης. Η κατάσταση του κόσμου (της οικονομίας) η οποία 'πραγματοποιήθηκε' από όλες τις πιθανές καταστάσεις αποκαλύπτεται την χρονική στιγμή που αποφασίζουμε να πωλήσουμε την μετοχή.*

Παράδειγμα 1.2.3 *Ας θεωρήσουμε τώρα ένα τίτλο του οποίου η απόδοση εξαρτάται από την απόδοση ενός άλλου τίτλου. Τέτοιοι τίτλοι ονομάζονται* **παράγωγα**. *Ένα μεγάλο μέρος της μαθηματικής θεωρίας της χρηματοοικονομικής ασχολείται με την αποτίμηση τέτοιων τίτλων. Ένα παράδειγμα τέτοιου τίτλου είναι τα*

[1] Νόμισμα της Ταϊλάνδης.

δικαιώματα (options). Στην περίπτωση αυτή, μία μετοχή είναι ο πρωτεύοντας τίτλος με διάνυσμα απόδοσης $r \in \mathbb{R}^S$. Ένα **δικαίωμα ανάκλησης Ευρωπαϊκού τύπου** *(***European call** *) επάνω στην μετοχή αυτή με* **strike price** *c είναι ένα συμβόλαιο που επιτρέπει στον κάτοχο τουνα αγοράζει την μετοχή, αφού αποκαλυφθεί η πραγματική κατάσταση της οικονομίας αλλά πρίν πληρωθούν οι αποδόσεις της μετοχής, για την τιμή strike c. Το διάνυσμα απόδοσης του τίτλου αυτού εξαρτάται από το διανυσμα απόδοσης της μετοχής (underlying asset) και την strike price c και είναι*

$$r(c) = (max\{0, r_1 - c\}, ...max\{0, r_s - c\})$$

όπου $r = (r_1, .., r_s)$ είναι το διάνυσμα απόδοσης της μετοχής.

Ορισμός 1.2.2 *Μία δομή τίτλων ονομάζεται* **αγορά***.*

Ορισμός 1.2.3 *Θεωρούμε τώρα ότι έχουμε ένα δεδομένο σύνολο τίτλων, με τους οποίους μπορούμε να συναλλασσόμαστε ελεύθερα την χρονική στιγμή $t = 0$. Ο κάθε τίτλος k χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα απόδοσης $r_k \in \mathbb{R}^s$. Ο συνολικός αριθμός τίτλων είναι K. Ο αριθμός κάθε είδος τίτλου που έχουμε στην κατοχή μας δίνεται από το διάνυσμα $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_k) \in \mathbb{R}^K$ το οποίο αποκαλείται* **χαρτοφυλάκιο** *(ο συμβολισμός αυτός σημαίνει ότι έχουμε z_1 μονάδες του τίτλου 1 κλπ). Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι το z_i δεν είναι απαραίτητα θετικό, και αυτό σημαίνει ότι ένας συναλλασσόμενος μπορεί να είναι short σε κάποιο τίτλο.*

Η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου είναι μία $S \times K$ μήτρα. Το r_{ik} $1 \leq i \leq S$, $1 \leq k \leq K$ στοιχείο της μήτρας αντιστοιχεί στην απόδοση του k τίτλου αν πραγματοποιηθεί η i κατάσταση της οικονομίας.

Θα ορίσουμε τώρα την πολύ σημαντική έννοια της **πληρότητας**.

Ορισμός 1.2.4 *Μία δομή τίτλων με $S \times K$ μήτρα αποδόσεων P ονομάζεται* **πλήρης** *αν $rankR = S$.*

Ας παραμείνουμε λίγο ακόμα σε αυτό το σημαντικό ορισμό. Από την γραμμική άλγεβρα, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα υποσύνολο από S τίτλους με γραμμικά ανεξάρτητες αποδόσεις. Συνεπώς οποιοδήποτε διάνυσμα που ανήκει στο $\mathbb{R}^S$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων απόδοσης αυτών των S τίτλων. Συνεπώς σε αυτό το πλαίσιο μπορούμε να συνθέσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που θα αποτελείται από αυτούς τους S τίτλους η αξία του οποίου μπορεί να **αναπαράγει** την αξία **οποιουδήποτε** τίτλου. Θα επανέλθουμε στον ορισμό αυτό στο σύντομο μέλλον. Ας δώσουμε δύο παραδείγματα:

Παράδειγμα 1.2.4 *Ας θεωρήσουμε ότι $S = 4$. Ας πάρουμε ένα τίτλο που είναι μία μετοχή με διάνυσμα απόδοσης $r = (1, 4, 2, 3)$. Ας πάρουμε τώρα 3 δικαιώματα ανάκλησης Ευρωπαϊκού τύπου με strike prices $3.5, 2.5, 1.5$. Το χαρτοφυλάκιο το οποίο απαρτίζεται από τα 3 αυτά δικαιώματα και την μετοχή έχει μήτρα απόδοσης*

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 2.5 & 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Ένας απλός υπολογισμός μας δείχνει ότι $rankR = 4$ *οπότε αυτή η δομή τίτλων είναι πλήρης.*

Αντίθετα, αν επιλέξουμε τις strike prices ίσες με $0.5, 1, 1.5$*, μπορούμε να δούμε ότι το χαρτοφυλάκιο το οποίο απαρτίζεται από την μετοχή και τα τρία αυτά δικαιώματα ανάκλησης (call options) έχει μήτρα απόδοσης*

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0.5 & 3.5 & 1.5 & 2.5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2.5 & 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Ένα απλός υπολογισμός μας δείχνει ότι η μήτρα αυτή έχει $rankR = 3$ *οπότε αυτή η δομή τίτλων δεν είναι πλήρης.*

Μία άλλη σημαντική ιδέα είναι η ιδέα του **arbitrage** . Ας θεωρήσουμε ότι οι τιμές των τίτλων δίνονται από το διάνυσμα $q \in \mathbb{R}^n$. Η αξία του χαρτοφυλακίου στην αγορά δίνεται από το $q \cdot z$. Η απόδοση (payoff) αυτού του χαρτοφυλακίου δίνεται από το διάνυσμα $Rz \in \mathbb{R}^S$ το οποίο δίνει την απόδοση του χαρτοφυλακίου σε κάθε κατάσταση της οικονομίας.

Ορισμός 1.2.5 *Λέμε ότι υπάρχει* **arbitrage***αν υπάρχει ένα χαρτοφυλάκιο* z_a *τέτοιο ώστε* $q \cdot z \leq 0$ *και* $Rz > 0$*, ή* $q \cdot z < 0$ *και* $Rz \geq 0$.

Αυτό σημαίνει ότι arbitrage είναι ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο έχει αξία στην αγορά η οποία είναι μικρότερη από την απόδοση του, δηλαδή ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο προσφέρει κάτι για τίποτα! Αυτό είναι το απίαστο (·) όνειρο του καθενός, αλλά στην θεωρία της χρηματοοικονομικής δεν επιτρέπεται.

Η έννοια του arbitrage είναι πολύ στενά συνδεδεμένη με την έννοια της ισορροπίας. Για την ακρίβεια, αν έχουμε arbitrage αυτό συνεπάγεται κατάσταση μη-ισορροπίας. Αυτό μπορεί να φανεί ως εξής: Αν έχουμε arbitrage ο κάθε ορθολογικός επενδυτής θα προσπαθούσε να κατασκευάσει τέτοια χαρτοφυλάκια και συνεπώς ορισμένοι τίτλοι θα είχαν συνεχώς περισσότερη ζήτηση από κάποιους άλλους. Αυτό θα δημιουργούσε ανισορροπία στην αγορά (μία κατάσταση ισορροπίας συνήθως νοείται ως μία κατάσταση που η προσφορά εξισώνεται με την ζήτηση).

1.3 Αγορές σε συνεχή χρόνο.

Έχοντας θέσει ορισμένες από τις βασικές ιδέες σε διακριτό χρόνο μπορούμε να τις γενικεύσουμε σε συνεχή χρόνο. Θα θεωρήσουμε ότι οι καταστάσεις της οικονομίας δεν αποτελούν πλέον ένα διακριτό σύνολο. Επιπλέον η τυχαιότητα στην επίλογη της τελικής κατάστασης της οικονομίας η οποία και θα πραγματοποιηθεί 'προβάλλεται' επάνω στην απόδοση των τίτλων σαν μία κίνηση Brown που δίνει μία διακύμανση επάνω σε μία ντετερμινιστική μεταβολή της τιμής. Θα θεωρήσουμε λοιπόν πως έχουμε μία συλλογή από $n + 1$ τίτλους που θα μπορεί να είναι οτιδήποτε (μετοχές, ομόλογα, παράγωγα κλπ.). Οι τιμές των τίτλων αυτών παρουσιάζουν διακυμάνσεις οι οποίες μπορεί να μοντελοποιηθούν σαν διαχύσεις κατά Itô .

1.3.1 Τίτλοι και χαρτοφυλάκια.

Θα θεωρήσουμε ότι έχουμε $n+1$ τιτλους οι αποδόσεις των οποίων την χρονική στιγμή t θα συμβολίζονται με το διάνυσμα $S(t\omega) = (S_0(t,\omega), S_1(t,\omega), ..., S_n(t,\omega))$. Το διάνυσμα αυτό αποτελείται από μία συλλογή στοχαστικών διαδικασιών, παραμετρισμένων με το $t \in I \subset \mathbb{R}^+$ δηλαδή τον χρόνο. Με I συμβολίζουμε ένα διάστημα, υποσύνολο, της πραγματικής ευθείας.

Στα μοντέλα που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ, θα αρκεστούμε στο να θεωρήσουμε ότι οι τιμές των τίτλων είναι στοχαστικές διαδικασίες Itô της μορφής

$$\begin{aligned} dS_0 &= r(t,\omega)S_0 dt \\ dS_i &= \mu_i(t,\omega,S_i)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t,\omega,S_i)dB_j(t) = \mu_i(t,\omega,S_i)dt + \sigma d\mathbf{B}(t) \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι παραπάνω από μία κίνησεις Brown εμφανίζονται στην εξίσωση. Αυτό μοντελοποιεί την ύπαρξη περισοτέρων της μίας και ανεξάρτητων πηγών τυχαιότητας. Για παράδειγμα αν S_1 είναι η τιμή της μετοχής μίας βιομηχανίας υπολογιστών και S_2 είναι η τιμή της μετοχής μίας βιομηχανίας τροφίμων, τότε μία φυσική καταστροφή (την οποία θεωρούμε πως αντιπροσωπεύει η κίνηση Brown B_1) μπορεί να επηρεάσει την S_2 περισσότερο από την τιμή S_1. Αντίθετα η ανακάλυψη ενός καινούργιου επεξεργαστή (την οποία μοντελοποιούμε με την κίνηση Brown B_2) θα επηρεάσει την S_1 και πιθανόν να μην έχει την παραμικρή επίδραση επάνω στην S_2.

Παράδειγμα 1.3.1 *Ενα απλό παράδειγμα είναι το ακόλουθο. Θεωρούμε μία αγορά που αποτελείται απο δύο τίτλους, ένα βέβαιο τίτλο αξίας $S_0(t)$ και ένα αβέβαιο τίτλο αξίας $S_1(t)$. Η εξέλιξη του βέβαιου τίτλου δίνεται από την εξίσωση*

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt$$

όπου r είναι η απόδοση του βέβαιου τίτλου (π.χ. τραπεζικός λογαριασμος ή ένα ομόλογο). Θα θεωρήσουμε ότι το r είναι σταθερό. Η σχέση αυτή είναι ουσιαστικά μία συνήθης διαφορική εξίσωση η λύση της οποίας μας δίνει την τιμή του βέβαιου τίτλου κάθε χρονική στιγμή. Είναι φανερό ότι

$$S_0(t) = S_0(0)e^{rt}$$

Η εξέλιξη του αβέβαιου τίτλου (μετοχής) θα δινεται από την διαδικασία Itô

$$dS_1(t) = \mu S_1(t)dt + \sigma S_1(t)dB_t$$

δηλαδή θεωρούμε ότι η απόδοση της μετοχής είναι ανάλογη της τιμής της και οι διακυμάνσεις της μετοχής είναι επίσης ανάλογες της τιμής της πολλαπλασιασμένες με την μεταβολή ης κίνησης Brown. Ο συντέλεστής αναλογίας σ ονομάζεται πτητικότητα της μετοχής (volatility). Θεωρούμε ότι η αβεβαιότητα στην τιμή της μετοχής εισάγεται από μία μόνο κίνηση Brown, B_t. Το μοντέλο αυτο το *αναγνωρίζουμε σαν την γεωμετρική κινηση Brown και μια απλή εφαρμογή του τύπου του Itô στην συνάρτηση* $f(x) = ln(x)$ *για* $x = S_1(t)$ *μας δίνει ότι*

$$S_1(t) = S_1(0)exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right)$$

Το παράδειγμα αυτό εισάγει ένα τυπικό μοντέλο των χρηματοοικονομικών, το μοντέλο Black-Scholes.

Παράδειγμα 1.3.2 *Ένα διαφορετικο μοντέλο μπορεί να είναι το ακόλουθο. Θεωρούμε και πάλι δύο τίτλους στην αγορά ένα βέβαιο τίτλο αξίας* $S_0(t)$ *και ένα αβέβαιο τίτλο αξίας* $S_1(t)$. *Ο βέβαιος τίτλος και πάλι ακολουθεί τον νόμο*

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt$$

ενώ τώρα ο αβέβαιος τίτλος είναι η διαδικασία Itô

$$dS_1(t) = \delta(S_1(t) - \nu)dt + \sigma dB_t$$

Η διαδικασία του αβέβαιου τίτλου είναι η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck η οποία έχει την ιδιότητα να επιστρέφει στο μέσο (mean reversion). Η διαδικασία αυτή πολλές φορές χρησιμοποιείται σαν μοντέλο για τις τιμές πραγματικών τίτλων (π.χ. αγαθά).

Παράδειγμα 1.3.3 *Ένα ακόμα συνηθισμένο μοντέλο είναι το ακόλουθο. Θεωρούμε ένα βέβαιο τίτλο αξίας* $S_0(t)$ *και ένα αβέβαιο τίτλο αξίας* $S_1(t)$. *Ο βέβαιος τίτλος ακολουθεί τον νόμο*

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt$$

θεωρούμε τώρα ότι η απόδοση του βέβαιου τίτλου εξαρτάται και από τον χρονο (δηλαδή θεωρούμε π.χ. οτι το τραπεζικό επιτόκιο μεταβάλλεται με το χρόνο). Η αξία του βέβαιου τίτλου κάθε χρονική στιγμή δίνεται από το

$$S_0(t) = S_0(0)exp\left(\int_0^t r(t')dt'\right)$$

Η τιμή του αβέβαιου τίτλου δίνεται από την διαδικασία Itô

$$dS_1(t) = \mu S_1(t)dt + \sigma S_1(t)^{1-\alpha}dB_t, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Το μοντέλο αυτό ονομάζεται το μοντέλο σταθερής ελαστικότητας της διακύμανσης (constant elasticity of variance model) και προτάθηκε από τους Cox και Ross το 1976 [2] *για την ερμηνεία ενος φαινομένου που σχετίζεται με τις τιμές των παραγώγων (volatility smile). Στο μοντέλο αυτό η πτητικότητα της μετοχής ισούται με* $\sigma S_1^{-\alpha}$. *Όταν* $\alpha = 0$ *ξαναγυρνάμε στο αρχικό μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown.*

[2] J. C. Cox and S. A. Ross, *"The valuation of options for alternative stochastic processes"*, Journal of financial economics, 145-166, (1976)

Ένα χαρτοφυλάκιο είναι μία $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη διαδικασία

$$\theta(t,\omega) = (\theta_0(t,\omega), ..., \theta_n(t,\omega)) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Το $\theta_i(t,\omega)$ αντιστοιχεί στα κομμάτια του τίτλου i που έχει ο επενδυτής στην διάθεση του την χρονική στιγμή t. Η ιδιότητα του ότι το χαρτοφυλάκιο είναι προσαρμοσμένη διαδικασία σημαίνει ότι ένας συναλλασσόμενος παίρνει την απόφαση του πως θα αναπροσαρμόσει το χαρτοφυλάκιο του την χρονική στιγμή t έχοντας πληροφορία για τις καταστάσεις που έλαβε η οικονομία μέχρι την χρονική στιγμή αυτή. Δεν επιτρέπεται με άλλα λόγια να ρίχνουμε κλεφτές ματιές στο μέλλον! Σημειώνουμε ότι τα θ_i, $i = 0, ..., n$ μπορεί να παίρνουν και αρνητικές τιμές, δηλαδή ένα επενδυτής μπορεί να έχει και ανοιχτή θέση σε κάποιους τίτλους.

Η **αξία** ενός χαρτοφυλακίου $\theta(t,\omega)$ την χρονική στιγμή t δίνεται από την σχέση

$$V^\theta(t,\omega) := \theta \cdot S = \sum_{i=0}^{n} \theta_i(t,\omega) S_i(t,\omega)$$

Η αξία του χαρτοφυλακίου είναι και αυτή μια στοχαστική διαδικασία η οποία ειναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_t$.

Μπορούμε περαιτέρω να ορίσουμε την **διαδικασία κερδών** (**gains process**) ενός τίτλου και σαν γενίκευση του την διαδικασία κερδών ενός χαρτοφυλακίου. Ας θεωρήσουμε μία διαμέριση του διαστήματος $(0,t)$ και ότι ο αριθμός των τίτλων i, θ_i που έχουμε στην κατοχή μας παραμένει σταθερός στο διάστημα $[t_{k-1}, t_k]$ στο επίπεδο $\theta_i(t_{k-1})$. Στο διάστημα αυτό η απόδοση του τίτλου i μεταβλήθηκε κατά $S_i(t_k) - S_i(t_{k-1})$. Το συνολικό κέρδος (θετικό ή αρνητικό) του συναλλασσόμενου λόγω της μεταβολής της τιμής του τίτλου αυτού κατά το διάστημα αυτό είναι $\theta_i(t_{k-1})[S_i(t_k) - S_i(t_{k-1})]$. Αθροίζοντας τις συνεισφορές αυτές επάνω σε όλα τα διαστήματα της διαμέρισης και παίρνοντας το όριο της πολύ λεπτής διαμέρισης $\Delta t \to 0$ παίρνουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^t \theta_i(t) dS_i(t)$ το οποίο δεν είναι τίποτε άλλο από το στοχαστικό ολοκλήρωμα της προβολής της διαδικασίας χαρτοφυλακίου στον τίτλο i, επάνω στην στοχαστική διαδικασία που δίνει την τιμή του τίτλου αυτού. Στα πλαίσια του μοντέλου για την αγορά το οποίο αναπτύξαμε, αυτό είναι το στοχαστικό ολοκλήρωμα της στοχαστικής διαδικασίας θ_i επάνω στην διάχυση Itô S_i. Αν θέλουμε να βρούμε την διαδικασία κερδών για ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο δεν χρείαζεται παρά να αθροίσουμε τις διαδικασίες κερδών για τον κάθε τίτλο που απαρτίζει το χαρτοφυλάκιο.

$$G(t) = \sum_{i=0}^{n} \int_0^t \theta_i dS_i$$

Βλέπουμε συνεπώς πως στοχαστικά ολοκληρώματα επάνω σε κινήσεις Brown ή γενικότερα επάνω σε διαδικασίες Itô εμφανίζονται με πολύ φυσικό τρόπο στην χρηματοοικονομική. Η μόνη παραδοχή που έγινε εδώ είναι η παραδοχή σχετικά με τον τροπο που γίνεται η αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου, η οποία είναι και αρκετά λογική.

Μία ακόμα σημαντική έννοια είναι αυτή του **αυτό-χρηματοδοτούμενου** χαρτοφυλακίου.

Ορισμός 1.3.1 *Ένα χαρτοφυλάκιο ονομάζεται* **αυτο-χρηματοδοτούμενο** *αν η αξία του μπορεί να προσδιοριστεί αποκλειστικά από τα κέρδη που προέρχονται από τους τίτλους που το απαρτίζουν*

$$V^{\theta}(t) = V^{\theta}(0) + \int_0^t \theta(t^{'}) \cdot dS(t^{'})$$

Σε διαφορική μορφή η παραπάνω σχέση γίνεται

$$dV^{\theta} = \theta \cdot dS$$

Σε ένα αυτό-χρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο μπορούμε να επενδύσουμε ξανά μόνο τα κέρδη του χωρίς να προσθέσουμε καθόλου εξωτερικά ποσά. Με άλλα λόγια μεταβολές στα ποσά που έχουμε στα ομόλογα μπορούν να γίνουν λόγω μεταβολών στα ποσά που έχουμε τοποθετημένα στις μετοχές, δεν υπάρχει εισροή ή εκροή κεφαλαίων. Με μία απλή εφαρμογή του τύπου του Itô βλέπουμε πως για ένα αυτο-χρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο ισχύει $S \cdot d\theta = 0$.

Σημείωση: Τα χαρτοφυλάκια τα οποία θα μελετήσουμε ικανοποιούν την τεχνική συνθήκη $V^{\theta}(t,\omega) \geq -K$ ς.β. Η συνθήκη αυτή σημαίνει ότι το χρέος που μπορεί να επιτραπεί είναι πεπερασμένο.

Παράδειγμα 1.3.4 *Ας θεωρήσουμε το μοντέλο της αγοράς*

$$S(t) = (S_0(t), ..., S_n(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Θεωρείστε επίσης ότι υπάρχει μία βαθμωτή στοχαστική διαδικασία $Z \in \mathbb{R}$ και μία διανυσματική στοχαστική διαδικασία $q = (q_0(t), q_1(t), ..., q_n(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ τέτοιες ώστε

$$\sum_{i=0}^{n} q_i(t) = 1$$

$$dZ(t) = Z(t) \sum_{i=0}^{n} q_i(t) \frac{dS_i(t)}{S_i(t)}$$

Δείξτε οτι αν ορίσουμε το χαρτοφυλάκιο $\theta(t)$ βάσει των τύπων

$$\theta_i(t) = \frac{q_i(t)Z(t)}{S_i(t)}, \quad i = 0, ..., n$$

το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι αυτοχρηματοδοτούμενο.

Παρατηρούμε ότι

$$V^{\theta}(t) = \theta \cdot S(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{q_i(t)Z(t)}{S_i(t)} S_i(t) = Z(t) \sum_{i=0}^{n} q_i(t) = Z(t)$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} dV^{\theta}(t) &= dZ(t) = Z(t)\sum_{i=0}^{n} q_i(t)\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} \\ &= Z(t)\sum_{i=0}^{n}\frac{\theta_i(t)}{Z(t)}dS_i(t) = \sum_{i=0}^{n}\theta_i(t)dS_i(t) \end{aligned}$$

Άρα, το χαρτοφυλάκιο θ είναι αυτοχρηματοδοτούμενο.

Παράδειγμα 1.3.5 *Θεωρείστε ένα για την αγορά $S = (S_0(t), S_1(t))$ όπου S_0 η τιμή του βέβαιου τίτλου (θεωρούμε σταθερή απόδοση r) και S_1 η τιμή του αβέβαιου τίτλου. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την θέση $\theta_1(t,\omega)$ στον αβέβαιο τίτλο. Δείξτε ότι μπορούμε πάντοτε να επιλέξουμε την θέση μας στον βέβαιο τίτλο θ_0 με βάση τον κανόνα*

$$\begin{aligned} \theta_0(t) &= V(0) + e^{-rt}A(t) + r\int_0^t A(t')e^{-rt'}dt' \\ A(t) &= \int_0^t \theta_1(t')dS_1(t') - \theta_1(t)S_1(t) \end{aligned}$$

έτσι ώστε να έχουμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο.

Για την τιμή του βέβαιου τίτλου ισχύει

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt \Longrightarrow S_0(t) = S_0(0)e^{rt}$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσουμε ότι $S_0(0) = 1$. Η αξία του χαρτοφυλακίου θ είναι

$$V^{\theta}(t) = \theta_0 S_0 + \theta_1 S_1 = V(0)e^{rt} + \int_0^t \theta_1 dS_1 + re^{rt}\int_0^t A(t')e^{-rt'}dt'$$

Παίρνουμε τώρα την μεταβολή

$$\begin{aligned} dV^{\theta}(t) &= rV(0)e^{rt}dt + \theta_1 dS_1 + re^{rt}(A(t)e^{-rt} + r\int_0^t A(t')e^{-rt'}dt') \\ &= (V(0) + A(t)e^{-rt} + r\int_0^t A(t')e^{-rt'}dt')re^{rt}dt + \theta_1 dS_1 = \theta_0 dS_0 + \theta_1 dS_1 \end{aligned}$$

Συνεπώς, το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι αυτοχρηματοδοτούμενο.

1.3.2 Κανονικοποιημένες τιμές τίτλων.

Οι τιμές των τίτλων θα μας παρέχουν περισσότερες πληροφορίες αν είναι κανονικοποιημένες σε σχέση με κάποια συγκεκριμένη ποσότητα που έχει κάποια σημασία. Μία τέτοια ποσότητα μπορεί να είναι η τιμή του ομολόγου. Βέβαια σε διαφορετικά προβλήματα η ποσότητα αυτή θα πρέπει να επιλεγεί με διαφορετικό τρόπο. Επι παραδείγματι αν ενδιαφερόμαστε για την μελέτη συναλλαγματικών ισοτιμιών τότε η ποσότητα βάσει της οποίας θα πρέπει να κανονικοποιήσουμε μπορεί να είναι η τιμή του τοπικού νομίσματος. Ένα τυπικό παράδειγμα τέτοιας κανονικοποίησης είναι η προεξόφληση (discounting).

Παράδειγμα 1.3.6 Προεξοφλημένες τιμές (discounted prices). *Ένας κοινός τρόπος για την κανονικοποίηση της αγοράς είναι χρησιμοποιήσουμε ως μονάδα μέτρησης την αξία του βέβαιου τίτλου δηλαδή να ορίσουμε* $S_i^*(t) = S_0^{-1} S_i$, $i = 1...n$. *Στην περίπτωση αυτή μία κανονικοποιημένη αγορά θα έχει την μορφή* $S^* = (1, S_1^*, ..., S_n^*)$. *Μπορεί κανείς να δει έυκολα ότι*

$$S_0^{-1}(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s,\omega)\,ds\right)$$

ή στην πιο απλή περίπτωση όπου η απόδοση του βέβαιου τίτλου είναι σταθερή και ίση με r

$$S_0^{-1}(t) = e^{-rt}$$

Η $S_i^*(t)$ *είναι η προεξοφλημένη τιμή του τίτλου* i *που εμπεριέχει κίνδυνο, δηλαδή η τιμή του τίτλου που αν τοποθετηθεί σε ομόλογα (σε ένα τραπεζικό λογαριασμό) την χρονική στιγμή* $t = 0$ *θα αποφέρει σήμερα (την χρονική στιγμή* t*) την σημερινή τιμή του τίτλου* S_i.

Παράδειγμα 1.3.7 Προεξοφλημένη διαδικασία αξίας (Discounted value process). *Ας θεωρήσουμε ότι ο ρυθμός απόδοσης του βέβαιου τίτλου είναι* $r(t,\omega)$. *Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την προεξοφλημένη διαδικασία αξίας ενός χαρτοφυλακίου ως*

$$\bar{V}^\theta(t) = S_0^{-1} V^\theta(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s,\omega)\,ds\right) V^\theta(t).$$

Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\bar{V}^\theta(t) = V_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^n \theta_i dS_i^*(t)$$

αν και μόνο αν το χαρτοφυλάκιο είναι αυτο-χρηματοδοτούμενο.

Απόδειξη: *Πρώτα πρέπει να βρούμε την ακριβή μορφή του διαφορικού* dS_i^*. *Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα του Itô το οποίο και δίνει*

$$dS_i^*(t) = -rS_0^{-1}(t)S_i(t)dt + S_0^{-1}dS_i(t).$$

Ας υποθέσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο είναι αυτο-χρηματοδοτούμενο. Εφαρμόζοντας το λήμμα του Itô στο $\bar{V}^\theta(t)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} d\bar{V}^\theta(t) &= -r\bar{V}^\theta(t)dt + S_0^{-1}(t)dV^\theta(t) \\ &= -rS_0^{-1}(t)\left(\sum_{i=0}^n \theta_i S_i(t)\right)dt + S_0^{-1}(t)(\sum_{i=0}^n \theta_i dS_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \theta_i dS_i^*(t) \end{aligned}$$

το οποίο είναι αρκετό για την απόδειξη του ισχυρισμού αν προσέξουμε ότι $V^{\theta*}(0) = V^\theta(0)$. Τονίζουμε ότι το αθροισμά τώρα είναι μόνο επάνω στους τυχαίους τίτλους.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, αρκεί να πάρουμε το $V^\theta(t) = S_0(t)V^{\theta*}(t)$ και να αναστρέψουμε τα βήματα του παραπάνω επιχειρήματος. □

Το παραπάνω απλό αποτέλεσμα ισχύει για **οποιαδήποτε** κανονικοποίηση των τιμών των τίτλων, αρκεί η διαδικασία την οποία χρησιμοποιούμε για την κανονικοποίηση να είναι μία αυστηρά θετική διαδικασία Itô . Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό στα χρηματοοικονομικά σαν το **numeraire invariance theorem** . Η διαδικασία την οποία χρησιμοποιούμε για την κανονικοποίση ονομάζεται αποπληθωριστής (**deflator**).

1.3.3 Arbitrage.

Θα επανέλθουμε τώρα στην έννοια του arbitrage και στο πως αυτή μπορεί να γενικευθεί στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου.

Ορισμός 1.3.2 *Ένα αυτο-χρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο $\theta = (\theta_0, \theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ονομάζεται* **arbitrage** *(για την αγορά $S(t) = (S_0(t), S_1(t), ..., S_n(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$) αν η διαδικασία αξίας V^θ που αντιστοιχεί σε αυτό ικανοποιεί την συνθήκη $V^\theta(0) = 0$ και $V^\theta(T) \geq 0$ ς.β. και $P(V^\theta(T)) > 0) > 0$.*

Σημείωση: Ένας ισοδύναμος ορισμός μπορεί να είναι και ο $V^\theta(0) = 0$ και $E[V(T)] > 0$, ή επίσης $V^\theta(0) < 0$ και $E[V(T)] > 0$.

Ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο ουσιαστικά παράγει κέρδος χωρίς κίνδυνο από το τίποτα!

Όπως και στην περίπτωση του διακριτού χρόνου το arbitrage αντιστοιχεί σε μία μη σταθερή κατάσταση η οποία αντιβαίνει στην κατάσταση ισορροπίας.

Όπως και στην περίπτωση του διακριτού χρόνου, η έννοια του arbitrage έχει μεγάλη συνάφεια με την **ιδιότητα martingale** των προεξοφλημένων τιμών των τίτλων ή ακόμα καλύτερα με την ύπαρξη ενός μέτρου πιθανότητας κάτω από το οποίο οι προεξοφλημένες τιμές των αβέβαιων τίτλων $S^*(t)$ είναι martingale . Επίσης η έννοια του arbitrage είναι ανεξάρτητη από την συγκεκριμένη κανονικοποιήση των τιμών των τίτλων. Με άλλα λόγια ένα χαρτοφυλάκιο είναι ένα arbitrage για τις τιμές των τίτλων S_i αν και μόνο αν είναι arbitrage και για τις κανονικοποιημένες τιμές των τίτλων S^*. Ο ισχυρισμός αυτός είναι προφανής από την έννοια της κανονικοποίησης και της προεξόφλησης.

Παράδειγμα 1.3.8 *Θεωρείστε ότι για ένα μοντέλο της αγοράς* $\{S\}$, $S \in \mathbb{R}^{n+1}$ *υπάρχει ένα μέτρο* Q *κάτω από το οποίο οι προεξοφλημένες τιμές είναι martingale. Θεωρείστε επίσης και ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο* $\theta \in \mathbb{R}^{n+1}$. *Δείξτε ότι η προεξοφλημένη διαδικασία αξίας* $V^{\theta *}(t)$ *του χαρτοφυλακίου αυτού είναι επίσης μία martingale.*

Η προεξοφλημένη διαδικασία αξίας του χαρτοφυλακίου θ *δίνεται από την σχέση*

$$V^{\theta *}(t) = V_0 + \int_0^t \theta(t^{'}) \cdot dS^*(t^{'}) = V_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \theta_i(t^{'}) dS_i^*(t^{'})$$

Εφόσον οι διαδικασίες $S_i^*(t)$, $i = 1, ..., n$ *είναι martingales κάτω από το μέτρο* Q *και τα στοχαστικά ολοκληρώματα* $\int_0^t \theta_i dS_i$ *θα είναι επίσης martingales , συνεπώς και τα αθροίσματα τους.*

Έχουμε το ακόλουθο απλό θεώρημα:

Θεώρημα 1.3.1 *Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα μέτρο* Q *στην* $\mathcal{F}_T$ *τέτοιο ώστε* $P \equiv Q$ *και η κανονικοποιημένη διαδικασία τιμών* $\{S^*(t)\}_{t\in[0,T]}$ *είναι μία martingale ως προς το μέτρο* Q. *Τότε η αγορά* $\{S(t)\}$ *δεν έχει arbitrage .*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο (επενδυτική στρατηγική) $\theta(t)$ είναι ένα arbitrage για την αγορά S^*. Ας ονομάσουμε $V^\theta(t)$ την διαδικασία αξίας για το χαρτοφυλάκιο θ. Η ιδιότητα martingale δίνει ότι

$$E_Q[V^\theta(T)] = V^\theta(0) = 0 \tag{1.1}$$

όπου η πρώτη ισότητα προέρχεται από την ιδιότητα των martingale και η δεύτερη από την συγκεκριμένη τιμή της αρχικής συνθήκης της διαδικασίας αξίας την οποία επιλέξαμε. Από τον ορισμό του arbitrage έχουμε ότι $V^\theta(T,\omega) \geq 0$ ς.β. στο μέτρο P. Από την ισοδυναμία των μέτρων η ιδιότητα αυτή θα ισχύει και στο μέτρο Q. Αυτό, μαζί με την ιδιότητα $P[V^\theta(T) > 0] > 0$ (που με την σειρά του συνεπάγεται ότι $Q[V^\theta(T) > 0] > 0$) μας δίνει ότι

$$E_Q[V^\theta(T)] > 0$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την (1.1). Άρα η αγορά $\{S^*(t)\}$ δεν έχει arbitrage και συνεπώς και η $\{S\}$ δεν έχει επίσης arbitrage. □

Ένα τέτοιο μέτρο Q κάτω από το οποίο η διαδικασία τιμών έχει την ιδιότητα martingale ονομάζεται ένα **ισοδύναμο μέτρο martingale** .

Πώς μπορούμε να αποφανθούμε αν μία αγορά έχει arbitrage ή όχι· Όπως είδαμε από το προηγούμενο θεώρημα, η ύπαρξη ή όχι arbitrage σε μία αγορά σχετίζεται με την ύπαρξη ενός ισοδύναμου μέτρου martingale . Στην περίπτωση που οι διαδικασίες τιμών που σχετίζονται με την αγορά αυτή είναι διαδικασίες Itô έχουμε όμως ήδη συναντήσει ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα σχετικά με την ύπαρξη ισοδύναμων μέτρων martingale , το θεώρημα του Girsanov . Θα το εφαρμόσουμε εδώ για την μελέτη του μοντέλου της αγοράς που εισάγαμε παραπάνω.

Παράδειγμα 1.3.9 Τι μορφή παίρνει η S^* κάτω από ένα ισοδύναμο μέτρο martingale . *Θεωρείστε την διαδικασία της αγοράς*

$$\begin{aligned} dS_0(t) &= rS_0(t)dt, \\ dS_i(t) &= \mu_i(t,S)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t,S)dB_{j,t}, \quad i = 1,...,n \end{aligned}$$

Αν υπάρχει $m-$διάστατη διαδικασία $u(t,\omega) \in M^2(0,T)$ τέτοια ώστε με $S^* = (S_1^*,...,S_n^*)$ να ισχύει

$$\sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t,S)\, u_j = \mu_i(t,S) - rS_i, \quad i = 1,...,n$$

και

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(s,\omega)ds\right)\right] < \infty$$

τότε
(α) Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Girsanov για να δείξετε ότι η διαδικασία

$$\bar{B}(t) = \int_0^t u(,s,\omega)ds + B(t)$$

είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q που ορίζεται από την σχέση

$$dQ = \exp\left(-\int_0^T u\, dB - \frac{1}{2}\int_0^T u^2 dt\right) dP$$

όπου P είναι το μέτρο κάτω από το οποίο η B είναι μία κίνηση Brown και
(β) Δείξτε ότι η προεξοφλημένη διαδικασία τιμών της αγοράς ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} dS_0^*(t) &= 0 \\ dS_i^*(t) &= S_0^{-1}(t)\sigma_i(t,S)d\bar{B}(t), \;\; 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

(ς) Δείξτε ότι οι μη-προεξοφλημένες διαδικασίες τιμών ικανοποιούν τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} dS_0 &= rS_0 dt \\ dS_i &= rS_i + \sigma_i(t,S)d\bar{B}(t), \quad 1 \le i \le n \end{aligned}$$

Υπόδειξη: *Το μέρος (α) είναι μία απλή εφαρμογή του θεωρήματος του Girsanov . Το μέρος (β) μπορεί να δειχθεί εφαρμόζοντας το λήμμα του Itô στην* $S_i^* = S_0^{-1} S_i$ *και χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση του* dS_i *ως προς την νέα διαδικασία* $\bar{B}$. □

Σχόλιο: *Οι διαφορικές εξισώσεις που παίρνουμε για την κανονικοποιημένη διαδικασία κάτω από το νέο μέτρο* Q *δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η* S^* *είναι μία martingale κάτω από το νέο μέτρο, γιατί εν γένει αυτό προυποθέτει και διάφορες ιδιότητες σχετικά με το φραγμένο των λύσεων. Για να έχουμε μία martingale χρειάζεται και η έξτρα συνθήκη* $\int_0^T E_Q[X_0^{-2}\sigma_i^2(t,\omega)]dt < \infty$. *Τότε μπορούμε να πούμε ότι το* Q *είναι ένα ισοδύναμο μέτρο martingale . Τι συμβαίνει στην περίπτωση που έχουμε σταθερά* r, μ *και* σ;

Παράδειγμα 1.3.10 *Υπολογίστε το ισοδύναμο μέτρο martingale για την περίπτωση του μοντέλου της αγοράς Black-Scholes δηλαδή στην περίπτωση που έχουμε ένα βέβαιο και ένα αβέβαιο τίτλο που ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$\begin{aligned} dS_0 &= rS_0 dt \\ dS &= \mu S dt + \sigma S dB_t \end{aligned}$$

δηλαδή στην ειδική περίπτωση $n = m = 1$ *και* $\mu_1(t,S) = \mu S$, $\sigma(t,S) = \sigma S$. *Πως γίνονται διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη των τιμών των τίτλων κάτω από το καινούργιο μέτρο;*

Στην περίπτωση αυτή το σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που θα μας δώσει την στοχαστικη διαδικασία u *εκφυλίζεται σε μία μόνο εξίσωση*

$$\sigma S u = \mu S - r u u = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

Ας θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι mu, r, σ *είναι σταθερές. Το* u *βλεπουμε πως έχει μία ενδιαφέρουσα οικονομική ερμηνεία, είναι η διαφορά του ρυθμού απόδοσης του αβέβαιου από τον βέβαιο τίτλο, διαιρεμένο με την ποσότητα* σ *που μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μέτρο του κινδύνου που περιέχει ο αβέβαιος τίτλος. Το ισοδύναμο μέτρο martingale* Q *θα δίνεται μέσω της παραγώγου Radon-Nikodym*

$$\frac{dQ}{dP} = M_T, \quad M_t = exp\left(-\frac{\mu - r}{\sigma} B_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2\right)$$

Η διαδικασία

$$\bar{B}_t = \frac{\mu - r}{\sigma} t + B_t$$

είναι κίνηση Brown κάτω απο το μέτρο Q.

Η τιμή της μετοχής ακολουθεί την εξίσωση

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB_t = rS(t)dt + \sigma S(t)d\bar{B}_t$$

δηλαδή κάτω από το μέτρο Q, στο οποίο η $\bar{B}_t$ είναι κίνηση Brown η μετοχή έχει τον ίδιο ρυθμό απόδοσης με τον βέβαιο τίτλο. Μπορούμε να θυμηθούμε ότι αυτός είναι και ένας ορισμός του μέτρου που είναι ουδέτερο στον κίνδυνο (μέτρο Arrow-Debreu, ισοδύναμο μέτρο martingale). Η προεξοφλημένη τιμή της μετοχής ακολουθεί την εξίσωση

$$dS^*(t) = (\mu - r)S^*(t) + \sigma S^*(t)dB_t = \sigma S^*(t)d\bar{B}_t$$

Αφού κάτω από το μέτρο Q η $\bar{B}_t$ ειναι κίνηση Brown και η $S^*(t)$ που γράφεται σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα επάνω στην $\bar{B}_t$ θα είναι martingale κάτω από το μέτρο Q.

Μετά από τα παράδειγματα αυτά είμαστε τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.3.2 *(α) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μία διαδικασία $u(t,\omega) \in M^2(0,T)$ τέτοια ώστε $\sigma u = \mu - r\hat{S}$ σχεδόν για κάθε (t,ω) και $E[\exp[\frac{1}{2}\int_0^T u^2 dt] < \infty$. Τότε η αγορά* **δεν εμφανίζει arbitrage** *.*
(β) Αντίστροφα, αν η αγορά δεν εμφανίζει arbitrage τότε υπάρχει μία στοχαστικη διαδικασία u προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_t$ τέτοια ώστε $\sigma u = \mu - r\hat{S}$.
Και στις παραπάνω δύο προτάσεις ισχύει $\hat{S} = (S_1, ..., S_n)$.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε μόνο το (α) και θα παραλείψουμε το (β).
Το (α) είναι μία απλή εφαρμογή του θεωρήματος του Girsanov . Θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $r = 0$. Τότε υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο Q $(P \equiv Q)$ που ορίζεται από την σχέση

$$dQ(\omega) = \exp\left[-\int_0^T \mathbf{u}(t,\omega)dB - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{u}^2(t,\omega)dt\right] dP(\omega)$$

και η διαδικασία

$$\bar{B} = \int_0^t u(s,\omega)ds + B(t)$$

είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q. Η διαδικασία τιμών είναι μία διάχυση Itô που μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$dS = \mu dt + \sigma dB(t) = \sigma d\hat{B}(t)$$

από την οποία μπορούμε να συνάγουμε ότι η S είναι μία martingale κάτω από το μέτρο Q. Έτσι από το προηγούμενο θεώρημα δεν υπάρχει arbitrage . □

Σχόλιο: Επαναλάβετε σαν άσκηση την παραπάνω απόδειξη στην περίπτωση όπου $r \neq 0$.

θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι στο πλαίσιο του μοντέλου που εισάγαμε εδώ, η ύπαρξη ή όχι arbitrage ανάγεται στο πρόβλημα του αν ένα δεδομένο γραμμικό σύστημα εξισώσεων έχει λύση ή όχι! Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι στην εφαρμογή της συνθήκης χρειάζεται μόνο να χρησιμοποιήσουμε τους τίτλους που δεν είναι ομόλογα. Οι τιμές των άλλων τίτλων πρέπει να κανονικοποιηθούν με την τιμή του ομολόγου κάθε χρονική στιγμή t (προεξοφλημένες τιμές), πράγμα που είναι ουσιαστικά ισοδύναμο με το να θέσουμε $r = 0$.

Η παραπάνω συζήτηση θα ξεκαθαριστεί με το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.3.11 *Ας θεωρήσουμε την αγορά:*

$$\begin{aligned} dS_0 &= 0 \\ dS_1 &= 3dt + dB_1 \\ dS_2 &= 1dt + dB_1 + 2dB_2 \\ dS_3 &= 2dt + 4dB_2 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή

$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το σύστημα

$$\sigma \mathbf{u} = \mu \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Με λίγη άλγεβρα μπορούμε να δείξουμε ότι το σύστημα αυτό δεν έχει λύση, άρα υπάρχει arbitrage στην αγορά. Αυτό μπορεί να φανεί διαλέγοντας το χαρτοφυλάκιο $(\theta_0, 1, -1, 1/2)$. Το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι ένα arbitrage αφού η διαδικασία τιμών ικανοποιεί

$$\begin{aligned} V^\theta(t) &= V^\theta(0) + \int_0^t \left(dS_1 - dS_2 + \frac{1}{2} dS_3 \right) \\ &= V^\theta(0) + \int_0^t 3dt = V^\theta(0) + 3T. \end{aligned}$$

Το γεγονός ότι έχουμε $\theta_2 = -1$ στο χαρτοφυλάκιο σημαίνει ότι είμαστε κατά μία μονάδα ανοιχτοί (short) στον τίτλο 2 (δηλ. έχουμε δανειστεί -χρωστάμε- μία μονάδα του τίτλου αυτού). Στην χρηματοοικονομική η κατάσταση αυτή ονομάζεται **ανοικτή θέση**.

Αντιθέτως, αν $\mu = (3, 4, 2)^T$ βλέπουμε ότι το σύστημα $\sigma u = \mu$ έχει μοναδική λύση και συνεπώς δεν υπάρχει arbitrage . Είναι αδύνοτο να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο όπως το προηγούμενο το οποίο μπορεί να μας παρέχει κέρδος χωρίς να βάζουμε κάτι μέσα σε αυτό!

Παράδειγμα 1.3.12 *Στο μοντέλο Black- Scholes εν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage. Πράγματι σύμφωνα με το παράδειγμα ;; υπάρχει πάντοτε λύση* $u = \frac{\mu - r}{\sigma}$ *συνεπώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ισοδύναμο μέτρο martingale για την προεξοφλημένη τιμή της μετοχής και άρα έχουμε απουσία arbitrage.*

1.3.4 Πληρότητα.

Θα δώσουμε τώρα την γενίκευση της έννοιας της πληρότητας για μία αγορά σε συνεχή χρόνο. Η έννοια της πληρότητας στην πράξη σημαίνει ότι υπάρχουν τόσοι τίτλοι που εμπεριέχουν κίνδυνο στην αγορά, όσες είναι και οι πηγές του κινδύνου και ότι αυτοί οι τίτλοι δεν είναι στιγμιαία τέλεια συσχετισμένες. Αυτό σημαίνει, διαισθητικά, ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε συνδυασμούς των τίτλων που εμπεριέχουν κίνδυνο (δηλαδή ένα χαρτοφυλάκιο) για να ανταπεξέλθουμε στα αποτελέσματα της τυχαιότητας δηλαδή να αντισταθμίσουμε τον κίνδυνο (hedging). Αυτή η απλή διαισθητική εξήγηση θα γίνει πιο ξεκάθαρη στον επόμενο αυστηρό ορισμό και τα παραδείγματα.

Ορισμός 1.3.3 *Μία αγορά* $\{S(t)\}_{t\in[0,T]}$ *ονομάζεται* **πλήρης** *αν για κάθε φραγμένη* $\mathcal{F}_T$*-μετρήσιμη τυχαία συνάρτηση* $F(\omega)$ *υπάρχει ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο* $\theta(t)$ *και ένας πραγματικό αριθμός* A *τέτοιος ώστε*

$$F(\omega) = V_A^\theta(T) := A + \int_0^T \theta(t) \cdot dS(t)$$

Είναι ξεκάθαρο γιατί αυτός ο ορισμός είναι χρήσιμος. Μία $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμη τυχαία συνάρτηση είναι στα πλαίσια της χρηματοοικονομικής ένα συγκυριακό συμβόλαιο **contingent claim** . Αυτό είναι απλά ένας τίτλος ο οποίος την χρονική στιγμή T δίνει απολαβή που είναι μία τυχαία συνάρτηση η οποία είναι $\mathcal{F}_T$ -μετρήσιμη. Ένα παράδειγμα τέτοιου contingent claim είναι ένα δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου η απόδοση του οποίου την χρονική στιγμή T (την ημερομηνία λήξεως) εξαρτάται από την αξία κάποιου τίτλου (του βασικού τίτλου, underlying) την χρονική στιγμή T. Σαν πιο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε το Ευρωπαικό συμβόλαιο αγοράς (European call) επάνω σε μία μετοχή με τιμή $S(t)$. Η απολαβή από το συμβόλαιο αυτό την χρονική στιγμή T θα είναι $max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$. Αυτό είναι μία τυχαία συνάρτησηη οποία είναι $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμη.

Ο ορισμός της πληρότητας χρησιμοποιείται για να είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο μπορεί να αναπαράγει τις απολαβές την χρονική στιγμή T (και συνεπώς την τιμή του την ίδια χρονική στιγμή) οποιουδήποτε συμβολαίου (claim) δηλαδή οποιουδήποτε τίτλου που δεν περιέχεται στην συλλογή $\{S(t)\}$). Ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο ονομάζεται **αναπαράγων χαρτοφυλάκιο (replicating portfolio)**. Ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο (στην απουσία arbitrage) θα έχει κάθε χρονική στιγμή $t \leq T$ την ίδια αξία (τιμή) με το συγκυριακό συμβόλαιο. Η αναπαραγωγή λοιπόν μας δίνει ένα καλό τρόπο τιμολόγησης συγκυριακών συμβολαίων. Επίσης, η αναπαράγωγή μας δίνει τρόπου εξασφάλισης ως προς τον κίνδυνο.

Χρειαζόμαστε ένα απλό τρόπο για να ελέγξουμε την πληρότητα ενός μοντέλου για την άγορα. Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει ένα τρόπο να το πετύχουμε αυτό:

Θεώρημα 1.3.3 *Ας υποθέσουμε πως υπάρχει μία m-διάστατη διαδικασία $u(t,\omega) \in M^2(0,T)$ τέτοια ώστε*

$$\sigma u = \mu - r\hat{S}$$

σχεδόν για κάθε (t,ω) και $E[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(s,\omega)ds)] < \infty$ όπου $\hat{S}(t,\omega) = (S_1, ..., S_n)$.

Τότε η αγορά $\{S(t)\}$ είναι πλήρης αν και μόνο αν υπάρχει μία $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία (η οποία είναι ένας πίνακας) $\Lambda(t,\omega) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τέτοια ώστε

$$\Lambda(t,\omega)\sigma(t,\omega) = I_m \quad for \;\; a.a. \;\; (t,\omega)$$

Ισοδύναμη συνθήκη είναι και η συνθήκη $Rank(\sigma(t,\omega)) = m$.

Απόδειξη: Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού βασίζεται στο θεώρημα αναπαράστασης martingale και το θεώρημα του Girsanov . Για να δείξουμε την πληρότητα της αγοράς θα πρέπει για κάθε συγκυριακό συμβόλαιο, δηλαδή για κάθε τυχαία μεταβλητή $F \in L^2$ να μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο $\theta = (\theta_0, ..., \theta_n)$ τέτοιο ώστε $V^\theta(T) = F$, ς.β. Δηλαδή θα πρέπει να υπάρχει $A \in \mathbb{R}$ και $\theta \in \mathbb{R}^{n+1}$ τέτοια ώστε

$$F = V^\theta(T) = A + \int_0^T \sum_{i=0}^n \theta_i dS_i$$

Παίρνοντας προεξοφλημένες τιμές η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$F^* = V^{\theta*}(T) = A + \int_0^T \sum_{i=1}^n \theta_i dS_i^*$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του θεωρήματος σχετικά με την ύπαρξη της στοχαστικής διαδικασίας u υπάρχει ισοδύναμο μέτρο Q τέτοιο ώστε $dS^* = \sigma^* d\bar{B}_t$ όπου $\bar{B}_t$ είναι κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q. Συνεπώς

$$F^* = V^{\theta*}(T) = A + \int_0^T \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \theta_i(t^{'})\sigma_{ij}^*(t^{'},\omega)d\bar{B}_j^*(t^{'}) \tag{1.2}$$

Ας θυμηθούμε τώρα το θεώρημα αναπαράστασης του Itô σύμφωνα με το οποίο κάθε $\bar{\mathcal{F}}_T = \sigma(\bar{B}_s, s \leq T)$ μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή έχει μία αναπαράσταση με την μορφή ενός στοχαστικού ολοκληρώματος Itô . Πιο συγκεκριμένα υπάρχει στοχαστική διαδικασία $\phi(t) = (\phi_1, ..., \phi_m) \in M^2[0,T]$ μετρήσιμη ως προς την $\bar{\mathcal{F}}_t$ τέτοια ώστε

$$F^* = E_Q[F^*] + \int_0^T \phi \cdot d\bar{B}_t = E_Q[F^*] + \int_0^T \sum_{j=1}^m \phi_j d\bar{B}_j(t) \tag{1.3}$$

συγκρίνοντας τις (1.2) και (1.3) βλέπουμε ότι θα έχουμε πληρότητα αν οι εξισώσεις

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i \sigma^*_{ij} = \phi_j, \quad j = 1, ..., m$$

έχουν λύση ως προς τους αγνώστους θ_i. Αυτό είναι ένα σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους, η λύση του οποίου θα μας δώσει το χαρτοφυλάκιο που αναπαράγει το συγκυριακό συμβόλαιο F. Για να έχει το σύστημα αυτό πάντοτε λύση θα πρέπει είτε να υπάρχει ο πίνακας Λ που ικανοποιεί την συνθήκη του θεωρήματος, είτε, ισοδύναμα, να ισχύει $rank(\sigma) = m$.

Το μόνο λεπτό σημειο που απομένει είναι ότι έχουμε δύο διηθήσεις, την $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ και την $\bar{\mathcal{F}}_t = \sigma(\bar{B}_s, s \leq t)$. Στην διάρκεια της απόδειξης θεωρήσαμε ότι οι δύο αυτές διηθήσεις ταυτίζονται πράγμα που δεν ισχύει γενικά για οποιαδήποτε $\mu(t,\omega)$,$\sigma(t,\omega)$. Η παραδοχή αυτή είναι αληθινή στην περίπτωση που $\mu(t,\omega) = \mu(t,S)$ και $\sigma(t,\omega) = \sigma(t,S)$. $\square$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το κριτήριο πληρότητας μίας αγοράς με την χρήση του παραπώνω θεωρήματος ανάγεται στην λύση ενός γραμμικού συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων.

Η έννοια της πληρότητας, στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου, όπως συμβαίνει και στην περίπτωση του διακριτού χρόνου, σχετίζεται με την ύπαρξη ενός ισοδύναμου μέτρου martingale . Σύμφωνα με τους Harrison και Pliska

> Μία αγορά $\{S(t)\}$ είναι πλήρης αν και μόνο αν υπάρχει **μοναδικό** ισοδύναμο μέτρο martingale για την αγορά $\{S^*(t)\}$.

Σημειώστε ότι η ύπαρξη ενός ισοδύναμου μέτρου martingale συνεπάγεται την απουσία arbitrage . Αυτό όμως το ισοδύναμο μέτρο martingale δεν είναι απαραίτητα μοναδικό! Αν είναι μοναδικό τότε η ύπαρξη του εκτός από την απουσία arbitrage συνεπάγεται και την πληρότητα της αγοράς.

Θα κλείσουμε με παράδειγματα πλήρων και μή πλήρων αγορών:

Παράδειγμα 1.3.13 *Ας θεωρήσουμε την αγορά*

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ dS_1 &= dt + dB_1 \\ dS_2 &= 2dt + dB_1 + 2dB_2 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή $r = 0$ *καιτο σύστημα* $\sigma u = \mu$ *έχει μοναδική λύση* $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{3}$. *Ο πίνακας* σ *είναι αντιστρέψιμος*

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Άρα, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα η αγορά αυτή είναι πλήρης.

Παράδειγμα 1.3.14 *Θεωρείστε την αγορά*

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ dS_1 &= 2dt + dB_1 + dB_2 \end{aligned}$$

δεν *είναι πλήρης! Συνεπώς, υπάρχουν φραγμένα contingent claims η τιμή των οποίων δεν μπορεί να αναπαραχθεί από ένα χαρτοφυλάκιο!*

Παράδειγμα 1.3.15 *Το μοντέλο της αγοράς Black-Scholes*

$$\begin{aligned} dS_0(t) &= rS_0(t)dt \\ dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB_t \end{aligned}$$

είναι πλήρες.

Πράγματι, στο μοντέλο αυτό ο πίνακας $\sigma(t,\omega) = \sigma S \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ *εκφυλίζεται σε ένα πραγματικό αριθμό. Αυτός είναι πάντοτε αντιστρέψιμος (έχει βαθμό 1) αρκεί* $\sigma S \neq 0$. *Αλλά εφόσον*

$$S(t) = S(0)exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + B_t\right)$$

έχουμε ότι $S(t) \neq 0$ *και συνεπώς* $\sigma S \neq 0$ *για κάθε* t. *Έτσι έχουμε πληρότητα στην αγορά. Ένας εναλλακτικός τρόπος απόδειξης του ισχυρισμού αυτού είναι να κάνουμε την κατασκευή του ισοδύναμου μέτρου martingale και να δούμε ότι είναι μοναδικό (εφόσον υπάρχει μοναδική διαδικασία* $u = \frac{\mu - r}{\sigma}$ *βάσει της οποίας μπορούμε να κατασκευάσουμε το μέτρο αυτό από το θεώρημα του Girsanov .*

1.4 Βασικά σημεία του κεφαλαίου.

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγαμε τις έννοιες της αγοράς τίτλων και βασικές ιδέες όπως αυτές του arbitrage και της πληρότητας.

Θα πρέπει να έχουμε υπόψη ότι:

- Μία **αγορά τίτλων** είναι μία συλλογή από τίτλους (τυπικά από ένα ομόλογο και μερικούς τίτλους που εμπεριέχουν κίνδυνο). Ένα κοινό μοντέλο για μία αγορά τίτλων είναι μία $n-$διάστατη διαδικασία Itô . Η τυχαιότητα στο μοντέλο αυτό εισάγεται από μία συλλογή ανεξάρτητων κινήσεων Brown .
- Ένα χαρτοφυλάκιο είναι ένα **arbitrage** αν χωρίς κίνδυνο (ς.β.) παράγει κέρδος από το τίποτα. Στην θεωρία της χρηματοοικονομικής το arbitrage συνήθως δεν επιτρέπεται. Το arbitrage είναι μιά ιδιότητα η οποία είναι ανεξάρτητη από την κανονικοποιήση που έχουμε υϊοθετήσει

  ♠ Η ύπαρξη ή όχι arbitrage εξαρτάται πλήρως από την μορφή της αγοράς τίτλων. Η απουσία arbitrage είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ενός ισοδύναμου μέτρου martingale για την αγορά.

  ♠ Λόγω της σύνδεσης αυτής, ένας καλός τρόπος για να ελέγξουμε την ύπαρξη arbitrage ή όχι σε μία αγορά είναι μέσω της χρήσης του θεωρήματος του Girsanov (βλ. Θεώρημα **;;**).

- Ένα **contingent claim** είναι ένα συμβόλαιο η αξία του οποίου είναι μία τυχαία συνάρτηση η οποία συνήθως εξαρτάται από την τιμή κάποιου τίτλου που εμπεριέχει κίνδυνο. Παραδείγματα τέτοιων συμβολαίων είναι τα δικαιώματα ή τα προθεσμιακά συμβόλαια (options, futures).

- Μία αγορά είναι **πλήρης** αν η αξία όλων των contingent claims μπορεί να αναπαραχθεί με την κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου (**replicating portfolio**). Η ιδέα αυτή είναι εξαιρετικά χρήσιμη στην αποτίμηση παραγώγων συμβολαίων.

  ♠ Η πληρότητα μίας αγοράς σχετίζεται με την ύπαρξη ενός **μοναδικού** ισοδύναμου μέτρου martingale .

1.5 Παράρτημα: Ισοδύναμα μέτρα και θεώρημα $Radon-Nikodym$

Θα ξεκινήσουμε με μερικούς ορισμούς.

Ορισμός 1.5.1 *Εστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ένας χώρος μέτρου. Αν $f \geq 0$ είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση τότε η σχέση*

$$Q(A)=\int_A f dP, \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

ορίζει ένα μέτρο στο $(\Omega,\mathcal{F})$. Λέμε ότι το μέτρο Q έχει πυκνότητα f ως προς το μέτρο P.

Ορισμός 1.5.2 *Έστω P και Q δύο μέτρα στον $(\Omega,\mathcal{F})$. Το μέτρο Q είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο P αν $P(A)=0 \Longrightarrow Q(A)=0$. Συμβολίζουμε $Q << P$. Με λόγια μπορούμε να πούμε ότι το μέτρο Q είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο P αν τα μηδενοσύνολα του P είναι και μηδενοσύνολα του Q.*

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε (χωρίς απόδειξη) το θεώρημα Radon-Nikodym σύμφωνα με το οποίο η απόλυτη συνέχεια δύο μέτρων συνεπάγεται την ύπαρξη πυκνότητας του ενός μέτρου ως προς το άλλο:

Θεώρημα 1.5.1 *Έστω P, Q δύο πεπερασμένα μέτρα στο $(\Omega,\mathcal{F})$, τέτοια ώστε $Q << P$. Τότε το Q έχει πυκνότητα ως προς το P, δηλαδή υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f \geq 0$ τέτοια ώστε*

$$Q(A)=\int_A f dP, \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Η συνάρτηση f πολλές φορές συμβολίζεται και σαν $f := \frac{dQ}{dP}$ και ονομάζεται η παράγωγος Radon-Nikodym του μέτρου Q ως προς το μέτρο P.

Ορισμός 1.5.3 *Τα μέτρα P και Q ονομάζονται ισοδύναμα αν ισχύει $P << Q$ και $Q << P$. Συμβολίζουμε $P \sim Q$.*

Δύο ισοδύναμα μέτρα έχουν τα ίδια μηδενοσύνολα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε δύο μέτρα P και Q και $P \sim Q$. Έχουμε ότι $Q << P$ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Radon-Nikodym το Q έχει πυκνότητα έστω f ως προς το P δηλαδή

$$Q(A) = \int_A f dP, \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

Έχουμε όμως και ότι $P << Q$ συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα Radon-Nikodym το P έχει πυκνότητα έστω g ως προς το Q δηλαδή

$$P(A) = \int_A g dQ, \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

Το ενδιαφέρον ερώτημα είναι πως σχετίζονται οι πυκνότητες $f = \frac{dQ}{dP}$ και $g = \frac{dP}{dQ}$. Η απάντηση δίνεται από το επόμενο θεώρημα

Θεώρημα 1.5.2 *Δύο πεπερασμένα μέτρα P και Q είναι ισοδύναμα ($P \sim Q$) αν και μόνο αν το Q έχει πυκνότητα f ως προς το P και ισχύει $f > 0$ (σχεδόν παντού ως προς το P). Αν ισχύει αυτό το P έχει πυκνότητα $\frac{1}{f}$ ως προς το Q*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Radon-Nikodym και και την παρατήρηση

Το παραπάνω θεώρημα λοιπόν μπορεί να συνοψιστεί στον μνημονικό κανόνα

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_A \frac{dP}{dQ} dQ, \\ Q(A) &= \int_A \frac{dQ}{dP} dP, \\ \frac{dP}{dQ} &= \frac{1}{\frac{dQ}{dP}} \end{aligned}$$

Σχόλιο: Τα παραπάνω δεν ισχύουν γενικά για μέτρα και όχι μόνο για μέτρα πιθανότητας.

Την παράγωγο Radon-Nikodym την έχουμε ήδη δεί με την μορφή της υπό συνθήκη μέσης τιμής. Αυτό θα φανεί πιο καθαρά στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.5.1 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ ένας χώρος πιθανοτήτων και $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$ μία υπο-άλγεβρα της $\mathcal{F}_0$. Αν X μια τυχαία μεταβλητή στον χώρο αυτό (θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $X > 0$) θυμίζουμε τον ορισμό της υπό συνθήκη μέσης τιμής της X ως προς την $\mathcal{F}$, $E[X \mid \mathcal{F}]$ σαν μία τυχαία μεταβλητή που ικανοποιεί τις παρακάτω δύο ιδιότητες*

(ι) $E[X \mid \mathcal{F}]$ *μετρήσιμη ως προς την* $\mathcal{F}$

(ιι) $\int_A X dP = \int_A E[X \mid \mathcal{F}] dP \ \forall A \in \mathcal{F}$.

θα δείξουμε ότι η τυχαία αυτή μεταβλητή μπορεί να θεωρηθεί σαν μία παράγωγος Radon-Nikodym.

Ας ορίσουμε την απεικονιση $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ *με βάση τον τύπο*

$$\mu(A) = \int_A X dP, \qquad A \in \mathcal{F}$$

Μπορούμε να δούμε οτι το μ *είναι ένα μέτρο επάνω στο* $\mathcal{F}$. *Το μέτρο αυτό είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο* $P|\mathcal{F}$ *τον περιορισμό δηλαδή του μέτρου* P *στην υποάλγεβρα* $\mathcal{F}$ *(παίρνουμε δηλαδή το* P *σαν απεικόνιση* $\mathcal{F} \to [0,1]$ *και όχι γενικά σαν απεικόνιση* $\mathcal{F}_0 \to [0,1]$. *Η απόλυτη συνέχεια φαίνεται αμέσα από τον ορισμό του* μ *(αν* $P(A) = 0$ *τότε* $\mu(A) = \int_A X dP = 0$, *για κάθε* $A \in \mathcal{F}$.

Από το θεώρημα Radon-Nikodym έχουμε ότι το μ *θα έχει πυκνότητα ως προς το* $P|\mathcal{F}$ *δηλαδή υπάρχει (μοναδική) συνάρτηση* $f > 0$ *η οποία είναι μετρήσιμη ως προς την* $\mathcal{F}$ *τέτοια ώστε*

$$\mu(A) = \int_A f dP, \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

Η συνάρτηση αυτή f *είναι η υπό συνθήκη μέση τιμή* $E[X \mid \mathcal{F}]$, *αφού ικανοποιεί τόσο την ιδιότητα* (i) *όσο και την ιδιότητα* (ii). *Άρα μπορούμε να γράψουμε*

$$E[X \mid \mathcal{F}] = \frac{d\mu}{dP}, \qquad \text{όπου} \quad \mu(A) = \int_A X dP, \quad A \in \mathcal{F}$$

(ή ακόμα πιο σωστά $d\mu/d(P|\mathcal{F})$*).*

Η παράγωγος Radon-Nikodym μας επιτρέπει να υπολογίζουμε τις μέσες τιμές και τις υπό συνθήκη μέσες τιμές κάτω από αλλαγή μέτρου.

Θεώρημα 1.5.3 *Έστω* $(\Omega, \mathcal{F})$ *μετρήσιμος χώρος και* P, Q *δύο ισοδύναμα μέτρα πιθανοτήτων σε αυτόν. Έχουμε ότι*
(i) Οι μέσες τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής X *κάτω από αλλαγή μέτρου συνδέονται με τις σχέσεις*

$$\begin{aligned} E_P[X] &= \int_\Omega X dP = \int_\Omega X \frac{dP}{dQ} dQ = E_Q\left[X \frac{dP}{dQ}\right] \\ E_Q[X] &= \int_\Omega X dQ = \int_\Omega X \frac{dQ}{dP} dP = E_P\left[X \frac{dQ}{dP}\right] \end{aligned}$$

(ii) Έστω $\mathcal{G}$ *μία υπο-άλγεβρα της* $\mathcal{F}$. *Για την υπό συνθήκη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής* X *ως προς την* $\mathcal{G}$ *ισχύει*

$$E_Q[X \mid \mathcal{G} = \frac{E_P\left[\frac{dQ}{dP} X | \mathcal{G}\right]}{E_P\left[\frac{dQ}{dP} | \mathcal{G}\right]}$$

Ο τύπος αυτός ονομάζεται ο υπό συνθήκη κανόνας του Bayes.

Απόδειξη: Το (i) είναι προφανές από τον ορισμό της πυκνότητας των μέτρων. Για το (ii) αρκεί να δείξουμε ότι

$$E_P[\xi X \mid \mathcal{G}] = E_P[\xi \mid \mathcal{G}] E_Q[X \mid \mathcal{G}]$$

όπου ξ είναι η τυχαία μεταβλητή $\xi = \frac{dQ}{dP}$. Εφόσον το δεξιό μέλος της ισότητας αυτής είναι μετρήσιμο ως προς την $\mathcal{G}$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{G}$ ισχύει

$$\int_A E_P[\xi \mid \mathcal{G}] E_Q[X \mid \mathcal{G}] dP = \int_A \xi X dP$$

(θυμηθείτε τον ορισμό της υπό συνθήκης μέσης τιμής). Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\int_A E_P[\xi \mid \mathcal{G}] E_Q[X \mid \mathcal{G}] dP &= \int_A E_P[\xi E_Q[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{G}] dP \\
&= \int_A \xi E_Q[X \mid \mathcal{G}] dP = \int_A E_Q[X \mid \mathcal{G}] dQ \\
&= \int_A X dQ = \int_A \xi X dP
\end{aligned}$$

Διαδοχικά κάναμε τα εξής βήματα: (α) περάσαμε την ποσότητα $E_Q[X \mid \mathcal{G}]$ μέσα στην υπό συνθήκη μέση τιμή $E_P[\cdot \mid \mathcal{G}]$ χρησιμοποιώντας το ότι είναι $\mathcal{G}$ μετρήσιμη, (β) για να περάσουμε από την πρώτη στην δεύτερη γραμμή χρησιμοποιήσαμε τον ορισμο της υπό συνθήκη μέσης τιμής, (γ) κάναμε αλλαγή μέτρου στο ολοκλήρωμα από το P στο Q χρησιμοποιώντας την πυκνότητα ξ, (δ) χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της υπό συνθήκη μέσης τιμής $E_Q[\cdot \mid \mathcal{G}]$ και τέλος (ε) αλλάξαμε ξανά μέτρο από το Q στο P. $\square$

Κεφάλαιο 2

Εκτίμηση Ευρωπαϊκών παραγώγων συμβολαίων.

2.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως οι έννοιες που εισάγαμε μέχρι τώρα μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την αποτίμηση ορισμένων παράγωγων συμβολαίων όπως π.χ. τα δικαιώματα. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την αποτίμηση των αποκαλούμενων Ευρωπαϊκών παραγώγων.

Ένα **παράγωγο Ευρωπαϊκού τύπου** είναι ένα παράγωγο συμβόλαιο το οποίο μπορεί μόνο να εξασκηθεί την ημερομηνία λήξης T. Η αξία του εν γένει εξαρτάται από την αξία άλλων τίτλων η οποία είναι μία τυχάια μεταβλητή, άρα η αξία τέτοιων συμβολαίων είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία πρέπει να είναι $\mathcal{F}_T$ μετρήσιμη. Η συνθήκη αυτή συνεπάγεται ότι το παράγωγο μπορεί να εξασκηθεί μόνο την ημερομηνία λήξης. Ο ορισμός ενός παραγώγου συμβολαίου Ευρωπαϊκού τύπου με τον τρόπο αυτό, μας επιτρέπει να πάρουμε μία γενική θεωρία για την αποτίμηση τέτοιων συμβολαίων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ένα πλήθος τέτοιων συμβολαίων όπως π.χ. European calls, European puts, barrier options ... . Έτσι, αν και μπορεί αρχικά να φαίνεται αρκετά αφηρημένη σίγουρα αξίζει να αναπτυχθεί κατά αυτόν τον τρόπο, γιατί δίνει το γενικό πλαίσιο ανάπτυξης της θεωρίας για μία σειρά προβλημάτων και δίνει την ευκαιρία να παρουσιασουμε μία σειρά μεθοδων και τεχνικών που είναι απαραίτητες για κάποιον που ενδιαφέρεται για την μαθηματική θεωρία της χρηματοοικονομικής. Τέλος η σχετικά αφηρημένη αυτή προσέγγιση μας βοηθάει να καταλήξουμε τελικά σε ένα αρκετά πρακτικό και χρήσιμο τύπο για την αποτίμηση παραγώγων Ευρωπαϊκού τύπου, τον τύπο Black-Scholes . Η προσέγγιση που χρησιμοποιούμε ακολουθεί αυτή του Oksendal (1998), και βασίζεται στην χρήση των εννοιών της πληρότητας και της ύπαρξης ενός replicating portfolio .

2.2 Ευρωπαϊκά παράγωγα σε μία γενική πλήρη αγορά.

Ας θεωρήσουμε ένα Ευρωπαϊκό παράγωγο το οποίο εξασφαλίζει την πληρωμή ενός ποσού $F(\omega)$ (αποληβή) την χρονική στιγμή της λήξης του T. Η αποληβή αυτή εν γένει είναι τυχαία. Έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.2.1 *Ένα ευρωπαϊκό παράγωγο με λήξη T είναι μία τυχαία μεταβλητή $F(\omega)$ μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_T$. Θα θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η τυχαία αυτή μεταβλητή είναι φραγμένη. Η $F(\omega)$ είναι η τυχαία αποληβή που μπορεί να έχει ο κάτοχος του παραγώγου την χρονική στιγμή T.*

Σχόλια: Ο κάτοχος του παραγώγου μπορεί να έχει την αποληβή $F(\omega)$ μόνο την χρονική στιγμή T. Μία διαφορετική ονομασία για το συμβόλαιο αυτό μπορεί να είναι και συγκυριακό συμβόλαιο. Το $F(\omega)$ μπορεί να είναι μία συνάρτηση της τιμής ενός βασικού τίτλου της αγοράς, π.χ. της τιμής μιας μετοχής ή ενός ομολόγου. Π.χ. $F(\omega) = f(S_T(\omega))$ όπου $S_T(\omega)$ είναι η τιμή κάποιας μετοχής την χρονική στιγμή T. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_T$ είναι η σ-άλγεβρα που περιέχει την ιστορία της αγοράς μέχρι την χρονική στιγμή T. Στην περίπτωση την παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι $\mathcal{F}_T = \sigma(S_t, t \leq T)$ και για τα μοντέλα της αγοράς όπου η αβεβαιότητα εισέρχεται μέσω της κίνησης Brown μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\mathcal{F}_T = \sigma(B_t, t \leq T)$. Πολλοί συγγραφείς κρατούν το όνομα παράγωγο συμβόλαιο για περιπτώσεις $F = f(S_T)$. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε γενικά τον όρο αυτό.

Το ευρωπαϊκό παράγωγο έχει γνωστή αξία την χρονική στιγμή T της λήξης του. Στην λήξη του η αξία του παραγώγου είναι ίση με $F(\omega)$. Το συμβόλαιο αυτό όμως μπορεί να πωληθεί και να αγοραστεί σε κάποιες οργανωμένες αγορές (χρηματιστήρια παραγώγων) οποιαδήποτε άλλη χρονική στιγμή πριν απο την λήξη του. Πόσο θα κοστίζει το παράγωγο αυτό (ποια θα είναι η αξία του) οποιαδήποτε άλλη χρονική στιγμή εκτός της χρονικής στιγμής T;

Επειδή το παράγωγο είναι ένα συμβόλαιο, σε αυτό μπαίνουν δύο συμβαλλόμενοι, ο πωλητής και ο αγοραστής. Ο πωλητής την χρονική στιγμή $t \leq T$ θα λάβει ένα πόσο $P(t) = z(t)$ και την χρονική στιγμή T θα πρέπει να καλύψει την υποχρέωση $F(\omega)$. Ο αγοραστής του παραγώγου την χρονική στιγμή $t \leq T$ θα δώσει το ποσό $P'(t) = y(t)$ για την αγορά του παραγώγου και την χρονική στιγμή T θα έχει λαμβάνειν το ποσό $F(\omega)$. Θα κοιτάξουμε το πρόβλημα της αποτίμησης του συμβολαίου αυτού από δύο διαφορετικές οπτικές: αυτής του πωλητή και αυτής του αγοραστή. θα ασχοληθούμε με την εύρεση της τιμής αγοράς και πώλησης την χρονικη στιγμή $t = 0$.

- **Ο πωλητής** Ο πωλητής έχει την υποχρέωση να καλύψει το ποσό $F(\omega)$ την χρονική στιγμή T. Ζητώντας τιμή $z(0) = z$ για το συμβόλαιο θα έχει αρχικό ποσό z και με αυτό θα κατασκευάσει ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο θ με αξία $V_z^\theta(t, \omega)$ που θα του επιτρέψει να καλύψει την υποχρέωση του για το ποσό $F(\omega)$ κατά τον χρόνο λήξης του συμβολαίου T,

$$V_z^\theta(T, \omega) \geq F(\omega) \qquad \sigma.\beta.$$

Το αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο θ θα έχει διαδικασία αξίας

$$V_z^\theta(T,\omega) = z + \int_0^T \theta \cdot dS(t) = z + \int_0^T \sum_{i=0}^n \theta_i dS_i(t)$$

Η τιμή z λοιπόν που θα ζητήσει ο πωλητής θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να ισχύει

$$z + \int_0^T \sum_{i=0}^n \theta_i dS_i(t) - F(\Omega) \geq 0$$

Για αρκετά μεγάλα z αυτή η ανισότητα θα ισχύει πάντοτε, δηλαδή αν ο πωλητής υπερτιμήσει το συμβόλαιο θα μπορέσει πάντοτε να καλύφθεί έναντι των υποχρέωσεων του. Μία τόσο μεγάλη τιμή μπορεί όμως να μην είναι αποδεκτή από τον αγοραστή του συμβολαίου. Θα πρέπει λοιπόν σιγά σιγά να αρχίσουμε να μειώνουμε το z. Όσο το z μειώνεται θα φτάσουμε σε κάποια τιμή του τέτοια ώστε η παραπάνω ανισότητα να μην ισχύει, και ο πωλητής να μην μπορεί να καλυφθεί. Άρα η ελάχιστη τιμή που ο πωλητής είναι διατεθειμένος να δεχθεί θα είναι

$$p_S(F) = \inf\{z : \exists\theta : V_z^\theta(T,\omega) := z + \int_0^T \theta(t) \cdot dS(t) \geq F(\omega) \ \sigma.\beta.\}$$

- **Ο αγοραστής.** Ο αγοραστής θα πληρώσει την χρονική στιγμή $t = 0$ ένα ποσό y για το συμβόλαιο, πράγμα που σημαίνει πως ο αρχικός πλούτος του αγοραστή είναι $-y$. Το ποσό αυτό ουσιαστικά μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα δάνειο (ομόλογο). Με το ποσό αυτό θα δημιουργήσει ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο $\theta^{'}$ αξίας $V_{-y}^{\theta^{'}}(t,\omega)$. Την χρονική στιγμή T ο αγοραστής του συμβολαίου θα έχει λαμβάνειν το τυχαίο ποσό $F(\omega)$. Η επιλογή του y και του χαρτοφυλακίου $\theta^{'}$ θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε

$$V_{-y}^{\theta^{'}}(T,\omega) + F(\omega) \geq 0 \qquad \sigma.\beta.$$

Αν δεν συμβαίνει αυτό ο αγοραστής θα ζημιωθεί. Η παραπάνω σχέση ισοδύναμα μπορεί να γραφεί:

$$-y + \int_0^T \theta^{'}(t) \cdot dS(t) + F(\omega) = -y + \int_0^T \sum_{i=0}^n \theta_i^{'}(t) dS_i(t) + F(\omega) \geq 0$$

Παρατηρούμε ότι αν το y είναι πολύ μικρό ($y > 0$) η παραπάνω ισότητα είναι πιο εύκολο να ισχύει. Αυτό όμως σημαίνει ότι ο αγοραστής είναι διατεθειμένος να πληρώσει μικρό ποσό για το συμβόλαιο οπότε ο πωλητής δεν είναι απαραίτητο να την δεχθεί αφού αυτό μπορεί να μην τον συμφέρει. Όσο μεγαλώνει το y, ο όρος $-y$ θα τείνει να τραβήξει την αξία του παραπάνω χαρτοφυλακίου στα αρνητικά οπότε η ανισότητα δεν θα ισχύει. Θα υπάρχει η μεγαλύτερη τιμή του y για την οποία η παραπάνω ανισότητα θα ισχύει. Αυτή και θα είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να αποδεχθεί για το συμβόλαιο ο αγοραστής χωρίς να χάσει. Συνεπώς, η μέγιστη τιμή που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο αγοραστής είναι

$$p_B(F) = \sup\{y : \exists\theta^{'} : V_{-y}^{\theta^{'}}(T,\omega) := -y + \int_0^T \theta^{'}(t) \cdot dS(t) \geq -F(\omega)\ \sigma.\beta.\} \quad (2.1)$$

Ορισμός 2.2.2 *Αν* $p_S(F) = p_B(F)$ *θα καλούμε την κοινή αυτή τιμή την* **τιμή** *του συμβολαίου* $F(\omega)$.

Η τιμή αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί χρησιμοποιώντας το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.1 *Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο* $Q = Q_u$ *επάνω στο* $\mathcal{F}_T^{(m)}$ *με την σχέση*

$$dQ(\omega) = \exp\left(-\int_0^T \mathbf{u}(t,\omega)d\mathbf{B}(t) - \frac{1}{2}\int_0^T \mathbf{u}^2(t,\omega)dt\right) dP(\omega)$$

όπου

$$\sigma(t,\omega)\mathbf{u}(t,\omega) = \mu(t,\omega) - r(t,\omega)\hat{\mathbf{X}}(t,\omega) \qquad a.a.\ (t,\omega)$$

και η διαδικασία $\mathbf{u}$ *ικανοποιεί την συνθήκη*

$$E[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \mathbf{u}^2(s,\omega)ds)] < \infty.$$

Τότε οι τιμές του αγοραστή και του πωλητή ικανοποιούν τις σχέσεις

$$p_B(F) \leq E_Q[F^*] \leq p_S(F)$$

Κάτω από την συμπληρωματική υπόθεση ότι η αγορά $\{S(t)\}$ *είναι πλήρης η τιμή του Ευρωπαικού παραγώγου* F *είναι*

$$p_S(F) = E_Q[F^*] = p_B(F)$$

όπου με F^* *συμβολίζουμε την προεξοφλημένη απολαβή από το συμβόλαιο την χρονική στιγμή* T.

Σχόλιο Σημειώστε ότι αν η αγορά δεν είναι πλήρης έχουμε ότι

$$p_B(F) \leq E_Q[F^*] \leq p_S(F)$$

δηλαδή σε μία μη πλήρη αγορά η τιμή του πωλητή και η τιμή του αγοραστή δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτουν. Ο αγοραστής πάντοτε τιμά το συμβόλαιο λιγότερο από τον πωλητή.

Απόδειξη: Θα δώσουμε τώρα την απόδειξη του θεωρήματος. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Girsanov βλέπουμε ότι οι εξισώσεις εξέλιξης για την αγορά μπορεί να γραφούν ως

$$\begin{aligned} dS_0^*(t) &= 0 \\ dS_i^*(t) &= \sigma_i^*(t)d\hat{B}(t) \qquad 1 \le i \le n \end{aligned}$$

όπου $\hat{B}$ είναι κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q. Τότε το χαρτοφυλάκιο του αγοραστή ικανοποιεί την σχέση

$$\begin{aligned} V_{-y}^{\theta'} &= -y + \int_0^T \sum_{i=0}^n \theta_i'(t) dS_i'(t) \ge -F(\omega) \\ &\Longrightarrow -y + \int_0^T \sum_{i=1}^n \theta_i'(t)\sigma_i^*(t)d\hat{B}(t) \ge -F^*(\omega) \qquad a.s. \end{aligned}$$

(όπου απλά ξαναγράψαμε την συνθήκη αυτή για το προεξοφλημενο χαρτοφυλάκιο). Αν π.χ. υποθέσουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του βέβαιου τίτλου είναι r, σταθερός, στο δεξιό μέλος $F^* = e^{-rT}F$ ενώ μέσα στο ολοκλήρωμα $\sigma_i^*(t) = e^{-rt}\sigma_i$. Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η προεξοφλημένη αξία αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου ικανοποιεί την σχέση

$$V^{\theta *}(t) = V^{\theta}(0) + \int_0^t \sum_{i=0}^n \theta_i(t')dS_i^*(t')$$

(βλ. το παράδειγμα 1.3.7). Παίρνοντας την μέση τιμή ως προς το μέτρο Q και λαμβάνοντας υπόψη ότι κάτω από αυτό το μέτρο η μέση τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος μηδενίζεται αφού η $\bar{B}$ είναι μία κίνηση Brown στο μέτρο αυτό έχουμε

$$y \le E_Q[F^*]$$

και αν θυμηθούμε τον ορισμό του $p_B(F)$ σαν το sup όλων των y για τα οποία η ανισότητα (2.1) ισχύει βρίσκουμε ότι

$$p_B(F) \le E_Q[F^*].$$

Με όμοιο τρόπο, για το χαρτοφυλάκιο του πωλητή μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$p_S(F) \ge E_Q[F^*]$$

Ας χρησιμοποιήσουμε τώρα την ιδιότητα της πληρότητας. Από την υπόθεση ότι η $F(\omega)$ είναι φραγμένη απαίτηση και απο τον ορισμό της πληρότητας γνωρίζουμε ότι έχουμε ένα μοναδικό χαρτοφυλάκιο για τον αγοραστή θ_C' με αρχικό κεφάλαιο $-y_C$ τέτοιο ώστε

$$V_{y,C}^{\theta_C'}(T,\omega) = -y_C + \int_0^T \theta_C'(t) \cdot dS(t) = -F(\omega)$$

Το y_C είναι η τιμή του αγοραστή για το συμβόλαιο. Όπως και προηγουμένως χρησιμοποιώντας την προεξοφλημένη τιμή και το ισοδύναμο μέτρο martingale Q, και παίρνοντας μέσες τιμές βλέπουμε

$$y_C = E_Q[F^*].$$

Το y_C είναι η αρχική συνθήκη για ένα απο αυτά τα αποδεκτά χαρτοφυλάκια. Ο ορισμός της τιμής του αγοραστή είναι το sup των y όλων των αποδεκτών χαρτοφυλακίων συνεπώς

$$E_Q[y^*] = y_C \leq p_B(F)$$

Απο το πρώτο σκέλος της απόδειξης έχουμε επίσης ότι

$$p_B(F) \leq E_Q[F^*]$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις καταλήγουμε ότι

$$p_B(F) = E_Q[F^*]$$

Όμοια για το χαρτοφυλάκιο του πωλητή μπορούμε να βρούμε ότι

$$p_S(F) = E_Q[F^*].$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. $\square$

Σημείωση: Αξίζει να σημειωθεί το ακόλουθο τεχνικό σημείο. Αν το F δεν είναι φραγμένο τότε μπορεί να έχουμε κάποια προβλήματα στην σύγκλιση της μέσης τιμής. Στην περίπτωση αυτή θα προσεγγίσουμε το πιθανόν μη φραγμένο F με την συνάρτηση

$$F_k(\omega) = \begin{cases} k & \text{αν} \quad F(\omega) \geq k \\ F(\omega) & \text{αν} \quad F(\omega) < k \end{cases}$$

η οποία είναι φραγμένη, και μετά θα πάρουμε το όριο $k \to \infty$ το οποίο μπορεί να περάσει μέσα από την μέση τιμή χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

Για κάθε χρονική στιγμή μπορούμε να δείξουμε με παρόμοιο τρόπο πως η τιμή του συμβολαίου θα είναι

$$p_B^*(t) \leq E_Q[F^* \mid \mathcal{F}_t] \leq p_S^*(t).$$

Στην περίπτωση της πληρότητας έχουμε ότι

$$p_B^*(t) = E_Q[F^* \mid \mathcal{F}_t] = p_S^*(t).$$

Αναγνωρίζουμε την ποσότητα αυτή σαν την αξία του χαρτοφυλακίου που αναπαράγει το Ευρωπαϊκό παράγωγο.

Παράδειγμα 2.2.1 *Στην περίπτωση της πληρότητας αποδείξετε το ότι η τιμή του παραγώγου την χρονική στιγμη t θα δίνεται από την σχέση*

$$p^*(t) = E_Q[F^* \mid \mathcal{F}_t]$$

χρησιμοποιώντας την αναπαραγωγή του τίτλου από ένα χαρτοφυλάκιο και την αρχή της απουσίας arbitrage .

Έχουμε λοιπόν ένα καλό τρόπο να χαρακτηρίζουμε την τιμή των Ευρωπαϊκών παραγώγων. Η τιμή αυτή είναι η δίκαιη τιμή και για τις δύο ενδιαφερόμενες πλευρές, τον αγοραστή και τον πωλητή, με την έννοια ότι με την τιμή αυτή κανείς από τους δύο δεν χάνει. Ταυτόχρονα όμως κανείς από τους δύο δεν έχει και κέρδος αφού με την τιμή αυτή ο πωλητής απλώς καλύπτει την υποχρέωση του να πληρώσει το ποσό $F(\omega)$ στο αγοραστή και ο αγοραστής έχει 0 (όχι αρνητικό) πλούτο.

Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε αυτό το χαρτοφυλάκιο, δηλαδή ποια θα πρέπει να είναι η επιλογή του θ για τον πωλητή και τον αγοραστή· Στην ορολογία της χρηματοοικονομικής το πρόβλημα αυτό αποκαλείται 'πώς να αντισταθμίσουμε ένα attainable claim'; Ξαναγυρνώντας στα βήματα της απόδειξης του παραπάνω θεωρήματος βλέπουμε πως

$$F^*(\omega) = z + \int 0^T \theta(t,\omega)\sigma^*(t,\omega) d\bar{B}(t)$$

Αυτό που πρέπει να γίνει είναι να λύσουμε την εξίσωση αυτή ως προς θ. Η εξίσωση αυτή κατά κάποιο τρόπο είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση που πρέπει να λυθεί ως προς την τυχαία μεταβλητή θ. Για μία γενική μοργή της αγοράς το πρόβλημα αυτό δεν είναι εύκολο και προχωρημένες τεχνικές της στοχαστικής ανάλυσης (όπως π.χ. ο λογισμός κατά Malliavin) θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν. Δεν θα ασχοληθούμε με το γενικό αυτό πρόβλημα στο βιβλίο αυτό. Η κατάσταση απλοποιείται κατά πολύ αν θεωρήσουμε ένα πιο απλό μοντέλο για την αγορά, αυτό μίας διαχύσεως Itô με αυτόνομους και μη τυχαίους συνετελεστές.

2.3 Το μοντέλο Black-Scholes .

θα μελετήσουμε τώρα την τιμολόγηση παργώγων σε ένα απλό μοντέλο της αγοράς που υποθέτει το μοντέλο Black-Scholes . Θεωρούμε ότι η αγορά αποτελείται από ένα ομόλογο και μία μετοχή οι τιμές των οποίων ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} dS_0 &= rS_0 dt \\ dS &= \mu S dt + \sigma S dB_t \end{aligned}$$

θα θεωρήσουμε για απλούστευση ότι τα $\mu, \sigma, r \in \mathbb{R}$ και είναι σταθερά. Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να γενικευθεί χωρίς δυσκολία (η γενίκευση αφήνεται σαν άσκηση) στην περίπτωση που $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B_t \in \mathbb{R}^m$ καθώς και στην περίπτωση που είναι χρονοεξαρτημένες ή ακόμα και τυχαίες συναρτήσεις.

Για την απλή περίπτωση που θα μελετήσουμε εδώ η λύση για την τιμή της μετοχής S μπορεί να γραφεί στην απλή μορφή

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right)$$

(χρησιμοποιείστε το λήμμα του Itô). Ας ορίσουμε τώρα την διαδικασία u όπως και προηγουμένως από την εξίσωση

$$S(t)\sigma u = S(t)\mu - S(t)r$$

η οποία έχει λύση

$$u = \sigma^{-1}[\mu - r]$$

εφόσον $\sigma \neq 0$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι για το u αυτό η συνθήκη του Novikov ισχύει. Τότε υπάρχει ισοδύναμο μέτρο martingale Q (και άρα απουσία arbitrage). Επιπλέον, χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να δείξουμε την πληρότητα της αγοράς. Κάτω απο το μέτρο Q η $S(t)$ ακολουθεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)d\bar{B}_t$$

όπου $\bar{B}_t$ είναι κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q. Η λύση της εξίσωσης αυτής δίνει

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma \bar{B}_t\right)$$

Η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή T κάτω από το μέτρο Q θα δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned}
S(T) &= S(0)\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma \bar{B}_T\right) \\
&= S(t)\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(\bar{B}_T - \bar{B}_t)\right) \\
&= s\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(\bar{B}_T - \bar{B}_t)\right)
\end{aligned}$$

όπου θέσαμε $S(t) = s$.

Η τιμή την χρονική στιγμή t του Ευρωπαϊκού παραγώγου συμβολαίου F είναι

$$p_B^*(F) = p_S^*(F) = E_Q[F^* \mid \mathcal{F}_t] = p^*(t)$$

Μπορούμε να πάρουμε και μία πιο εκπεφρασμένη μορφή για τον τύπο αυτό. Ας υποθέσουμε ότι η απολαβή είναι της μορφής $F(\omega) = f(S(T))$. Τότε χρησιμοποιώντας την λύση για το S βλέπουμε ότι

$$p^*(t) = E_Q\left[e^{-rT} f\left(s\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(\bar{B}_T - \bar{B}_t)\right)\right)|\mathcal{F}_t\right]$$

όπου $s = S(t)$. Η $s = S(t)$ είναι μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}_t$. Κάτω από το μέτρο Q η τυχαία μεταβλητή $\bar{B}$ είναι μία κίνηση Brown και συνεπώς η τυχαία μεταβλητή $\bar{B}_T - \bar{B}_t$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_t$ και μάλιστα είναι κατανεμημένη σύμφωνα με την κανονική κατανομή με μέσο 0 και διασπορά $T - t$. Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του παραγώγου χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο

$$p^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} f\left(s \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma x\right]\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2(T-t)}\right) dx$$

όπου $s = S(t)$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε την μορφή του χαρτοφυλακίου που αντισταθμίζει τον κίνδυνο.

2.4 Σύνδεση με μερικές διαφορικές εξισώσεις: Η εξίσωση $Black - Scholes$.

Από την μορφή της τιμής του παραγώγου Ευρωπαϊκού τύπου, η οποία είναι εκφρασμένη σαν την μέση τιμή ενός συναρτησοειδούς επάνω στην τροχιά μίας στοχαστικής διαδικασίας, και από την συζήτηση που είχε γίνει σχετικά με την αναπαράσταση Feynman-Kac θα πρέπει να είναι φανερό ότι η τιμή του παραγώγου θα πρέπει να έχει μία ισοδύναμη μορφή σαν την λύση μίας εξίσωσης με μερικές παραγώγους. Στο τμήμα αυτό θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό και θα βρούμε την ακριβή μορφή της εξίσωσης αυτής για το απλό μοντέλο της αγοράς που ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes .

Στα πλαίσια του μοντέλου Black-Scholes η αγορά αποτελείται απο δύο τίτλους, ένα ομόλογο και μία μετοχή, και οι τιμές των τίτλων αυτών (S_0, S) ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} dS_0 &= rS_0 \\ dS_1 &= \mu S_1 + \sigma S_1 dB_t \end{aligned}$$

όπου παίρνουμε τα r, μ και σ σταθερά. Η προεξοφλημένη διαδικασία (κανονικοποιημένη αγορά) στην περίπτωση αυτή είναι $(S_0^*, S^*) = (1, e^{-rt}S)$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο Q ως

$$dQ = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma}B_t - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t\right) dP$$

όπου P είναι το μέτρο κάτω από το οποίο η B είναι κίνηση Brown . Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Girsanov (βλ. Θεώρημα ;;)) μπορούμε να δούμε ότι η διαδικασία

$$\tilde{B}_t = \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) t + B_t$$

είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q και στο νέο μέτρο η προεξοφλημένη διαδικασία τιμών γίνεται

$$\begin{aligned} dS_0^* &= 0 \\ dS^* &= \sigma S^* d\tilde{B} \end{aligned}$$

και άρα η προεξοφλημένη διαδικασία τιμών της μετοχής είναι μία martingale . Συνεπώς, το Q είναι ένα ισοδύναμο μέτρο martingale .

Στην σχέση που δίνει την τιμή του παραγώγου έχουμε την μέση τιμή ενός συναρτησοειδούς το οποίο περιέχει την μη προεξοφλημένη τιμή της μετοχής. Θα πρέπει να βρούμε λοιπόν πως θα εξελίσσεται η μη προεξοφλημένη τιμή της μετοχής κάτω από το νέο μέτρο Q. Στο νέο μέτρο η τιμή αυτή θα εξελίσσεται βάσει την στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dS = rS + \sigma S d\tilde{B}.$$

Αυτό είναι μία απλή εφαρμογή του λήμματος του Itô για την $S = e^{rt} S^*$ (βλ. παράδειγμα **;;**). Έτσι στο νέο μέτρο η απόδοση της μετοχής (τίτλος που εμπεριέχει κίνδυνο) έχει την ίδια ταχύτητα με το ομόλογο (ακίνδυνος τίτλος). Το νέο αυτό μέτρο, πολλές φορές στην χρηματοοικονομική ονομάζεται μέτρο ουδέτερο προς τον κίνδυνο (risk neutral measure, risk adjusted measure) .

Η τιμή του παραγώγου την χρονικη στιγμή t είναι ίση με την ποσότητα

$$p(t) = E_Q[F^* \mid \mathcal{F}_t] = E_Q[e^{-rT} f(S_T) \mid \mathcal{F}_t]$$

Η $S(t)$ είναι λύση μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης και έχει την ιδιότητα Markov . Θα εφαρμόσουμε την ιδιότητα αυτή για να απλοποιήσουμε την υπό συνθήκη μέση τιμή που δίνει την τιμή του παραγώγου. Λόγω της ιδιότητας Markov δέσμευση ως προς την πλήρη άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ που περιέχει ολόκληρη την ιστορία της διαδικασίας $S(t)$ απο το $t = 0$ μέχρι την χρονική στιγμή t δεν είναι απαραίτητη καθώς λόγω της ιδιότητας Markov για τον υπολογισμό της υπό συνθήκης μέσης τιμής αυτής επαρκεί μόνο η γνώση της θέσης της διαδικασίας Itô S την χρονική στιγμή t δηλαδή μόνο το $S(t) = s$. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$p^*(t) = E_Q[e^{-rT} f(S_T) \mid \mathcal{F}_t] = E_{Q,t,S(t)}[e^{-rT} f(S_T)]$$

όπου η δεύτερη μέση τιμή μπορεί να θεωρηθεί σαν μέση τιμή επάνω σε όλες τις διαδικασίες Itô S που βρίσκονται την χρονική στιγμή t στην θέση $S(t) = s$. Το δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι μία συνάρτηση του t και της θέσης της διαδικασίας S την χρονική στιγμή t, δηλαδή του $S(t) = s$. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε για το μοντέλο αυτό ότι η τιμή του παραγώγου την χρονική στιγμή t θα δίνεται από την σχέση

$$p(t) = P(t, S(t)) = P(t, s)$$

για κάποια συνάρτηση $P(t, s)$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή μπορεί να δωθεί σαν η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους. Η σύνδεση αυτή μπορεί να αιτιολογηθεί μέσω της αναπαράστασης Feynman-Kac.

Ας θυμηθούμε τώρα την αναπαράσταση Feynman-Kac . Η στοχαστική διαδικασία που εισέρχεται μέσα στην μέση τιμή είναι η S η οποία έχει γεννήτορα τελεστή

$$L = rs\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

(σημειώστε ότι στο μέτρο Q κάτω από το οποίο παίρνουμε την μέση τιμή η $\tilde{B}$ είναι μία κίνηση Brown !).

Τότε η τιμή του Ευρωπαικού παραγώγου την χρονική στιγμή t, αν η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή αυτή είναι $S(t) = s$, την οποία συμβολίζουμε με $P(t,s)$ θα είναι η λύση της εξίσωσης με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial P}{\partial t} + rs\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} - rP = 0 \qquad (2.2)$$
$$P(s,T) = f(s)$$

Η εξίσωση αυτή είναι η ίδια (με λίγο διαφορετικό συμβολισμό) με αυτή που είδαμε παραπάνω στην προηγούμενη μας επαφή με το μοντέλο Black-Scholes το οποίο είχαμε αναπτύξει χρησιμοποιώντας διαφορετική μεθοδολογία. Είναι ενδιαφέρον να σκεφτείτε την σύνδεση μεταξύ των δύο διαφορετικών μεθόδων.

Σχόλιο: Σημειώστε την διαφορά στην αναπαράσταση της τιμής του παραγώγου στις δύο αυτές περιπτώσεις. Στην μία περίπτωση απλά ακολουθούμε την τροχιά της στοχαστικής διαδικασίας που δίνει την τιμή της μετοχής στον χρόνο και υπολογίζουμε την τιμή του παραγώγου σαν μία μέση τιμή επάνω στις πιθανές αυτές τροχιές. Ουσιαστικά, η τιμή του παραγώγου είναι μία συνάρτηση του χρόνου και η εξάρτηση της τιμής αυτής από την τιμή της μετοχής κάθε χρονική στιγμή μπαίνει εμμέσα από την εξάρτηση της τιμής της μετοχής από τον χρόνο. Στην προσέγγιση του προβλήματος με την μέθοδο της εξίσωσης με τις μερικές παραγώγους, ακολουθούμε μία διαφορετική αναπαράσταση. Η τιμή του παραγώγου θεωρείται να είναι ταυτόχρονα και συνάρτηση του χρόνου που απομένει μέχρι την λήξη του συμβολαίου και της τιμής της μετοχής s, και οι δύο αυτές μεταβλητές θεωρούνται **ανεξάρτητες**. Φυσικά η απάντηση είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις αλλά ο τρόπος που παραμετροποιούμε την τιμή αλλάζει.

Για να κάνουμε την σύνδεση αυτή ακόμα πιο καθαρή, δίνουμε ουσιαστικά μία απόδειξη της αναπαράστασης Feynman-Kac για την συγκεκριμένη περίπτωση.

Απόδειξη ότι η τιμή του παραγώγου ικανοποιεί την εξίσωση Black-Scholes .

Πρώτα θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

• u λύνει την εξίσωση (2.2) $\Longleftrightarrow$ η διαδικασία $e^{-rt}u(t,S(t))$ έχει μηδενική ταχύτητα κάτω από το μέτρο Q.

Για να το αποδείξουμε αυτό, ας εφαρμόσουμε πρώτα το λήμμα του Itô στην συνάρτηση $e^{rt}u(t,s)$. Τότε αφού $dS = rSdt + \sigma Sd\tilde{B}$ έχουμε ότι στο μέτρο Q

(θυμηθείτε ότι η $\tilde{B}$ είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q) η ταχύτητα της διαδικασίας $e^{rt}\,u(t,S(t))$ είναι

$$e^{-r\,t}\left[u_t + rsu_s + \frac{1}{2}s^2u_{ss} - ru\right]$$

όπου οι δείκτες σημαίνουν παράγωγο της συνάρτησης ως προς τον δείκτη (π.χ.. $u_s = \frac{\partial u}{\partial s}$ κλπ) και θεωρείται ότι το u και οι παράγωγοι του υπολογίζονται στα $(t, S(t))$.

Απόδειξη του $\Longrightarrow$: Είναι σαφές ότι αν εξίσωση (2.2) ισχύει η ταχύτητα της διαδικασίας αυτής είναι ίση με το 0. Τότε κάτω από ορισμένες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας η $e^{-r\,t}u(t,S(t))$ είναι μία martingale .

Απόδειξη του $\Longleftarrow$: Αν η ταχύτητα είναι μηδεν σχεδόν παντού (ς.π) η εξίσωση

$$u_t(t,S(t)) + r\,S(t)\,u_s(t,S(t)) + \frac{1}{2}S(t)^2\sigma^2u_{ss}(t,S(t)) - r\,u(t,S(t)) = 0$$

ισχύει με πιθανότητα 1. Αφού η κατανομή του $S(t)$ έχει θετική πυκνότητα ως προς το μέτρο Lebesgue στο διάστημα $(0,\infty)$ η εξίσωση (2.2) θα πρέπει να ισχύει για σχεδόν όλα τα (s,t) ως προς το μέτρο Lebesgue .

Ας θυμηθούμε τώρα ότι η τιμή του Ευρωπαϊκού παραγώγου την χρονική στιγμή t είναι ίση με

$$e^{-r\,t}P(t,S(t)) = E_Q(e^{-r\,T}f(S(T))) \mid \mathcal{F}_t)$$

Αλλά το δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι μία martingale κάτω από το μέτρο Q και συνεπώς και το αριστερό μέλος θα πρέπει να είναι μία martingale κάτω από το ίδιο μέτρο. Άρα η τιμή του παραγώγου $P(t,s)$ θα πρέπει να λύνει την εξίσωση (2.2). Θέτοντας $t = T$ επαναχτούμε την εξίσωση (2.3).□

Για να καθορίσουμε το χαρτοφυλάκιο το οποίο αντισταθμίζει τον κίνδυνο για το παράγωγο αρκεί να υπολογίσουμε το $\Delta = P_s$. Το κοινό όνομα της ποσότητας αυτής στην βιβλιογραφία της χρηματοοικονομικής είναι Δέλτα.

2.5 Υπολογισμός του χαρτοφυλακίου που αναπαράγει το παράγωγο συμβόλαιο

Θα θεωρήσουμε ότι το μοντέλο για την αγορά έχει την μορφή μίας διάχυσης Itô

$$dS(t) = b(S(t))dt + \sigma(S(t))dB(t), \qquad S(0) = s$$

όπου $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ανδ $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ είναι δεδομένες συναρτήσεις Lipschitz . Η διαφορά του μοντέλου αυτού με το γενικό μοντέλο που είδαμε προηγουμένως είναι ότι εδώ οι συντελεστές ταχύτητας και οι πτητικότητες δεν είναι συναρτήσεις του χρόνου (άμεσα) και δεν εμπεριέχουν τυχαιότητα εκτός μέσω της εξάρτησης τους από το $S(t)$ που είναι μία στοχαστική διαδικασία. Για παράδειγμα $b = \mu S(t)$

όπου μ είναι μία σταθερά και όχι $b = \mu(\omega)S(t)$ όπου $\mu(\omega) = sin(B_t)$. Μία εξτρα υπόθεση είναι ότι η $S(t)$ είναι ομοιόμορφα ελλειπτική δηλαδή ότι

$$\exists\, c > 0 \,:\, y^T\sigma(x)\sigma^T(x)y \geq c \mid y \mid^2,\, \forall\, y \in \mathbb{R}^n,\, x \in \mathbb{R}^n$$

Αυτό είναι μία τυπική τεχνική συνθήκη που συνεπάγεται ορισμένες ιδιότητες κανονικότητας για την διάχυση.

Θα δώσουμε τώρα ένα Λήμμα το οποίο μας δίνει την λύση της εξίσωσης που παρέχει την μορφή του χαρτοφυλακίου που αντισταθμίζει τον κίνδυνο. Πρέπει να αναφέρουμε ότι η ύπαρξη του χαρτοφυλακίου αυτού σχετίζεται με το θεώρημα αναπαράστασης martingale του Itô .

Λήμμα 2.5.1 *Έστω S μία διάχυση Itô της μορφής*

$$dS(t) = b(S(t))dt + \sigma(S(t))dB_t$$

και $S^{'}$ η διάχυση Itô

$$dS^{'}(t) = \sigma(S^{'}(t))dB(t), \qquad S = s$$

Στις παραπάνω σχέσεις $X, Y, b \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B_t \in \mathbb{R}^m$. Έστω $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Αν ισχύει η υπόθεση της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας του $S^{'}$ και υπάρχει $u \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε

$$\sigma(s)\,u(s) = b(s)$$

τότε μπορούμε να γράψουμε

$$h(S(T)) = E_{Q,s}[h(S(T))] + \int_0^T \phi(t,\omega)d\bar{B}(t) \tag{2.3}$$

όπου $\phi = (\phi_1, ..., \phi_m) \in \mathbb{R}^m$ με

$$\phi_j(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s_i}(E_s[h(S^{'}(T-t))])_{s=S(t)}\sigma_{ij}(S(t)); \;\; 1 \leq j \leq m$$

και το μέτρο Q ορίζεται από την σχέση

$$dQ(\omega) = \exp\left(-\int_0^T udB(t) - \frac{1}{2}\int_0^T u^2 dt\right)dP(\omega)$$

Μπορούμε να δούμε αμέσως πως το λήμμα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε το χαρτοφυλάκιο που αντισταθμίζει τον κίνδυνο για την απαίτηση F. Από την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος βλέπουμε ότι το χαρτοφυλάκιο που χρειαζόμαστε ικανοποιεί το

$$F^* = E_Q[F^*] + \int_0^T \phi(t,\omega)d\bar{B}(t)$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω λήμμα επιλέγοντας $h = F^*$, μπορούμε να βρούμε το ϕ, συναρτήσει της διαδικασίας προεξοφλήσεως ξ και του συγκεκριμένου τύπου του δικαιώματος που μελετάμε. Για να ξαναγυρίσουμε στις αρχικές μεταβλητές πρέπει να επιλέξουμε $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ συςη τηατ

$$\theta(t,\omega)\sigma^*(t,\omega) = \phi(t,\omega)$$

Παράδειγμα 2.5.1 *(Το μοντέλο Black-Scholes)*
Στην περίπτωση του μοντέλου Black-Scholes μπορούμε να θέσουμε $S = S(t)$ την τιμή της μετοχής που ακολουθεί τον νόμο

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB_t$$

και $S'(t) = S^*(t) = e^{-rt}S(t)$. Στην περίπτωση αυτή $n = m = 1$ και $b(S) = \mu S$, $\sigma(S) = \sigma S$. Επίσης, $h(S(T)) = F^* = e^{-rT}f(S(T))$. Σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα έχουμε

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\partial}{\partial s}E_s[h(S^*(T-t))]|_{s=S(t)}\sigma S(t)\\ &= \frac{\partial}{\partial s}E_{Q,s}[h(S(T-t))]|_{s=S(t)}\sigma S(t)\end{aligned}$$

Από την ιδιότητα Markov βλέπουμε ότι

$$E_{Q,s=S(t)}[h(S(T-t))] = E_Q[h(S(T)) \mid \mathcal{F}_t] = E_Q[h(S(T)) \mid S(t) = s]$$

Η τελευταία ποσότητα όμως δεν είναι τίποτα άλλο από την τιμή του παραγώγου $p(t) = P(t,s)$ την χρονική στιγμή t όταν $S(t) = s$. Συνεπώς το χαρτοφυλάκιο που αναπαράγει το συμβόλαιο θα μπορεί να κατασκευαστεί αν γνωρίζουμε την ποσότητα

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial s}$$

Αυτο ονομάζεται το Δελτα του χαρτοφυλακίου.

Απόδειξη του λήμματος: Ας ορίσουμε τις διαδικασίες

$$\begin{aligned}u(t,s) &= E_s[h(S'(t))]\\ g(t,s) &= u(T-t,s)\end{aligned}$$

Από τον τύπο των Feynman-Kac γνωρίζουμε πως η $u(t,s)$ είναι η λύση της εξίσωσης με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial s_i \partial s_j}$$

Ας εφαρμόσουμε τώρα τον τύπο του Itô στην διαδικασία

$$\eta(t) := g(t,S(t)) = u(T-t,S(t))$$

Μετά από κάποιες πράξεις παίρνουμε

$$d\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial s_i}(t, S(t)) \left[b_i(S(t))dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(S(t))dB_j(t) \right]$$

Τώρα (θυμηθείτε το θεώρημα του Girsanov) υπάρχει $u \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $\sigma\, u = b$. Ορίζουμε

$$\bar{B} = \int_0^t u(S(t^{'}))dt^{'} + B(t)$$

η οποία είναι μία κίνηση Brown στο μέτρο Q. Χρησιμοποιώντας την διαδικασία αυτή βρίσκουμε ότι

$$d\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial s_i}(t, S(t)) \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(S(t))d\bar{B}_j(t)$$

Αυτό μπορεί να ολοκληρωθεί και να δώσει

$$\eta(T) - \eta(0) = \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial s_i}(t, S(t)) \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(S(t))d\bar{B}_j(t)$$

Από τον ορισμό της διαδικασίας η βλέπουμε ότι

$$h(S(T)) = E^s[h(S^{'}(T))] + \int_0^T (\nabla g)^T(t, S(t))\sigma(S(t))d\bar{B}(t)$$

Αυτή είναι η ολοκληρωτική μορφή μίας στοχαστικής διαδικασίας κατά Itô . Συγκρίνοντας την με την (2.3) και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα για μοναδικότητα των ασθενών λύσεων παίρνουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε. Για να φανεί αυτό πιο ξεκάθαρα αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$E_s[h(S^{'}(T)] = E_{Q,s}[h(S(T))]$$

εφόσον κάτω απο το μέτρο Q οι S και $S^{'}$ είναι οι ίδιες διαδικασίες. □

2.6 Εναλλακτική παραγωγή της εξίσωσης $Black-Scholes$

Θα δώσουμε τώρα μία εναλλακτική παραγωγή της εξίσωσης Black-Scholes για την αποτίμηση παραγώγων προϊόντων. Ο τρόπος αυτός είναι πιο κοντά στον αρχικό τρόπο παραγωγής του μοντέλου όπως αναπτύχθηκε από τους Black-Scholes-Merton την δεκαετία του 70.

Θα υποθέσουμε ότι το παράγωγο μπορεί να συναλλάσεται στην αγορά, οτι δεν υπάρχει arbitrage και ότι η τιμή του παραγώγου την χρονική στιγμή t μπορεί να θεωρηθεί σαν μια συνάρτηση του t και της τιμής της μετοχής $S(t)$ δηλαδή ότι $p(t) = P(t, S(t))$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Itô μπορούμε να δούμε ότι η μεταβολή της αξίας του παραγώγου στον χρονο θα είναι ίση με

$$dP = \mu_P P dt + \sigma_P P dB_t$$

όπου

$$\begin{aligned} \mu_P &= \frac{P_t + \mu s P_s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 P_{ss}}{P} \\ \sigma_P &= \frac{\sigma s P_s}{P} \end{aligned}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται απο δύο τιτλους, το παράγωγο και την μετοχή. Εδω χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση οτι υπάρχουν συναλλαγές στο παράγωγο (trading). Το χαρτοφυλάκιο αυτό το θεωρούμε αυτοχρηματοδοτούμενο. Αν θ_S η θέση μας στην μετοχή και θ_P η θέση μας στο παράγωγο το χαρτοφυλάκιο αυτό θα έχει αξία

$$V = \theta_S S(t) + \theta_P P$$

και

$$\begin{aligned} dV &= \theta_S dS + \theta_P dP \\ &= \left[\theta_S \mu s + \theta_P (P_t + \mu s P_s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 P_{ss})\right] dt + [\theta_S \sigma S + \theta_P \sigma s P_s] dB_t \end{aligned}$$

όπου $s = S(t)$.

Επιθυμούμε να διώξουμε τον κίνδυνο απο το χαρτοφυλάκιο αυτό (έτσι ώστε να μπορεί να καλύψει π.χ. ο πωλητής του παραγώγου πάντοτε την θέση του). Για να γίνει αυτό επαρκεί να θέσουμε ίσο με το 0 τον όρο που πολλαπλασιάζει την κίνηση Brown άρα έχουμε

$$\theta_S = -\theta_P \frac{\partial P}{\partial s} \tag{2.4}$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δίνει την σχέση μεταξύ παραγώγου και μετοχής σε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από τους δύο αυτούς τίτλους και δεν περιέχει κίνδυνο. Από την απουσία arbitrage όμως, ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο δεν μπορεί να έχει ρυθμό αύξησης διαφορετικό από τον ρυθμό αύξησης του βέβαιου τίτλου. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} dV(t) = rV(t)dt \quad \Longrightarrow \\ \{(\theta_S + \theta_P P_s)\mu S + \theta_P (P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 P_{ss})\} dt = r(\theta_S S + \theta_P P) dt \end{aligned}$$

από την οποία χρησιμοποιώντας και την σχέση (2.4) καταλήγουμε στην σχέση

$$P_t + r s P_s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 P_{ss} - rP = 0$$

που είναι η εξίσωση Black-Scholes. Η εξίσωση αυτή θα συμπληρωθεί με την κατάλληλη τελική συνθήκη.

Ένα σύντομο σχόλιο. Πολλοί απο εσάς, ίσως εύλογα, θα αναρωτιέστε αν η παραγωγή του μοντέλου Black-Scholes είναι τόσο απλή ποιός ο λόγος να δώσουμε ολη αυτή την θεωρία; Ο λόγος είναι απλός: Κοιτάξτε τις παραδοχές που κάναμε για να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα αυτό. Η πρώτη παραδοχή ήταν η απουσία arbitrage. Με βάση την θεωρία που αναπτύξαμε πιο πάνω, μπορούμε να ελέγξουμε αν η παραδοχή αυτή είναι αληθινή ή όχι (κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Girsanov). Στα πλαίσια της μεθοδολογίας αυτής της παραγράφου, ο έλεγχος της υπόθεσης αυτής δεν είναι δυνατος. Επίσης, υποθέσαμε ότι $p(t) = P(t, S(t))$. Αυτή η υπόθεση είναι θεμελιώδης στην ανάπτυξη του μοντέλου γιατι μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα του Itô . Ειδαμε οτι στα πλαίσια της θεωρίας που αναπτύξαμε προηγουμένως, αυτό δεν χρειάζεται να ληφθεί σαν υπόθεση εφόσον μπορεί να αποδειχθεί οτι ισχύει κάνοντας χρήση της ιδιότητας Markov στο τύπο αποτίμησης $p^*(t) = E_Q[F^* \mid \mathcal{F}_t]$. Συνεπώς, η θεωρία που αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους είναι πιο πλήρης. Φυσικά, οπως σε κάθε τέτοια περίπτωση, το τίμημα που πληρώσαμε είναι η αυξημένη πολυπλοκότητα και πιθανόν εννοιολογική δυσκολία της θεωρίας.

2.7 Παραδείγματα.

Στο τμήμα αυτό θα δώσουμε παραδείγματα την εφαρμογής του γενικού τύπου αποτίμησης παραγώγων για συγκεκριμένους τύπους συμβολαίων. Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία μπορείτε υπολογίσετε την 'τίμια' τιμή μίας ευρείας γκάμας συμβολαίων.

2.7.1 Αποτίμηση του δικαιώματος ανάκλησης Ευρωπαϊκού τύπου (European call) στα πλαίσια του μοντέλου Black-Scholes .

Το δικαίωμα ανάκλησης Ευρωπαϊκού τύπου (European call) είναι ένα παράγωγο συμβόλαιο το οποίο επιτρέπει στον κάτοχο του να αγοράσει μία μετοχή, η τιμή της οποίας δίνεται από μία στοχαστική διαδικασία S, για μία προκαθορισμένη τιμή K την χρονική στιγμή της λήξης του συμβολαίου T. Η αξία του δικαιώματος αυτού την στιγμή της λήξης του είναι $(S(T) - K)^+ = max(S(T) - K, 0)$. Αυτό ανακλά το γεγονός ότι ο κάτοχος του συμβολαίου θα χρησιμοποιήσει το δικαίωμα μόνο αν η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή T είναι μεγαλύτερη K και έτσι θα έχει κέρδος $S(T) - K$. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα και δεν θα κερδίσει τίποτα.

Υποθέτωντας ότι το μοντέλο Black-Scholes (ένα ομόλογο και μία μετοχή) παρέχει καλή περιγραφή της αγοράς η τιμή του παραγώγου κάθε χρονική στιγμή t θα είναι

$$\begin{aligned} p_C(S(t), t) &= E_Q(e^{-r\,(T-t)} f(S(T), t)) \mid \mathcal{F}_t) \\ &= e^{-r\,(T-t)} E_Q((S(T) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

$$= \quad e^{-r(T-t)}E_Q((\exp(aT+\sigma\tilde{B}_T)-K)^+ \mid \mathcal{F}_t)$$

όπου $a = r - \frac{\sigma^2}{2}$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (;;) για την επιλογή αυτή για την f βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} p_C(t) &= e^{-r(t-T)}F(T-t, X_1(t)) \\ F(t,s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{y^*}^{\infty}(s\exp(\sigma y\sqrt{t}+at)-K)exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \end{aligned}$$

όπου $a = r - \frac{\sigma^2}{2}$ και $y^* = y^*(t,s)$ είναι η λύση της εξίσωσης

$$s\exp(\sigma y^*\sqrt{t}+at) = K$$

η οποία βέβαια είναι

$$y^* = \sigma^{-1}t^{-1/2}\left(\ln\left(\frac{K}{s}\right)-a,t\right)$$

Τα υπόλοιπα είνα θέμα πράξεων και μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό συναρτήσει της συνάρτησης σφάλματος. Έχουμε τελικά ότι

$$F(t,s) = se^{rt}[1-N(y^*-\sigma\sqrt{t})] - K[1-N(y^*]$$

Άρα η αξία του δικαίωματος ανάκλησης Ευρωπαϊκού τύπου (European call) κάθε χρονική στιγμή t είναι

$$\begin{aligned} p_C(t) &= p_C(t,S(t)) = S(t)N(y_1) - Ke^{-r(T-t)}N(y_2) \\ y_1 &= \frac{\ln(X_1(t)/K)+(T-t)(r+\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ y_2 &= \frac{\ln(X_1(t)/K)+(T-t)(r-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

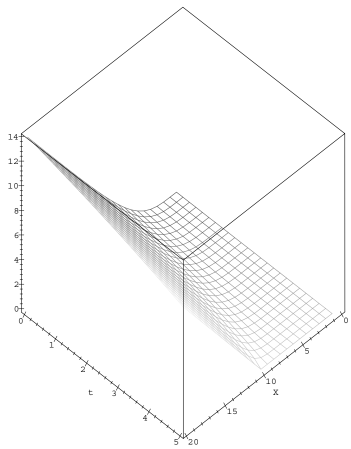
Ο συμβολισμός $p_C(t) = p_C(t,S(t))$ χρησιμοποιείται για να δωθεί έμφαση στο ότι η τιμή του παραγώγοι εξαρτάται από τον χρόνο και (έμμεσα) από την τιμή της βασικής μετοχής την χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει. Αυτό μας βοηθάει να γίνει πιο καλή σύνδεση μ ετην τιμή που θα μας δώσει η διαφορική εξίσωση Black-Scholes .

Η ίδια απάντηση μπορεί να δωθεί από την λύση της εξίσωσης Black-Scholes (2.2) με συνοριακή συνθήκη

$$p(x,T) = (x-K)^+$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γίνει είτε χρησιμοποιώντας μεθόδους ολοκληρωτικών μετασχηματισμών, είτε με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών η οποία θα μας επιτρέψει να ανάγουμε την εξίσωση Black-Scholes στην απλή εξίσωση θερμότητας. Η τελική απάντηση στην παραμετροποίηση αυτή θα είναι

$$p_c(t,x) = xN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$



Σχήμα 2.1: Η τιμή του δικαιώματος ανάκλησης Ευρωπαϊκού τύπου για $K = 10$, $T = 5$, $\sigma = 0.2$ και $r = 0.1$.

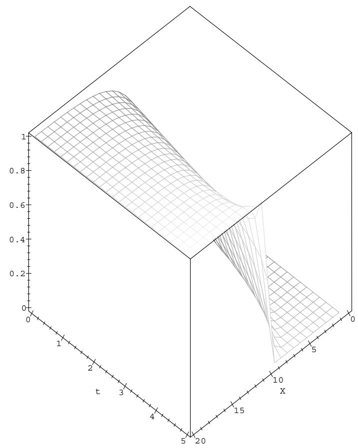
όπου

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(x/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= \frac{\ln(x/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds. \end{aligned}$$

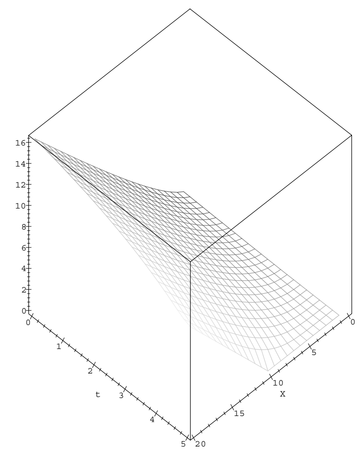
Ο λόγος μεταξύ ομολόγου και μετοχής στο χαρτοφυλάκιο που αντισταθμίζει τον κίνδυνο δίνεται από το $\frac{\partial p_c}{\partial x}$. Μετά από λίγες πράξεις παίρνουμε ότι

$$\Delta = N(d_1)$$

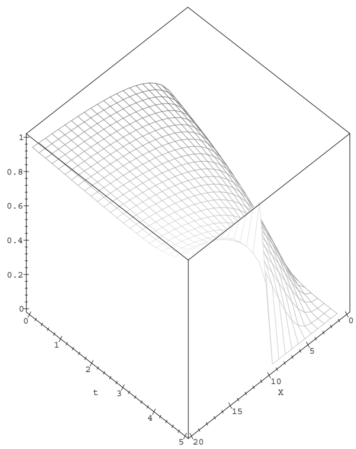
Η τιμή p_c και το Δ για το δικαίωμα ανάκλησης Ευρωπαϊκού τύπου με λήξη $T = 5$ και τιμή εφαρμογής (exercise price) $K = 10$ όταν $\sigma = 0.2$ και $r = 0.1$ δειχνονταί στα σχήματα 2.1 και 2.2 αντιστοίχως. Στα σχήματα 2.3 ανδ 2.4 δείχνουμε το ίδιο πράγμα αλλά για μεγαλύτερη τιμή της πτητικότητας της βασικής μετοχής (underlying) $\sigma = 0.8$. Αυτό δείχνει την επίδραση που έχεδι η αύξηση της πτητικότητας της μετοχής στην τιμή του δικαίωματος ανάκλησης Ευρωπαϊκού



Σχήμα 2.2: Το Δ για το δικαίωμα ανάκλησης Ευρωπαϊκού τύπου για $K = 10$, $T = 5$, $\sigma = 0.2$ και $r = 0.1$.



Σχήμα 2.3: Η τιμή του δικαιώματος ανάκλησης Ευρωπαϊκού τύπου για Τ $K = 10$, $T = 5$, $\sigma = 0.8$ και $r = 0.1$.



Σχήμα 2.4: Το Δ για το δικάιωμα ανάκλησης Ευρωπαϊκού τύπου για $K = 10$, $T = 5$, $\sigma = 0.8$ και $r = 0.1$.

τύπου κατά το μοντέλο Black-Scholes [1] Βλέπουμε πως η αύξηση της πτητικότητας οδηγεί σε άυξηση της τιμής του Ευρωπαϊκού δικαιώματος ανάκλησης.

2.7.2 European put option.

Το συμβόλαιο αυτό επιτρέπει στον κάτοχο του να πουλήσει σε αυτόν που του έδωσε το συμβόλαιο (και φυσικά αυτό πρέπει να δεχθεί!) την ημέρα λήξης του συμβολαίου την βασική μετοχή (underlying) για την τιμή K. Τότε η αξία του συμβολαίου την ημέρα λήξης T θα είναι $(K - S(T))^+$ (αυτό είναι το κέρδος του κατόχου του συμβολαίου). Η παραπάνω ανάλυση παραμένει ισχύουσα αρκεί να αλλάζουμε το f με την παραπάνω συνάρτηση. Μπορούμε όμως να δούμε ότι $(K - S)^+ = (S - K)^+ - S + K$ έτσι ώστε εισάγοντας την έκφραση αυτή στις μέσες τιμές βρίσκουμε ότι

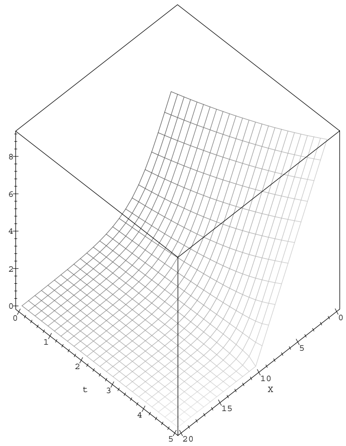
$$p_{put}(t) = p_c(t) - S(0) + Ke^{-r\,(T-t)}$$

Η σχέση αυτή μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την τιμή του put συναρτήσει της τιμής του δικαιώματος ανάκλησης (call) και η σχέση αυτή ονομάζεται **call-put parity** .

Το Δ για το European put είναι

$$\Delta = N(d_1) - 1 = -N(-d_1)$$

[1] Οι υπολογισμοί αυτοί έγινας χρησιμοποιώντας το πακέτο λογισμικού Maple και την βιβλιοθήκη που προσφέρει.



Σχήμα 2.5: Η τιμή του European put για $K = 10$, $T = 5$, $\sigma = 0.2$ και $r = 0.1$.

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να υπολογίσουμε την τιμή του δικαιώματος αυτού, είναι να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Black-Scholes (2.2) με συνοριακή συνθήκη $p(T,x) = (K-x)^+$.

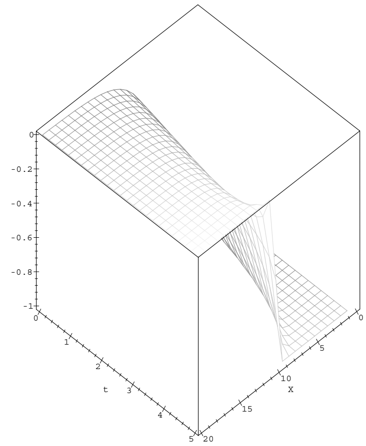
Η τιμή p_{put} και το Δ για το European put με λήξη $T = 5$ και τιμή εξάσκησης (exercise price) $K = 10$ όταν $\sigma = 0.2$ και $r = 0.1$ φαίνονται στα σχήματα 2.5 και 2.6 αντιστοίχως. Στα σχηματα 2.7 και 2.8 φαίνεται το ίδιο πράγμα αλλά για πιο ψηλές τιμές της πτητικότητας της βασικής μετοχής, $\sigma = 0.8$. Αυτό δείχνει την επίδραση της αύξησης της πτητικότητας για το τιμή που προβλέπει για το European put το μοντέλο Black-Scholes price [2] Παρατηρούμε ότι η υψηλή πτητικότητα αυξάνει την τιμή του European put .

2.7.3 Zero-coupon bond.

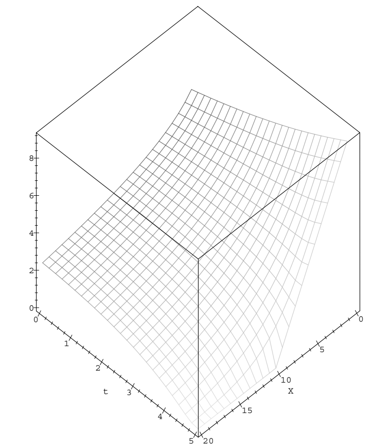
Το zero-coupon bond με maturity T και face value one είναι ένα συμβόλαιο που έχει μη-τυχαία απόδοση ίση με 1 την χρονική στιγμή T και τίποτε οποιαδήποτε άλλη στιγμή. Εφαρμόζοντας την γενικό τύπο αποτίμησης βλέπουμε ότι

$$p = \xi(t) E_Q[\xi(T) \mid \mathcal{F}_t]$$

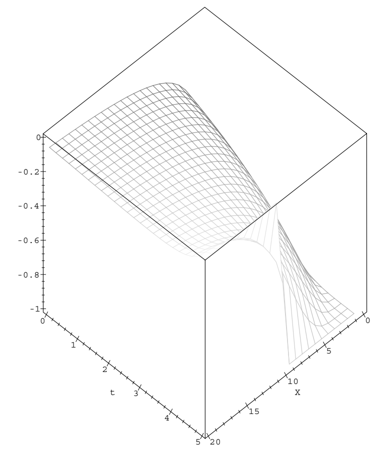
[2] Τα σχήματα αυτά έγιναν με την χρήση του πακέτου λογισμικού Maple και της βιβλιοθήκης που προσφέρει.



Σχήμα 2.6: Το Δ για το European put για $K = 10$, $T = 5$, $\sigma = 0.2$ και $r = 0.1$.



Σχήμα 2.7: Η τιμή του European put για $K = 10$, $T = 5$, $\sigma = 0.8$ και $r = 0.1$.



Σχήμα 2.8: Το Δ για το European put για $K = 10$, $T = 5$, $\sigma = 0.8$ και $r = 0.1$.

όπου $\xi(t)$ είναι η διαδικασία βάση της οποίας κάνουμε την προεξόφληση. Στην περίπτωση που το r είναι ντετερμινιστικό βλέπουμε ότι

$$p = \exp\left(-\int_t^T r\,ds\right)$$

που δεν είναι τίποτε άλλο από το ποσό που θα έπρεπε να τοποθετούσαμε στην τράπεζα την χρονική στιγμή t για να έχουμε σίγουρη απόδοση ίση με 1 την χρονική στιγμή T.

Το συμβόλαιο αυτό έχει πιο πολύ ενδιαφέρον στην περίπτωση που το επιτόκιο (bond rate) είναι στοχαστικό (όπως και άλλωστε συμβαίνει συνήθως στην πραγματικότητα). Σε τέτοιες περιπτώσεις πρέπει να χρησιμοοιήσουμε μοντέλα για το επιτόκιο, να υπολογίσουμε το μέτρο Q και το χαρτοφυλάκιο που αντισταθμίζει τον κίνδυνο. Στην σύγχρονη θεωρία της χρηματοοικονομικής η κατασκευή τέτοιων μοντέλων παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον (**term structure models**).

2.7.4 Forward contracts.

Ένα forward contract είναι μία συμφωνία να αγοράσουμε κάποιον βασικό τίτλο π.χ. X την χρονική στιγμή T για μία καθορισμένη (μη-τυχαία) τιμή K που ονομάζεται η τιμή παράδοσης (delivery price). Σε αντίθεση με το δικάιωμα ανάκλησης (call) και οι δύο πλευρές των συμβαλλόμενων είναι υποχρεωμένες να τιμήσουν το συμβόλαιο. Η τιμή του forward contract την χρονική στιγμή t είναι

$$p(t) = \xi(t)^{-1} E_Q[xi(T)(X - K) \mid \mathcal{F}_t]$$

2.8 Βασικά σημεία του κεφαλαίου.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε την αποτίμηση Ευρωπαϊκών παραγώγων συμβολαίων και παράγαμε έναν τύπο που δίνει την τιμή τους την χρονική στιγμή t.

Τα βασικά σημεία που πρέπει να θυμόμαστε είναι

- Ένα Ευρωπαϊκό παράγωγο συμβόλαιο είναι ένα παράγωγο συμβόλαιο που μπορεί να εξασκηθεί μόνο σε μία δεδομένη (και προσυμφωνημένη) χρονική στιγμή T.
- Για να βρούμε την τιμή του συμβολαίου πρέπει να κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αναπαράγει την αξία του ς.β για κάθε χρονική στιγμή.
- Μετά εργαζόμαστε σε ένα νέο ισοδύναμο μέτρο martingale Q για την κανονικοποιημένη διαδικασία τιμών της αγοράς. Το μέτρο αυτό ονομάζεται **risk adjusted measure**.
- Η τιμή του συμβολαίου είναι

  $$p(t) = \xi(t)^{-1} E_Q(\xi(T) f(T) \mid \mathcal{F}_t)$$

  Υπενθυμίζουμε ότι η $\xi(t)$ είναι η διαδικασία προεξόφλησης δηλαδή $p^*(t) = \xi(t)p(t)$ και $F^* = \xi(T)F$. Στην περίπτωση σταθερού επιτοκίου $\xi(t) = e^{-rt}$. Ο τύπος αυτός ισχύει και σε πιο γενικά μοντέλα για την αγορά αρκεί η αγορά να επιτρέπει την ύπαρξη του μέτρου Q.
- Στην ειδική περίπτωση που η αγορά μπορεί να περιγραφεί από μία διαδικασία Itô :

  ♠ Το μέτρο Q μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Girsanov.

  ♠ Στο νέο μέτρο οι κανονικοποιημένες τιμές των τίτλων έχουν μηδενική ταχύτητα, και οι μη κανονικοποιημένες τιμές των τίτλων που περιέχουν κίνδυνο (μετοχές) έχουν την ίδια ταχύτητα με το ομόλογο.

  ♠ Η τιμή του Ευρωπαϊκού παραγώγου μπορεί να δωθεί από την λύση μίας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (την εξίσωση Black-Scholes) με κατάλληλα επιλεγμένες συνοριακές συνθήκες (οι οποίες εξαρτώνται από την συγκεκριμένη μορφή του παραγώγου). Η ιδιαφορική αυτή εξίσωση έχει εν γένει την μορφη $p_t - Lp - rp = 0$ όπου p_t είναι η παράγωγος του p ως προς το t και L ο γεννήτορας τελεστής της στοχαστικής διαδικασίας που δίνει την τιμή του τίτλου που περιέχει ρίσκο (μετοχή) στον νέο μέτρο Q.

Κεφάλαιο 3

Στοχαστική θεωρία ελέγχου και εφαρμογές

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια εισαγωγή σε ένα σημαντικό κομμάτι της στοχαστικής ανάλυση, την στοχαστική θεωρία ελέγχου και θα δείξουμε πως αυτό μπορεί να έχει πολυ ενδιαφέρουσες εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά.

Το γενικό πρόβλημα τηςθεωρίας ελέγχου είναι να επιλέξουμε κάποιες μεταβλητές ελέγχου σε ένα μοντέλο κατα τέτοιο τρόπο ώστε να μεγιστοποίησουμε (ή να ελαχιστοποιήσουμε) κάποια συνάρτηση της τροχιάς της στοχαστικής διαδικασίας που μας ενδιαφέρει. Για να εισάγουμε το πρόβλημα και να δείξουμε το πως προβλήματα τέτοιας μορφής εμφανίζονται με πολύ φυσικό τρόπο στις εφαρμογές θα ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.1.1 *Ας θεωρήσουμε ένα απλό πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου σε βάθος χρόνου. Ένας επενδυτής μπορεί να επιλέξει ανάμεσα σε 2 τίτλους, ένα βέβαιο τίτλο με απόδοση r και ένα αβέβαιο τίτλο με απόδοση μ και πτητικότητα σ. Ο επενδυτής μπορεί να επιλέξει την θέση του στους δύο τίτλους, έστω $u_0(t), u_1(t)$ ο σχετικός του πλούτος στον καθένα από τους δύο τίτλους, και μπορεί επίσης να επιλέξει ένα πλάνο κατανάλωσης δηλαδή μια στοχαστική διαδικασία $c(t)$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε (Ασκηση) ότι ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο το οποίο έχει σχετικη θέση $(u_0(t), u_1(t))$ και κατανάλωση $c(t)$ θα ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση*

$$dX_t = X_t(u_0(t)r + u_1(t)\mu)dt - c(t)dt + \sigma u_1(t)X_t dB_t$$

όπου $X_t := V_t$ η διαδικασία αξίας του χαρτοφυλακίου που έχουμε επιλέξει. Βλέπουμε ότι $X_t = X(t, u_0, u_1, c)$ δηλαδή η εξέλιξη της αξίας του χαρτοφυλακίου εξαρτάται από την επιλογή των (στοχαστικών διαδικασιών) $u_0(t), u_1(t), c(t)$ οι οποίες ονομάζονται διαδικασίες ελέγχου, μια και ο επενδυτής έχει πλήρη έλεγχο σε αυτές.

Ο τρόπος που θα επιλέξει ο επενδυτής τις διαδικασίες αυτές είναι έτσι ώστε να επιτύχει κάποιο σκοπό. Στην συγκεκριμένη περίπτωση ο σκοπός αυτός θα είναι να μεγιστοποιήσει όσο μπορεί την κατανάλωση του $c(t)$ *έχοντας σαν στόχο στο τέλος κάποιας χρονικής περιόδου* $t = T$ *να μεγιστοποιήσει επίσης και κάποια συνάρτηση του τελικού του πλούτου* X_T. *Ο στόχος μπορεί να μοντελοποιηθεί κάνοντας χρήση κάποιας συνάρτησης ωφελιμοτητας τόσο της κατανάλωσης όσο και του τελικού πλούτου. Συνεπώς εν γένει ο στόχος του επενδυτή είναι να μεγιστοποιήσει το συναρτησοειδές*

$$J := E\left[\int_0^T U(t, c(t))dt + \Phi(X_T)\right]$$

Ένα παράδειγμα της $U(t, c(t))$ *μπορεί να είναι η* $U(t, c(t)) = e^{-\delta t} ln(c(t))$ *και της* $\Phi(X_t) = -(X_T - A)^2$, *δηλαδή ο επενδυτής θέλει να μεγιστοποιήσει μια λογαριθμική συνάρτηση ωφελιμότητας της κατανάλωσης (αλλά προεξοφλημένη) καθ'ολη τη διάρκεια της χρονικής περιόδου* $(0, T)$ *και να ελαχιστοποιήσει την μέση τετραγωνικη αποσταση του τελικού του πλούτου απο ένα στόχο* A *τον οποίο έχει θέσει. Μια και οι τιμές της διαδικασίας Itô* X_t *εξαρτώνται απο την επιλογή των* $u_0(t), u_1(t), c(t)$ *εν γένει* $J = J(u_0, u_1, c)$. *Μεταβάλλοντας τα* u_0, u_1, c *μεταβάλλεται η τιμή του* J *και μπορεί να υπάρχει επιλογή των διαδικασιών αυτών π.χ.* $u_0(t)^*, u_1(t)^*, c(t)^*$ *για τις οποίες η* J *γίνεται μέγιστη. Αυτή είναι και η βέλτιστη επενδυτική πολιτική για τον επενδυτή αυτόν. Τέλος, παρατηρούμε ότι η επιλογή των* u_0, u_1, c *δεν μπορεί να είναι αυθαίρετη. Οι μεταβλητές ελέγχου θα υπόκεινται στους εύκολονόητους περιορισμούς* $u_0(t) + u_1(t) = 1$ *και* $c(t) \geq 0$ *(γιατί;). Οι περιορισμοί αυτοί μπορεί να μοντελοποιηθούν γεωμετρικά στο λέγοντας ότι η διαδικασία* $u_t = (u_0(t), u_1(t), c(t))$ *θα ανήκει σε κάποιο σύνολο* $G \subset \mathbb{R}^3$ *(προσπαθείστε να το παραστήσετε γεωμετρικά).*

3.2 Το γενικό πρόβλημα

Θα εισάγουμε τώρα μία γενικότερη μορφή του προβλήματος της στοχαστικής θεωρίας ελέγχου και θα δώσουμε ορισμένες τεχνικές για την επίλυση του.

Ας θεωρήσουμε μια διαδικασία Itô $X_t \in \mathbb{R}^n$ η οποία υπόκειται σε μία διαδικασία ελέγχου $u_t \in \mathbb{R}^k$. Η διαδικασία X_t ονομάζεται διαδικασία κατάστασης και θεωρούμε ότι δίνεται σε διαφορική μορφή ως

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

όπου η κίνηση Brown $B_t \in \mathbb{R}^d$.

Ο σκοπός του επενδυτή είναι να επιλέξει την διαδικασία ελέγχου u κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μεγιστοποιήσει το συναρτησοειδές

$$J(u) = E\left[\int_0^T U(t, X_t, u_t)dt + \Phi(X_T)\right]$$

όπου $X_t = X_t^u$ και έτσι υποδηλώνουμε την εξάρτηση της διαδικασίας X_t από την επιλογή της διαδικασίας ελέγχου $u = u_t$.

Η διαδικασία ελέγχου οφείλει να ικανοποιεί ορισμένους περιορισμούς οι οποίοι θεωρούμε ότι μπορούν να συνοψιστούν στην γεωμετρική συνθήκη $u_t \in G \subset \mathbb{R}^k$. Ένας έξτρα περιορισμός είναι ότι η u_t πρέπει να είναι τέτοιας μορφής ώστε η στοχαστική διαφορική εξίσωση (3.2) να έχει μοναδική λύση. Αν η διαδικασία ελέγχου ικανοποιεί τις παραπάνω δύο συνθήκες τότε λέμε ότι είναι αποδεκτή διαδικασία ελέγχου. Θα συμβολίζουμε το σύνολο των αποδεκτών διαδικασιών ελέγχου με το σύμβολο $\mathcal{U}$, δηλαδή

$$\mathcal{U} := \{u \in \mathbb{R}^k | u \in G \text{ και} \exists! \text{λύση της } (3.2)\}$$

όπου με $\exists!$ συμβολίζουμε το 'υπάρχει μοναδική'.

Το πρόβλημα λοιπόν μπορεί να γραφεί και με την ακόλουθη μορφή:
Έστω

$$\hat{J} = \sup_{u \in \mathcal{U}} J(u)$$

Αν υπάρχει u^* τέτοιο ώστε $J(u^*) = \hat{J}$ τότε το u^* ονομάζεται η βέλτιστη διαδικασία ελέγχου. Το πρόβλημα μας είναι να βρούμε το u^*.
Αξίζει να σημειωθεί ότι το u^* μπορεί και να μην υπάρχει.

Τέλος, θα θεωρήσουμε ότι μας ενδιαφέρει μια ειδικότερη κλάση διαδικασιών ελέγχου u τέτοιες ωστε $u(t) = u(t, X_t)$ δηλαδή ο νόμος ελέγχου την χρονική στιγμή t θα εξαρτάται απο την κατάσταση του συστήματος την ίδια χρονική στιγμή. Θα θεωρήσουμε δηλαδή ότι υπάρχει κάποια συνάρτηση $u(t, x)$ τέτοια ώστε να ισχύει $u^*(t) = u(t, X_t)$. Νόμοι ελέγχου της μορφής αυτής ονομάζονται **νόμοι ελέγχου τύπου ανάδρασης** (feedback controls). Η εύρεση της βέλτιστης πολιτικής στην περίπτωση αυτή απλοποιείται στον καθορισμό της μορφής της συνάρτησης $u(t, x)$.

3.3 Η μέθοδος του δυναμικού προγραμματισμού

Θα παρουσιάσουμε τώρα μία μέθοδο για την επίλυση προβλημάτων της στοχαστικής θεωρίας ελέγχου η οποία βασίζεται στην τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού. Βασικό έργαλείο στην τεχνική αυτή είναι μία μη γραμμική ντετερμινιστική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, η εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman. Η γενική ιδέα του δυναμικού προγραμματισμού είναι να εμβαπτίσουμε το συγκεκριμένο μας πρόβλημα σε μία γενικότερη κλάση προβλημάτων, και να επιλύσουμε την γενικότερη κλάση αυτή οπότε να πάρουμε σαν ειδική περίπτωση στο τέλος την λύση στο αρχικό μας πρόβλημα.

Ας δούμε όμως πιο ξεκάθαρα τι μπορεί να είναι το πιο γενικό αυτό πρόβλημα. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο θέλουμε να βρούμε την 'μέγιστη' τιμή του $J(u)$ αν η διαδικασία κατάστασης την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην θέση x_0. Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να λύσουμε το γενικότερο πρόβλημα αν μπορούμε να ξεκινήσουμε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t στην θέση x. Αυτο στο συγκεκριμένο παράδειγμα που αναφέραμε προηγουμένως αντιστοιχεί στο να ξεκινήσουμε να ελέγχουμε το χαρτοφυλάκιο μας την χρονική στιγμή t στην οποία βρισκόμαστε με πλούτο x. Το συναρτησοειδές που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε θα πάρει μέγιστη τιμή που θα εξαρτάται από την 'αρχική' μας θέση δηλαδή

$$J(t,x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} E_{t,x}\left[\int_t^T U((t, X_{t'}, u_{t'})dt^{'} + \Phi(X_T)\right] \tag{3.1}$$

όπου οι δείκτες t, x συμβολίζουν το ότι η διαδικασία κατάστασης ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} dX_s &= \mu(s, X_s, u_s)ds + \sigma(s, X_s, u_s)dB_s, \quad s \le t \\ X_t &= x \end{aligned}$$

Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι το αρχικό μας πρόβλημα θα αντιστοιχεί την λύση του γενικού προβλήματος αν $t = 0$ και $x = x_0$. Θα δείξουμε ότι η λύση του γενικού πρβλήματος μπορεί να δοθεί μέσω της λύσης μιας ντετερμινιστικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους, την εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman. Η λύση της εξίσωσης αυτής μπορεί να δώσει την συνάρτηση $J(t,x)$ και γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} + \sup_{u \in G}\{U(t,x,u) + \mathcal{A}^u J(t,x)\} &= 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n \\ J(T,x) &= \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.2}$$

Με $\mathcal{A}^u$ συμβολίζουμε τον χαρακτηριστικό τελεστή της διαδικασίας Itô X_t ο οποίος εξαρτάται από την επιλογή της διαδικασίας ελέγχου u. Συγκεκριμένα:

$$\mathcal{A}^u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Θα δώσουμε τώρα τα δύο βασικά θεωρήματα τα οποία μας παρέχουν την μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος ελέγχου.

Θεώρημα 3.3.1 *Εστω $J(t,x)$ όπως στην (3.1) και ας θεωρήσουμε ότι η $J(t,x)$ είναι αρκετά ομαλή συνάρτηση. Τότε:*
(α) Η συνάρτηση $J(t,x)$ ικανοποιεί την εξίσωση (3.3) και
(β) Για κάθε $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ το sup στην εξίσωση (3.3) επιτυγχάνεται από την $u = u^*(t,x)$.

Το παραπάνω θεώρημα μας παρέχει μια αναγκαία συνθήκη για την επίλυση του προβλήματος, υπό την έννοια ότι αν υποθέσουμε ότι μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman η λύση της μας παρέχει έναν υποψήφιο για την βέλτιστη πολιτική. Για την πληρη επίλυση του προβλήματος χρειαζόμαστε και μία επαρκή συνθήκη. Αυτό γινεται κάνοντας χρήση του ακόλουθου θεωρήματος (θεωρήματος επαλήθευσης):

Θεώρημα 3.3.2 (Θεώρημα επαλήθευσης) *Έστω ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $H(t,x)$ και $g(t,x)$ τέτοιες ώστε*

1. *η H να είναι αρκετά λεία και να ικανοποιεί την εξίσωση (3.3) όπου έχουμε αντικαταστήσει την J με την H,*

2. *η συνάρτηση g είναι ένας αποδεκτός νόμος ελέγχου, και*

3. *για κάθε $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ (δεδομένα) το*

$$\sup_{u\in G}\{U(t,x,u) + \mathcal{A}^u H(t,x)\}$$

επιτυγχάνεται απο την επιλογή $u = g(t,x)$.

Τότε, ισχύει $J(t,x) = H(t,x)$, όπου $J(t,x)$ δίνεται από την σχέση (3.1) και $u^*(t,x) = g(t,x)$.

Τα δύο παραπάνω θεωρήματα μας δίνουν μια διαδικασία επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης:

- Γράφουμε την εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman για το πρόβλημα βελτιστοποίησης που μας ενδιαφέρει.

- Επιλύουμε το στατικό πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\sup_{u\in G}\{U(t,x,u) + \mathcal{A}^u J(t,x)\}$$

  και βρίσκουμε το u^* για το οποίο επιτυγχάνεται το *sup*. Στο βήμα αυτό θεωρούμε γνωστα τα $t, x, \mu, \sigma, J(t,x)$ και λύνουμε ως προς το u^*. Το u^* λόγω της μορφής του τελεστή $\mathcal{A}^u$ θα είναι μια μη γραμμική συνάρτηση της J και των παραγώγων της ως προς x, $u^* = \mathcal{G}(t,x,J,J_x,J_{xx})$.

- Λύνουμε μετά την μη γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial t} + U(t,x,u^*) + \mathcal{A}^{u^*} J(t,x)\} &= 0, \;\; (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n \qquad (3.3)\\ J(T,x) &= \Phi(x), \;\; x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

- Έχοντας υπολογίσει την $J(t,x)$ γυρίζουμε πίσω στο βήμα 2 και αντικαθιστούμε στην $u^* = \mathcal{G}(t,x,J,J_x,J_{xx})$ την $J(t,x)$ που βρήκαμε στο βήμα 3. Έτσι παίρνουμε τον νόμο ανάδρασης $u^* = u(t,x)$.

Εν γένει η εξίσωση στην οποία καταλήγουμε στο βήμα 3 δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια ένα πρόβλημα για το οποίο είναι εφικτή μια αναλυτική λύση.

3.4 Το πρόβλημα του *Merton*

Ας υποθέσουμε πως ένας επενδυτής επιλέγει μεταξύ δύο τίτλων, ένος τίτλου ο οποίος δεν περιέχει κίνδυνο και έχει απόδοση r και ενος τίτλου που περιέχει κίνδυνο και έχει απόδοση μ και πτητικότητα σ. Ο επενδυτής πρέπει να μεγιστοποιήσει μια συνάρτηση ωφελιμότητας της κατανάλωσης του κατά την διάρκεια της περιόδου $[0, T]$ και μια συνάρτηση ωφελιμότητας του τελικού του πλούτου. Ας υποθέσουμε ότι το συναρτησοειδές το οποίο θέλει να βελτιστοποιήσει ο επενδυτής είναι της μορφής

$$J(u) = E\left[\int_0^T U(t, X_t, u_t)dt + \Phi(X_T)\right]$$

(όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας θα πάρουμε $\Phi = 0$) και η διαδικασία αξιας του χαρτοφυλακίου X_t θα είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = X_t(u_0(t)r + u_1(t)\mu)dt - c(t)dt + \sigma u_1(t)X_t dB_t$$

Ο χαρακτηριστικος τελεστής $\mathcal{A}^u$ ειναι της μορφής

$$\mathcal{A}^u = [(x(u_0 r + u_1\mu) - c]\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 u_1^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Η εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman παιρνει την μορφή

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \sup_{u_0+u_1=1, c\geq 0}\left\{U(t,c) + [(x(u_0 r + u_1\mu) - c]\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 u_1^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = 0$$

με τελική συνθήκη $J(T, x) = \Phi(x) = 0$ (αφού θεωρήσαμε ότι ο επενδυτής δεν ενδιαφέρεται για τον τελικό του πλούτο αλλά μόνο για την κατανάλωση του).

Το στατικό πρόβλημα βελτιστοποίησης θα είναι της μορφής:

$$\sup_{u_0+u_1=1, c\geq 0}\left\{U(t,c) + [(x(u_0 r + u_1\mu) - c]\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 u_1^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}$$

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να απλοποιηθεί: Ο περιορισμος $u_0 + u_1 = 1$ μπορεί να γραφεί $u_0 = 1 - u_1$ οπότε το πρόβλημα βελτιστοποίησης γίνεται

$$\sup_{w\in\mathbb{R}, c\geq 0}\left\{U(t,c) + [(x((1-w)r + w\mu) - c]\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 w^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}$$

όπου θέσαμε $w := u_1$. Οι συνθήκες πρωτης τάξης για το πρόβλημα αυτό συνίστανται στο να θέσουμε τις παραγώγους της ποσότητας που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ως προς τις μεταβλητές ελέγχου w, c ισες προς το 0. Έτσι παίρνουμε τις σχέσεις

$$\frac{\partial}{\partial c}U(t, c^*) = \frac{\partial J}{\partial x} = J_x$$

$$\frac{\partial J}{\partial x}x(\mu - r) + \sigma^2 w^* x^2 \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = 0$$

Οι δύο παραπάνω σχέσεις μας δινουν το c^*, w^* σαν συνάρτηση του J και των παραγώγων του οπότε αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman παίρνουμε μία εξίσωση η οποία περιέχει μονο την άγνωστη συνάρτηση J και τις παραγώγους της, άρα μια ισχυρά μη γραμμικη διαφορική εξίσωση ως προς J, η λύση της οποίας θα μας δώσει την βέλτιστη πολιτική.

Η εξίσωση αυτή εν γένει είναι πολύ δυσκόλη οπότε ας θεωρήσουμε μια ειδικη περίπτωση. Ας θεωρήσουμε ότι ο επενδυτής έχει συνάρτηση ωφελιμότητας για την κατανάλωση της μορφής $U(t,c) = e^{-\delta t}c^{\gamma}$ δηλαδή μια συνάρτηση ωφελιμότητας που διατηρεί σταθερό το σχετικο μέτρο κινδύνου. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι η εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman επιδέχεται ειδικές λύσεις της μορφής

$$J(t,x) = e^{-\delta t}h(t)x^{\gamma}$$

όπου $h(t)$ είναι μια άγνωστη συνάρτηση του t η οποία θα καθοριστεί στην συνέχεια. Τοποθετώντας τις εκφράσεις αυτές στις συνθήκες πρώτης τάξης (οι πράξεις αφήνονται σαν άσκηση) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} c^* &= (xh(t))^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ w^* &= \frac{1}{1-\gamma}\frac{\mu-r}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Βλέπουμε ήδη κάτι το οποίο είναι πολύ λογικό: Το ποσοστό του πλούτου το οποίο τοποθετείται στον αβέβαιο τίτλο είναι ανάλογο προς τον λόγο του Sharpe για τον τίτλο αυτό, δηλαδή με τον λόγου της παραπάνω μέσης απόδοσης που αυτός προσφέρει διαιρεμένο με τον κίνδυνο που ο τίτλος αυτός περιέχει.

Για να ολοκληρώσουμε την λύση πρέπει να βρούμε την μορφή της άγνωστης συνάρτησης $h(t)$. Αντικαθιστώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman βλέπουμε ότι η συνάρτηση $h(t)$ ικανοποιεί την συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) + Ah(t) + Bh(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} &= 0 \\ h(T) &= 0 \end{aligned}$$

όπου A, B σταθερές που εξαρτώνται από τα $\mu, r, \gamma, \sigma, \delta$. Η τελευταία εξίσωση είναι μιά εξίσωση της μορφής Bernoulli που γραμμικοποιείται με την αλλαγή μεταβλητών $y(t) = h(t)^{\alpha}$ όπου $\alpha = \frac{1}{1-\gamma}$.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικές μέθοδοι για την τιμολόγηση παράγωγων

4.1 Εισαγωγή

Είναι πολύ λίγες οι περιπτώσεις στις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά την τιμή ενός παραγώγου. Αυτό μπορεί να γίνει σε συγκεκριμένα μοντέλα όπως το μοντέλο Black-Scholes. Πολλά από τα μοντέλα τα οποία εμφανίζονται στην πράξη όμως δεν επιδέχονται αναλυτικής λύσης οπότε είναι απαραίτητο να βρεθεί κάποιος τρόπος για την προσέγγιση της τιμής του παραγώγου κάνοντας χρήση υπολογιστικών μεθόδων. Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε μια εισαγωγή στις κύριες αριθμητικές μεθόδους που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την την αποτίμηση παραγώγων.

Οι μέθοδοι που θα παρουσιάσουμε χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες:

A Μέθοδοι τύπου Monte-Carlo ή μέθοδοι προσομοίωσης

B Μέθοδοι βασισμένες στην αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους.

4.2 Μέθοδοι τύπου $Monte - Carlo$

Οι μέθοδοι τύπου Monte-Carlo ή μέθοδοι προσομοίωσης, είναι καθαρά πιθανοθεωρητικές μέθοδοι και βασίζονται στην αναπαράσταση της τιμής ενός παραγώγου σαν την υπό συνθήκη μέση τιμή

$$V^*(t) = E_Q[F_T^* \mid \mathcal{F}_t]$$

όπου $V^*(t)$ είναι η προεξοφλημένη τιμή του παραγώγου την χρονική στιγμή t, F_T^* είναι η προεξοφλημένη (τυχαία) απολαβή από το παράγωγο την χρονική στιγμή T, Q είναι το ισοδυναμο μέτρο martingale και $\mathcal{F}_t$ είναι η σ-άλγεβρα που περιέχει την ιστορία της αγοράς μέχρι την χρονικη στιγμή t, δηλαδή είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις διαδικασίες τιμών μέχρι την χρονικη στιγμή αυτή. Η σχέση αυτή απλοποιείται αν ζητήσουμε την τιμή του παραγώγου την χρονική στιγμή $t = 0$ οπότε παίρνει την μορφή

$$V(0) = E_Q[F_T^*].$$

Ας υποθέσουμε ότι η τελική απολαβή από το παράγωγο είναι κάποια συνάρτηση της τελικής τιμής ενός από τους βασικούς τίτλους, δηλαδή ότι $F_T = F(S_T, T)$ όπου η S_t είναι μια διαδικασία Itô της μορφής

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma dB_t$$

με αρχική τιμή $S_0 = s$, όπου τα μ και σ δεν είναι απαραίτητα σταθερά. Παράγωγα της μορφής αυτής είναι π.χ. τα call ή τα put.

Οι μέθοδοι Monte - Carlo βασίζονται στην προσέγγιση της μέσης τιμής σαν ένα άθροισμα επάνω σε μια σειρά πραγματοποιήσεων της τυχαίας μεταβλητής F_T^*. Φυσικά, για να γίνει αυτό θα πρέπει να έχουμε πρώτα μια σειρά πραγματοποιήσεων της τυχαίας μεταβλητής S_T, δηλαδή να παράγουμε μια σειρά τροχιών της στοχαστικής διαδικασίας των τιμών. Συνεπώς έχουμε το παρακάτω σχήμα:

1. Κάνουμε N πραγματοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας S_t και καταγράφουμε τις τυχαίες μεταβλητές $(S_T)_i$, $i = 1, ..., N$

2. Υπολογίζουμε την συνάρτηση $F(t, S)$ στις τιμές αυτές δηλαδή παίρνουμε τις τυχαίες μεταβλητές $(F)_i = F(T, (S_T)_i)$.

3. Θέτουμε
$$\hat{E}[F^*(S_T, T)] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(T, (S_T)_i)^*$$
ποσότητα την οποία λαμβάνουμε ως προσέγγιση της μέσης τιμής.

4. Τέλος, σαν πρόσεγγιση της τιμής του παραγώγου λαμβάνουμε την ποσότητα
$$\hat{P} := \hat{E}[F^*(S_T, T)]$$

Η ελπίδα των μεθόδων προσομοίωσης είναι ότι αν πάρουμε αρκετές πραγματοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας (N μεγάλο) τότε το άθροισμα στο βήμα 3 θα τείνει στην πραγματική τιμή της ποσότητας $E_Q[F^*]$.

Παρατηρείστε ότι η μέση τιμή είναι κάτω από το μέτρο Q. Πως θα ενσωματωθεί αυτό στην μέθοδο προσομοίωσης; Θυμόμαστε από την συζήτηση σχετικά με το ισοδύναμο μέτρο martingale Q και την μελέτη του θεωρήματος του Girsanov ότι κάτω από το μέτρο αυτό η διαδικασία τιμών των μετοχών θα πρέπει να δίνεται από την διαδικασία Itô

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\hat{B}_t$$

όπου $\hat{B}_t$ είναι μια κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q. Συνεπώς λοιπόν θα πρέπει να παράγουμε N πραγματοποιήσεις της διαδικασίας αυτής (και όχι της αρχικής με ταχύτητα muS) και τότε το άθροισμα του βηματος 3 του παραπάνω σχήματος θα προσεγγίζει την μέση τιμή $E_Q[F^*]$.

Παρατηρώντας την παραπάνω μέθοδο προσομοίωσης προκύπτει μια σειρά από ενδιαφέροντα ερωτήματα. Ένα εύλογο ερώτημα είναι το πως μπορεί κανείς να παράγει διαφορετικές πραγματοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας S_t και κατά συνέπεια να παράγει διαφορετκές πραγματοποιήσεις των τυχαίων μεταβλητών S_T. Ένα δεύτερο ερώτημα είναι πόσο καλή είναι η προσέγγιση την μέση τιμή που μας δίνει το βήμα 3; Ποιός θα είναι ένας καλός αριθμός πραγματοποιήσεων N ετσι ώστε να έχουμε ελπίδες ότι το άθροισμα δίνει κάτι αρκετά κοντά στην μέση τιμή που αναζητούμε; Υπάρχει τρόπος να αλλάξουμε την μέθοδο έτσι ώστε να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε την μέση τιμή με το άθροισμα χρησιμοποιώντας μικρότερες τιμές για το N;

Τα παραπάνω ερωτήματα είναι ενδιαφέροντα και αποτελούν πεδίο σύγχρονης ερευνητικής δραστηριότητας. Θα προσπαθήσουμε στα πλαίσια του μαθήματος αυτού να δώσουμε κάποιες απλές απαντήσεις σε εισαγωγικό επίπεδο.

4.2.1 Υπολογισμός των $(S_T)_i$

Η στοχαστική διαδικασία S_t είναι μία διαδικασία Itô η οποία είναι η λύση της στοχαστικης διαφορικής εξίσωσης

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\hat{B}_t$$

όπου $\hat{B}_t$ είναι μια κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q. Αν r, σ είναι σταθερές, τότε μπορούμε εύκολα να γράψουμε αναλυτικά την λύση της εξίσωσης αυτής. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει εν γένει οπότε θα πρέπει να προσεγγίσουμε τις τροχιές της διαδικασίας αυτής με κάποιο αριθμητικό τρόπο.

Ας γράψουμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση στη γενική μορφή

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dB_t$$

Ας θεωρήσουμε την μεταβολή της τιμής των μετοχών σε ένα χρονικό διάστημα Δt το οποίο θεωρείται μικρό. Λαμβάνοντας υπόψη το ότι ο στοχαστικός όρος θεωρείται σαν ένα ολοκλήρωμα κατά Itô και αν θυμηθούμε τον ορισμό του ολοκληρώματος Itô μπορούμε να γράψουμε (προσεγγιστικά)

$$S(t + \Delta t) = S(t) + \mu(t, S(t))\Delta t + \sigma(t, S(t))(B(t + \Delta t) - B(t))$$

Από τον ορισμό της κίνησης Brown γνωρίζουμε ότι η μεταβολή της κίνησης Brown μεταξύ των χρονικών στιγμών t και Δt, $B(t + \Delta t) - B(t)$ είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι κανονικά κατανεμημένη με μέσο 0 και διασπορά Δt, δηλαδή $B(t + \Delta t) - B(t) \sim \sqrt{\Delta t} Z$ όπου $Z \sim N(0, 1)$.

Την προσεγγιστικη αυτή διαδικασία αυτή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι επαναλαμβάνουμε για όσες φορές χρείαζεται έτσι ώστε να βρούμε το $S(t+n\Delta t)$ για κάποιο n τέτοιο ώστε $t + n\Delta t = T$. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι παίρνουμε μια διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$ η οποία αποτελείται από τα σημεία t_i, τέτοια ώστε $t_0 = 0$ και $t_N = T$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα σημεία της διαμέρισης ισαπέχουν, δηλαδή η απόσταση μεταξύ τους είναι $h := \Delta t = \frac{T}{N}$. Μπορούμε λοιπόν να πάρουμε το επαναληπτικό σχήμα για μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (ή αλλιώς μια στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο) y_j:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \mu(t_j, y_j)\Delta t + \sigma(t_j, y_j)\Delta B_j \\ y_0 &= x_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

όπου $\Delta B_j = B(t_{j+1}) - B(t_j)$. Από τις ιδιότητες της κίνησης Brown γνωρίζουμε ότι $\Delta B_j = \sqrt{\Delta t} Z$ όπου $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Το επαναληπτικό σχήμα (4.1) ονομάζεται το σχήμα του Euler για την στοχαστική διαφορική εξίσωση.

Βλέπουμε αμέσως ότι η χρήση του σχήματος του Euler προυποθέτει την παραγωγή τυχαίων μεταβλητών Z που είναι κανονικά κατανεμημένες. Αναφέρουμε ενδεικτικά δύο μεθόδους παραγωγής κανονικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών.

Α. Αλγόριθμος Box-Miller

- Παράγουμε $u_1 \sim \mathcal{U}[0,1]$, $u_2 \sim |calU[0,1]$.
- Υπολογίζουμε τις μεταβλητές $\theta = 2\pi u_1$ και $r = \sqrt{-2_1}$
- Υπολογίζουμε τις μεταβλητές $z_1 = r\cos\theta$, $z_2 = r\sin\theta$. Ισχύει $z_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, $z_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$

Β. Αλγόριθμος του Marsaglia

- Παράγουμε $u_1 \sim \mathcal{U}[0,1]$, $u_2 \sim |calU[0,1]$.
- Υπολογίζουμε τις μεταβλητές $v_1 = 2u_1 - 1$ και $v_2 = 2u_2 - 1$ τις οποίες κρατάμε αρκεί να ισχύει η συνθήκη $w = v_1^2 + v_2^2 < 1$.
- Υπολογίζουμε τις μεταβλητές $z_1 = v_1\sqrt{-2\ln w/w}$, $z_2 = v_2\sqrt{-2\ln w/w}$. Ισχύει $z_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, $z_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$

Το επόμενο ενδιαφέρον ερώτημα είναι πόσο καλή προσέγγιση είναι για την τυχαία μεταβλητή S_T η τυχαία μεταβλητή $y_T := y_N$ που παίρνουμε από το σχήμα του Euler. Είναι φανερό ότι το πόσο καλή προσέγγιση μπορεί να είναι αυτή θα εξαρτάται από το μέγεθος του βήματος στην διακριτοποίηση του χρόνου δηλαδή από την παράμετρο h. Μπορεί κανείς να δείξει (όχι πολύ απλά) ότι ισχύει

$$e(h) := E[\mid S_T - y_T \mid] = O(h^{1/2})$$

Η ποσότητα $e(h)$ ονομάζεται το απόλυτο σφάλμα της μεθόδου. Η ποσότητα αυτή μας δείχνει την επονομαζόμενη ισχυρή σύγκλιση της μεθόδου. Τονίζεται ότι για την ντετερμινιστική μέθοδο του Euler η προσέγγιση είναι καλύτερη και ισχύει $e(h) = O(h)$. Ο λόγος που η μέθοδος του Euler δεν είναι ιδιαίτερα καλή στην στοχαστική περίπτωση είναι η ύπαρξη του όρου ΔB_j για τον οποίο ως γνωστο ισχύει $E[\Delta B_j^2] = h$.

Βέβαια, δεν μας ενδιαφέρει με πλήρη ακρίβεια η τιμή της τυχαίας μεταβλητής S_T αλλά οι μέσες τιμές κάποιας συνάρτησης, και συγκεκριμένα της απολαβής από το παράγωγο, υπολογισμένες στην μεταβλητή S_T. Είναι ενδιαφέρον να αναφέρουμε, ότι για την περίπτωση αυτή η μέθοδος Euler δίνει πιο καλή προσέγγιση. Συγκεκριμένα, μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$| E[g(S_T)] - E[g(y_N)] |= O(h) \tag{4.2}$$

αν οι συναρτήσεις g είναι πολυωνυμικές. Το είδος αυτό σύγκλισης ονομάζεται ασθενής σύγκλιση.

Το σχήμα του Euler δεν είναι το μοναδικό σχήμα διακριτοποίησης για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Στην βιβλιογραφία έχουν προταθεί και άλλα σχήματα τα οποία μπορεί να παρέχουν πιο καλή προσέγγιση στις λύσεις της εξίσωσης. Σε παράδειγμα αναφέρουμε το σχήμα του Milstein το οποίο δίνεται απο το επαναληπτικό σχήμα

$$y_{j+1} = y_j + \mu(y_j)\delta t + \sigma(y_j)\Delta B_j + \frac{1}{2}\mu^{'}(y_j)\mu(y_j)((\Delta B_j)^2 - \Delta t)$$

4.2.2 Μέθοδοι βελτίωσης της προσέγγισης Monte-Carlo

Θα δούμε τώρα μεθόδους οι οποίες μπορεί να βελτιώσουν την προσέγγιση Monte-Carlo υπό την έννοια ότι μπορεί να παράγουν προσεγγίσεις $\hat{V}$ στην πραγματική τιμή V οι οποίες έχουν μικρή διακύμανση. Θα παρουσιάσουμε δύο τέτοιες μεθόδους.

Α. Η μέθοδος των αντιθετικών μεταβλητών (antithetic variables)
Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην παρατήρηση ότι αν $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ τότε και $-Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Παράγοντας τις Z χρησιμοοπιούμε το σχήμα Euler δύο φορές, μια με την Z και μια με την $-Z$. Χρησιμοποιώντας την Z βρίσκουμε την προσέγγιση y_N της S_T ενώ χρησιμοποιώντας την $-Z$ βρίσκουμε την προσέγγιση y_N^- για την S_T. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να βρούμε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις στην τιμή του παραγώγου, την $\hat{V}$ και την V^-. Σαν την τελική προσέγγιση λαμβάνουμε την

$$V_{AV} = \frac{1}{2}(\hat{V} + V^-).$$

Η V_{AV} πολλές φορές αποτελεί πιο καλή προσέγγιση της τιμής του παραγώγου, υπό την έννοια ότι

$$Var(V_{AV}) < Var(\hat{V}).$$

Αυτό συμβαίνει γιατι είναι πολύ πιθανόν να συμβαίνει $Cov(\hat{V}, V^-) < 0$.

Β. Η μέθοδος των μεταβλητών ελέγχου (control variates)
Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο παράγωγο V^* το οποίο είναι κοντά στο αρχικό παράγωγο V, γνωρίζουμε την ακριβή αναλυτική τιμή. Υπολογίζουμε την προσέγγιση της τιμής του παραγώγου αυτού με την μέθοδο Monte-Carlo και παίρνουμε

την προσέγγιση $\hat{V}^*$. Εφαρμόζουμε τώρα την μέθοδο Monte-Carlo και για το αρχικό παράγωγο το οποίο μας ενδιαφέρει και παίρνουμε την προσέγγιση $\hat{V}$. Σαν προσεγγιστική τιμή για το V θεωρούμε την τιμή

$$V_{CV} = \hat{V} + (V^* - \hat{V}^*).$$

Συχνά η τιμή αυτή είναι πιο καλή προσέγγιση για την τιμή του παραγώγου υπό την έννοια ότι συχνά συμβαίνει

$$Var(V_{CV}) < Var(\hat{V}).$$

Μπορούμε να καταλάβουμε διαισθητικά γιατί περιμένουμε κάτι τέτοιο. Ο όρος $V^* - \hat{V}^*$ μας δίνει κάτι σαν το συστηματικό σφάλμα της προσεγγιστικής μεθόδου, το οποίο όμως για το V^* το γνωρίζουμε με ακρίβεια. Χρησιμοοπιώντας αυτό σαν διόρθωση, μπορούμενα πάρουμε μια καλύτερη προσέγγιση της τιμής του V.

Εν γένει οι μέθοδοι τύπου Monte-Carlo προτιμούνται όταν έχουμε να τιμολογήσουμε παράγωγα προιόντα με περίπλοκες απολαβές ή που βασίζονται σε τιμές βασικών τίτλων οι οποίες ακολουθούν πολύπλοκες στοχαστικές διαδικασίες. Η ακρίβεια τους δεν είναι ποτέ πολύ καλή συνήθως είμαστε ευχαριστημένοι με ακρίβειες της τάξης του 1.

4.3 Μέθοδοι βασισμένες σε επίλυση διαφορικών εξισώσεων

Θα ασχοληθούμε τώρα με μια εναλλακτική κατηγορία μεθόδων αποτίμησης, μέθοδους που βασίζονται στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Θυμίζουμε ότι η τιμή $V(t,s)$ του παραγώγου όταν η τιμή του βασικού τίτλου την χρονική στιγμή t είναι $S_t = s$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + rs\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - rV &= 0 \\ V(T,s) &= F(s) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση Black-Scholes στην οποία καταλήξαμε με μια σειρά από διαφορετικές μεθόδους. Θα δείξουμε μεθόδους για την επίλυση της εξίσωσης αυτής αριθμητικά. Θα ασχοληθούμε εδώ μόνο με μία ειδική κατηγορία αριθμητικών μεθόδων για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, και συγκεκριμένα με μεθόδους πεπερασμένων διαφορών.

Η γενική φιλοσοφία των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών βασίζεται στην προσέγγιση

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x_1,...,x_i+h,...,x_n) - f(x_1,...,x_i,...,x_n)}{h} + \frac{h}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_1,...,\xi_i,...,x_n)$$

όπου $\xi \in (x_i, x_i+h)$. Αυτό δεν είναι τίποτα άλλο από μια έκφραση του αναπτύγματος του Taylor για συναρτήσεις n μεταβλητών. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να προσεγγίσουμε και παραγώγους μεγαλύτερες τάξης. Π.χ. για μια συνάρτηση μιας μεταβλητής[1] μπορούμε να γράφουμε

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Σε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών αυτό που κάνουμε ειναι να ορίσουμε ένα πλέγμα σημείων με το οποίο καλύπτουμε τον χώρο που μας ενδιαφέρει. Για παράδειγμα στην περίπτωση της εξίσωση Black-Scholes η λύση V είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών t, s οι οποίες παίρνουν τιμές στο $[0, T] \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$. Επειδή στην πράξη σε αριθμητικές μεθόδους δεν μπορούμε ποτέ να πάρουμε άπειρα χωρία θα θεωρήσουμε ότι $(t, s) \in [0, T] \times [0, L]$ όπου L είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο βασικός τίτλος. Χωρίζουμε τώρα το διάστημα $[0, T]$ σε μία διαμέριση $\{t_n\}$, της μορφής $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, ..., n_{max}$, τέτοια ώστε $n_{max} = T$, και το διάστημα $[0, L]$ σε μία διαμέριση $\{s_j\}$ της μορφής $s_j = j\Delta s$, $j = 0, 1, ..., j_{max}$, τέτοια ώστε $j_{max} = L$. Οι δύο διαμερίσεις αυτές, παράγουν ένα πλέγμα (n, j) στο οποίο διαμερίζουμε το παραλληλόγραμο $[0, T] \times [0, L]$. Το σημείο (n, j) του πλέγματος αντιστοιχεί στο σημείο $(n\Delta t, j\Delta s)$ του $[0, T] \times [0, L]$. Φυσικά, η διαδικασία αυτή μπορεί να γενικευθεί τόσο για μεγαλύτερες διαστάσεις όσο και για πιο περίπλοκα χωρία.

Αντί να ζητάμε τις τιμές της συναρτησης $V(t, s)$ σε οποιοδηποτε σημείο (t, s) του χωρίου, μας αρκεί να ξέρουμε τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία (n, j) του πλέγματος δηλαδή μας αρκεί να προσεγγίσουμε τις τιμές $V_{nj} := V(n\Delta t, j\Delta s)$. Συνεπώς, θα αντικαταστήσουμε τις παραγώγους στην εξίσωση με τις διαφορές των τιμών της V στα διάφορα σημεία του πλέγματος και θα λάβουμε αλγεβρικές εξισώσεις ως προς τα V_{nj}.

Θα δείξουμε το πως γίνονται οι προσεγγίσεις αυτές σε μία πιο απλή εξίσωση την εξίσωση διάχυσης ή εξίσωση θερμότητας. Η εξίσωση αυτή ειναι της μορφής

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$$

με αρχική συνθήκη $V(0, s) = F(s)$. Η επιλογή της εξίσωσης αυτής δεν είναι τυχαία. Θυμίζουμε πως με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών η εξίσωση Black-Scholes μπορεί να μετασχηματιστεί στην εξίσωση θερμότητας (βλ. κεφ. 2). Φυσικά ότι πούμε εδώ μπορεί να γενικευθεί και για εξισώσεις τυπου Black-Scholes στην αρχική τους μορφή χωρίς καμία σοβαρή δυσκολία, αλλά η απλή μορφή της εξίσωσης θερμότητας μας επιτρέπει να δείξουμε πιο απλά ορισμένα σημεία.

θα δείξουμε 3 διαφορετικές μεθόδους αριθμητικής επίλυσης της εξίσωσης αυτής.

4.3.1 Η ευθεία μέθοδος (explicit method)

Κατά την μέθοδο αυτή προσεγγίζουμε τις παραγώγους ως εξής

$$\frac{\partial V_{nj}}{\partial t} = \frac{V_{n+1,j} - V_{n,j}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

[1] Ο λόγος που χρησιμοποιούμε συναρτήσεις μια μεταβλητής είναι απλά για ευκολία στον συμβολισμό

$$\frac{\partial^2 V_{nj}}{\partial s^2} = \frac{V_{n,j+1} - 2V_{n,j} + V_{n,j-1}}{\Delta s^2} + O(\Delta s^2)$$

Αντικαθιστούμε τις προσεγγίσεις αυτές στην εξίσωση και παίρνουμε

$$V_{n+1,j} - V_{nj} = \lambda(V_{n,j+1} - 2V_{n,j} + V_{n,j-1})$$

όπου $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta s^2}$. Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή

$$V_{n+1,j} = \lambda V_{n,j-1} + (1-2\lambda)V_{nj} + \lambda V_{n,j+1}$$

ή σε μορφή πινάκων

$$V^{(n+1} = AV^{(n)}$$

όπου $V^{(n)} = (V_{n0}, V_{n1}, ..., V_{nj_{max}})$ και

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & ... & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & ... & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & ... & & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix}$$

Το σχήμα αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα επαναληπτικό σχήμα, κατα το οποίο έχοντας το

$$V^{(0)} = (V_{00}, V_{01}, ..., V_{0j_{max}}) = (V(0,0), V(0,\Delta s), ..., V(0,L))$$

(την αρχική συνθήκη) μπορούμε να εφαρμόσουμε επαναληπτικά τον πίνακα A και να πάρουμε την λύση την χρονική στιγμή $n\Delta t$ σε κάθε σημείο $j\Delta s$.

Η μέθοδος αυτή μας δίνει μια προσέγγιση στην τιμη $V(n\Delta t, j\Delta s)$. Πόσο καλή ειναι αυτή η προσέγγιση; Ο τρόπος να το δούμε αυτό είναι μελετώντας την ευστάθεια της μεθόδου, δηλαδή το ακόλουθο πρόβλημα: Ας υποθέσουμε ότι την χρονική περίοδο n η πραγματική από την προσεγγιστική τιμή απέχει $e^{(n)} = (e_{n0}, e_{n1}, ..., e_{nj_{max}})$ όπου $e_{nj} == V_{nj} - V(n\Delta t, j\Delta s)$. Την χρονική στιγμή $n+1$ το σφάλμα $e^{(n+1)}$ θα δίνεται από την σχέση $e^{(n+1)} = Ae^{(n)}$ δηλαδή το σφάλμα την χρονική περίοδο n θα δίνεται από την σχέση

$$e^{(n)} = A^n e^{(0)}$$

όπου $e^{(0)}$ είναι το αρχικό σφάλμα. Μια μέθοδος ονομάζεται ευσταθής αν τα αρχικά σφάλματα μετά από ένα αριθμό επαναλήψεων τείνουν να συρρικνωθούν και να γίνουν μηδενικά για μεγάλο n. Είναι προφανές ότι κάτι τέτοιο είναι επιθυμητό από μια επιτυχημένη αριθμητική μέθοδο. Αντίθετα αν τα αρχικά σφάλματα μετά από ένα αριθμό επαναλήψεων μεγαλώνουν και τείνουν να γίνουν πολύ μεγάλα η μέθοδος λέγεται ασταθής. Μία ασταθής μέθοδος δεν είναι επιθυμητή, καθώς πολύ γρήγορα οδηγεί σε απώλεια ακρίβειας.

Αν η $e^{(n)}$ ήταν μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (και όχι μια ακολουθία διανυσμάτων, το όριο $\lim_{n\to\infty} e^{(n)}$ θα εξαρτάται απο το αν $\mid A \mid < 1$ ή αν $\mid A \mid > 1$. Στην περίπτωση όπου $\mid A \mid < 1$ έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} e^{(n)} = 0$ οπότε η μέθοδος είναι ευσταθής ενώ στην περίπτωση όπου $\mid A \mid > 1$ $\lim_{n\to\infty} e^{(n)} = \infty$ οπότε η μέθοδος είναι ασταθής. Στην προκειμένη περίπτωση $e^{(n)} \in \mathbb{R}^{j_{max}+1}$ δηλαδή έχουμε μια ακολουθία διανυσμάτων και ο A είναι ενας πίνακας. Στην περίπτωση αυτή τον ρόλο του $\mid A \mid$ θα παίζουν οι ιδιοτιμές του πίνακα A δηλαδή οι (μιγαδικοί) αριθμοι ν τέτοιοι ώστε να ισχύει $Ae = \nu e$ για κάποια διανύσματα e. Εν γένει υπάρχουν περισσότερες από μία ιδιοτιμές τις οποίες θα συμβολίζουμε ν_k.

Ορισμός 4.3.1 *Η ποσότητα $\rho(A) = max_k(\nu_k)$ ονομάζεται φασματική ακτίνα του πίνακα A.*

Η φασματική ακτίνα είναι η ποσότητα που καθορίζει το κατα πόσο μια αριθμητική μέθοδος είναι ευσταθής ή όχι. Συγκεκριμένα από την γραμμική άλγεβρα ξέρουμε ότι

Θεώρημα 4.3.1 *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. $\rho(A) < 1$
2. $\lim_{n\to\infty} A^n e = 0$ *για κάθε διάνυσμα e.*
3. $\lim_{n\to\infty} (A^n)_{ij} = 0$

Κατά συνέπεια σύμφωνα με το παραπανω θεώρημα μια αριθμητική μέθοδος είναι ευσταθής αν και μόνο εαν ο πίνακας που σχετίζεται με αυτή έχει φασματική ακτίνα μικρότερη του 1.

Ας ελέγξουμε την ευστάθεια της ευθείας μεθόδου για την εξίσωση θερμότητας.

Μπορεί κανείς εύκολα να ελέγξει το ακόλουθο.

Θεώρημα 4.3.2 *(1) Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\nu_k = 1 - 4\lambda \sin^2\left(\frac{k\pi}{2j_{max}}\right)$, $k = 1, ..., j_{max} - 1$.*
(2) Η ευθεία μέθοδος είναι εύσταθής αρκεί $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ πράγμα που ισοδυναμεί με την συνθήκη $0 \leq \Delta t \leq \frac{\Delta s^2}{2}$.

Απόδειξη: (1) Αρκεί να βρούμε λύσεις του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned} \lambda e_{j-1} + (1-2\lambda)e_j + \lambda e_{j+1} &= \nu e_j, \quad j = 1, ..., j_{max} - 1 \\ (1-2\lambda)e_0 + \lambda e_1 &= \nu e_0, \\ \lambda e_{j_{max}-1} + (1-2\lambda)e_{j_{max}} &= \nu e_{j_{max}} \end{aligned}$$

για κάποιο διάνυσμα $e = (e_0, ..., e_{j_{max}}$ μη μηδενικό και κάποιο (πιθανόν μιγαδικό) αριθμό ν. Το σύστημα αυτό μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή

$$\begin{aligned} \lambda e_{j-1} + (1-2\lambda)e_j + \lambda e_{j+1} = \nu e_j, \quad j = 0, ..., j_{max} \\ e_0 = 0, \quad e_{j_{max}} = 0 \end{aligned}$$

Θα ψάξουμε λύσεις της μορφής $e_j = Cexp(i\gamma j) + cc$ όπου γ θα προσδιοριστεί από τις συνθήκες μηδενισμού στα άκρα του πλέγματος και cc σημαίνει το μιγαδικό συζυγές του πρώτου όρου. Μπορουμε έυκολα να δούμε ότι αρκεί να πάρουμε $\gamma = \frac{\pi}{2j_{max}}$ και κατάλληλη επιλογή του C. Αντικατάσταση στις εξισώσεις ιδιοτιμών και κάποιες πράξεις μας δίνει ότι η εξίσωση αυτή έχει j_{max} το πλήθος λύσεις της μορφής

$$\nu_k = 1 - \lambda\left(2 - 2cos\left(\frac{k\pi}{2j_{max}}\right)\right) = 1 - 4\lambda sin^2\left(\frac{k\pi}{2j_{max}}\right), \quad k = 1, ..., j_{max} - 1$$

(2) Η ευστάθεια προυποθέτει ότι

$$|\ \nu_k\ | = \left|1 - 4\lambda sin^2\left(\frac{k\pi}{2j_{max}}\right)\right| < 1$$

το οποίο προυποθέτει ότι $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$. $\Box$

Συνεπώς η ευθεία μέθοδος αν και πολύ απλή στην εφαρμογή της δεν έχει καλές ιδιότητες ως προς την ευστάθεια. Για να είναι επιτυχής η μέθοδος αυτή χρειάζεται η διακριτοποίηση και η επιλογή του πλέγματος να γίνει προσεκτικά έτσι ώστε να πληρείται η συνθήκη $\Delta t \leq \frac{\Delta s^2}{2}$ πράγμα που πολλές φορές οδηγεί σε σημαντικούς περιορισμούς.

4.3.2 Η ανάστροφη μέθοδος (implicit method)

Κατά την μέθοδο αυτή προσεγγίζουμε τις παραγώγους ως εξής

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{nj}}{\partial t} &= \frac{V_{n+1,j} - V_{n,j}}{\Delta t} + O(\Delta t)\\ \frac{\partial^2 V_{nj}}{\partial s^2} &= \frac{V_{n+1,j+1} - 2V_{n+1,j} + V_{n+1,j-1}}{\Delta s^2} + O(\Delta s^2)\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τις προσεγγίσεις αυτές στην εξίσωση και παίρνουμε

$$V_{n+1,j} - V_{nj} = \lambda(V_{n+1,j+1} - 2V_{n+1,j} + V_{n+1,j-1})$$

όπου $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta s^2}$. Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή

$$V_{n+1,j} = \lambda V_{n,j-1} + (1 - 2\lambda)V_{nj} + \lambda V_{n,j+1}$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\hat{A}V^{(n+1} = V^{(n)}$$

όπου $V^{(n)} = (V_{n0}, V_{n1}, ..., V_{nj_{max}})$ και

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & \lambda & 0 & ... & 0 \\ \lambda & 1+2\lambda & \lambda & ... & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & ... & & \lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι αν γνωρίζουμε το $V^{(0)}$ για να πάρουμε το $V^{(1)}$ θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $\hat{A}V^{(1)} = V^{(0)}$ το οποίο αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας $\hat{A}$ είναι αντιστρέψιμος ισοδυναμεί με το $V^{(1)} = \hat{A}^{-1}V^{(0)}$. Το σχήμα αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα επαναληπτικό σχήμα, κατα το οποίο έχοντας το

$$V^{(0)} = (V_{00}, V_{01}, ..., V_{0j_{max}}) = (V(0,0), V(0,\Delta s), ..., V(0,L))$$

(την αρχική συνθήκη) μπορούμε να εφαρμόσουμε επαναληπτικά τον πίνακα $\hat{A}^{-1}$ και να πάρουμε την λύση την χρονική στιγμή $n\Delta t$ σε κάθε σημείο $j\Delta s$. Το σχήμα αυτό είναι σαφώς πιο πολύπλοκο εφόσον προυποθέτει την αντιστροφή ενός πίνακα (ή ισοδύναμα την λύση ενός συστήματος εξισώσεων) για να βρούμε την λύση την επόμενη χρονική στιγμή έχοντας γνώση της λύσης την προηγούμενη[2]. Γιατί να το προτιμήσουμε; Ο λόγος είναι επειδή το σχήμα αυτό είναι ευσταθές για κάθε $\lambda > 0$ συνεπώς δεν έχουμε κανένα περιορισμό ως προς την επιλογή του πλέγματος για να έχουμε ευστάθεια! Αυτό μπορει να δειχθεί από τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του $\hat{A}$ (άσκηση). Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών του $\hat{A}$ μας εξασφαλίζει επίσης και την αντιστρεψιμότητα του (οι ιδιοτιμές δεν είναι 0).

Η μέθοδος αυτή παρέχει επίσης ακρίβεια τάξης $O(\Delta t, \Delta s^2)$.

4.3.3 Η μέθοδος $Crank - Nicolson$

Αυτό που θα ήταν ιδανικό θα ήταν μια μέθοδος η οποία παρέχει καλύτερη ακρίβεια από τις δύο παραπάνω αλλά ταυτόχρονα να είναι και ευσταθής. Η μεθοδος αυτή ειναι η μέθοδος Crank-Nicolson η οποία αποτελεί μέση τιμή της ευθείας και της ανάστροφης μεθόδου. Η ευθεία μέθοδος την χρονική στιγμή n δίνει

$$V_{n+1,j} - V_{n,j} = \lambda(V_{n,j+1} - 2V_{n,j} + V_{n,j-1})$$

και η ανάστροφη μέθοδος την χρονική στιγμή $n+1$ δίνει

$$V_{n+1,j} - V_{n,j} = \lambda(V_{n+1,j+1} - 2V_{n+1,j} + V_{n+1,j-1})$$

Αθροίζουμε κατά μελη και διαιρουμε

$$V_{n+1,j} - V_{n,j} = \frac{\lambda}{2}(V_{n,j+1} - 2V_{n,j} + V_{n,j-1} + V_{n+1,j+1} - 2V_{n+1,j} + V_{n+1,j-1}) \quad (4.4)$$

Το σχήμα αυτό είναι το σχήμα Crank-Nicolson. Το σχήμα αυτό μπορεί να γραφεί με ισοδύναμη μορφή

$$-\frac{\lambda}{2}V_{n+1,j-1} + (1+\lambda)V_{n+1,j} - \frac{\lambda}{2}V_{n+1,j+1} = \frac{\lambda}{2}V_{n,j-1} + (1-\lambda)V_{n,j} + \frac{\lambda}{2}V_{n,j+1}$$

ή με μορφή πινάκων

$$AV^{(n+1)} = BV^{(n)}$$

[2] Από αυτή ακριβώς την ιδιότητα παίρνει και το όνομα του

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & ... & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & ... & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & ... & & -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

και

$$B = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{\lambda}{2} & 0 & ... & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 1-\lambda & \frac{\lambda}{2} & ... & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & ... & & \frac{\lambda}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Η τιμή του παραγώγου την χρονική στιγμή $n+1$ γνωρίζοντας την τιμή την χρονική στιγμή n μπορεί να βρεθεί λύνοντας ένα σύστημα εξισώσεων ή ισοδύναμα

$$w^{(n+1)} = A^{-1} B w^{(n)}.$$

Η μέθοδος αυτή παρέχει ακρίβεια $O(\Delta t^2 + \Delta s^2)$ και είναι ευσταθής για όλες τις τιμές του $\lambda > 0$ δηλαδή για κάθε επιλογή Δt και Δs.