<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0</u>

<u>Ασκήσεις προθέρμανσης</u>

Επιτόκια και παρούσα αξία.

(οι παρακάτω ασκήσεις είναι από το βιβλίο του Sheldon Ross: An elementary introduction to mathematical finance, 2^{nd} ed.)

1. Ποιο είναι το πραγματικό επιτόκιο όταν το ονομαστικό επιτόκιο 10%
   a. ανατοκίζεται εξαμηνιαία
   b. ανατοκίζεται κάθε τρίμηνο
   c. ανατοκίζεται συνεχώς
2. Εστω ότι καταθέτετε τα χρήματα σας σε μια Τράπεζα η οποία πληρώνει ονομαστικό επιτόκιο 10% το χρόνο. Σε πόσο χρονικό διάστημα θα έχετε διπλασιάσει τα χρήματα σας εάν έχετε συνεχή ανατοκισμό?
3. Βρείτε έναν τύπο που να υπολογίζει τα χρόνια που χρειάζονται ώστε να τριπλασιάσετε το κεφάλαιο σας εάν το επιτόκιο που λαμβάνετε είναι r% ετήσια ανατοκιζόμενο
4. Τι ποσό πρέπει να επενδύετε στην αρχή κάθε μήνα τους επόμενους 60 μήνες ώστε να έχετε 1.000.000 στο τέλος της 5-ετίας, δεδομένου ότι το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο θα είναι σταθερό στο 6% και θα ανατοκίζεται μηνιαία?
5. Οι ετήσιες χρηματοροές μιάς επένδυσης είναι -1.000, -1.200, 800, 900, 800. Εάν κάποιος μπορεί είτε να δανεισθεί είτε να αποταμιεύσει χρήματα με ετήσιο επιτόκιο 6%, αξίζει να κάνει την επένδυση ή όχι?
6. Ένα πενταετές ομόλογο ονομαστικής αξίας 10.000 ευρώ με κουπόνι 10% κοστίζει 10.000 ευρώ και πληρώνει στον κάτοχο του 500 ευρώ κάθε έξι μήνες για πέντε χρόνια, με μια επιπρόσθετη τελική πληρωμή 10.000 ευρώ στο τέλος της πενταετίας. Βρείτε την παρούσα αξία του ομολόγου εάν τα επιτόκια είναι (i) 6%, (ii) 10%, (iii) 12% και υποθέτοντας μηνιαίο ανατοκισμό.
7. Έχετε τη δυνατότητα να εξοφλήσετε ένα δάνειο που είχατε πάρει, είτε πληρώνοντας 16.000 ευρώ σήμερα είτε πληρώνοντας 10.000 ευρώ σήμερα και 10.000 ευρώ μετά από 10 χρόνια. Ποιός τρόπος αποπληρωμής είναι προτιμότερος εάν το ονομαστικό συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο είναι (i) 2%, (ii) 5%, (iii) 10%?
8. Εξηγείστε γιατί είναι λογικό να υποθέσουμε ότι $(1+0,05/n)^n$ είναι αύξουσα συνάρτηση του n για n=1,2,3,…
9. Μια τράπεζα πληρώνει ονομαστικό επιτόκιο 6%, συνεχώς ανατοκιζόμενο. Εάν καταθέσουμε 100 ευρώ, πόσος τόκος θα έχει συσσωρευθεί μετά από (i) 30 ημέρες, (ii) 60 ημέρες, (iii) 120 ημέρες?
10. Ας υποθέσουμε συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο r. Σχεδιάζετε να δανεισθείτε 1.000 ευρώ σήμερα, 2.000 ευρώ ένα χρόνο από σήμερα, 3.000 ευρώ δύο χρόνια από σήμερα και στη συνέχεια να αποπληρώσετε και τα τρία δάνεια σε τρία χρόνια από σήμερα. Τι ποσό θα πρέπει να πληρώσετε?
11. Το ονομαστικό επιτόκιο είναι 5% ετήσια ανατοκιζόμενο. Τι ποσό πρέπει να πληρώσετε σήμερα ώστε να έχετε τις ακόλουθες ετήσιες χρηματοροές: 3, 5, -6, 5 (η χρηματοροή -6 στην παραπάνω σειρά σημαίνει ότι θα πρέπει να πληρώσετε 6 σε τρία χρόνια από σήμερα)

12. Έστω r το ετήσια ανατοκιζόμενο ονομαστικό επιτόκιο. Για ποιες τιμές του r είναι οι ετήσιες χρηματοροές 20, 10 προτιμότερες από τις ετήσιες χρηματοροές 0, 34?
13. Βρείτε το απαραίτητο χρονικό διάστημα ώστε μια κατάθεση 1.000 ευρώ να αυξηθεί σε 1.500 ευρώ εάν το ονομαστικό συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο είναι 6%
14. Υποθέτοντας συνεχή ανατοκισμό με επιτόκιο r να βρεθεί ποια είναι η παρούσα αξία μιας σειράς από χρηματοροές οι οποίες πληρώνουν το ποσό A σε κάθε μια από τις χρονικές στιγμές s, s+t, s+2t, …?
15. Έστω $D(t)$ το ποσό που θα έχετε στον καταθετικό σας λογαριασμό τη χρονική στιγμή t εάν καταθέσετε το ποσό D τη χρονική στιγμή 0 και το επιτόκιο είναι r συνεχώς ανατοκιζόμενο.
    a. Επιχειρηματολογείστε γιατί για μικρό h ισχύει ότι $D(t+h) \approx D(t)+rhD(t)$
    b. Χρησιμοποιείστε το a. για να εξηγήσετε γιατί $D'(t) = rD(t)$
    c. Χρησιμοποιείστε το b. για να συνάγετε ότι $D(t)=De^{rt}$
16. Είναι δυνατό να πούμε ποια από τις παρακάτω σειρές ετήσιων χρηματοροών είναι προτιμότερη εάν δεν γνωρίζουμε το επιτόκιο?
    a. 100, 140, 131
    b. 90, 160, 120
17. Για μια αρχική επένδυση 20 ευρώ θα εισπράξετε μετά από κάποια χρονική περίοδο, είτε το ποσό 10 με πιθανότητα 0,3 είτε το ποσό 40 με πιθανότητα 0,7. Ποια είναι η μέση τιμή (αναμενόμενη τιμή) της απόδοσοης αυτής της επένδυσης?
18. Ένα ομόλογο μηδενικού κουπονιού με ονομαστική αξία F πληρώνει στον κάτοχο του το ποσό F στη λήξη του. Υποθέτοντας συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο 8%, βρείτε την παρούσα αξία ενός ομολόγου μηδενικού κουπονιού με ονομαστική αξία F=1.000 το οποίο λήγει (ωριμάζει) σε 10 χρόνια
19. Βρείτε την απόδοση μιας διετούς επένδυσης η οποία για μια αρχική τοποθέτηση 1.000 ευρώ πληρώνει 500 ευρώ σε ένα χρόνο από σήμερα ενώ σε δύο χρόνια από σήμερα πληρώνει (i) 300 (ii) 500 (iii) 700?
20. Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση αντιστρέφοντας τη σειρά που λαμβάνονται οι πληρωμές
21. Θεωρείστε μια σειρά από χρηματοροές $c_0, c_1, \ldots, c_n$, όπου $c_i<0,\ i<n$ και $c_n>0$.

    Δείξτε ότι εάν $P(r) = \sum_{i=0}^{n} c_i (1+r)^{-i}$, τότε για $r>-1$
    a. Υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης $P(r)=0$
    b. $P(r)$ δεν είναι κατ' ανάγκη μονότονη συνάρτηση του r
22. Έστω ότι μορείτε να δανεισθείτε χρήματα με ετήσιο επιτόκιο 8% αλλά να καταθέσετε (αποταμιεύσετε) χρήματα με ετήσιο επιτόκιο μόνο 5%. Εάν ξεκινήσετε με μηδενικό κεφάλαιο και οι ετήσιες χρηματοροές μιας επένδυσης που κάνετε είναι -1.000, 900, 800, -1.200, 700, θα πρέπει να επενδύσετε ή όχι?

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</u>

<u>Χρηματοοικονομικές Αγορές και Επενδύσεις</u>

Κάποιες στοιχειώδεις βασικές έννοιες

Οι χρηματοοικονομικές αγορές είναι το σύνολο των θεσμικών διακανονισμών που διευκολύνουν τη μεταφορά κεφαλαίων μεταξύ των επενδυτών.

Τα είδη των χρηματοοικονομικών επενδύσεων:

1. Μετοχές (Equities)
    a. Κοινές μετοχές (common stock)
        i. Αντιπροσωπεύουν κεφάλαια που έχουν δοθεί στην εταιρεία και για τα οποία δεν υπάρχει νομική δέσμευση επιστροφής τους
        ii. Αντιπροσωπεύουν δικαιώματα ιδιοκτησίας της εταιρείας
        iii. Οι κάτοχοι των μετοχών λέγονται μέτοχοι και είναι οι ιδοκτήτες της εταιρείας
        iv. Διαπραγματεύονται στην κεφαλαιαγορά
    b. Προνομιούχες μετοχές (preferred stock)
        i. Έχουν απαιτήσεις στα κέρδη της εταιρείας και στα περιουσιακά στοιχεία της εταιρείας με προτεραιότητα έναντι των κατόχων κοινών μετοχών
        ii. Ενίοτε οι κάτοχοι προνομιούχων μετοχών έχουν το δικαίωμα να λαμβάνουν μόνο κάποιο συγκεκριμένο ποσοστό από τα κέρδη
        iii. Διαπραγματεύονται στην κεφαλαιαγορά
    c. Εγγυήσεις (warrants)
        i. Είναι αξιόγραφα που εκδίδονται από την εταιρεία και δίνουν στον κάτοχο τους το δικαίωμα να αποκτήσει μετοχές της εταιρείας (ή και κάποιας άλλης εταιρείας) σε μια προκαθορισμένη τιμή και εντός ενός προκαθορισμένου χρονικού διαστήματος
        ii. Τα δικαιώματα (rights) είναι βραχυπρόθεσμες εγγυήσεις που μοιράζονται στους μετόχους αντί για μέρισμα. Ο στόχος τους είναι να υποχρεωθούν οι μέτοχοι να ασκήσουν τα δικαιώματα τους ώστε η εταιρεία να συγκεντρώσει κεφάλαια.
        iii. Διαπραγματεύονται στην κεφαλαιαγορά
2. Αξιόγραφα σταθερού εισοδήματος (Fixed income securities)
        i. Είναι αξιόγραφα που υπόσχονται στον κάτοχο τους συγκεκριμένες πληρωμές σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές.
    b. Κάποιες προνομιούχες μετοχές
    c. Χρεόγραφα
        i. Ομόλογα
            1. Είναι ένα αξιόγραφο που αποτελεί απόδειξη χρέους του εκδότη του ομολόγου προς τον κάτοχο του ομολόγου
            2. Διαπραγματεύονται στην κεφαλαιαγορά
        ii. Εργαλεία της χρηματαγοράς
            1. Είναι χρεόγραφα με αρχική διάρκεια ωρίμανσης μικρότερη από ένα έτος

2. Διαπραγματεύονται στην κεφαλαιαγορά

3. Παράγωγα (Derivatives)
    i. Ένα παράγωγο έιναι ένα συμβόλαιο που καθορίζει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες, οι αντισυμβαλλόμενοι ανταλλάσσουν περιουσιακά στοιχεία (συμπεριλαμβανομένων και χρημάτων) κατά τη διάρκεια της ζωής του συμβολαίου
    ii. Αν και τα παράγωγα συμβόλαια καθορίζουν τον τρόπο που θα ανταλλαγούν διάφορες ποσότητες, το ύψος κάποιων από αυτές τις ποσότητες δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων.

    b. Δικαιώματα (Options)
        i. Ένα δικαίωμα είναι ένα συμβόλαιο το οποίο δίνει στον κάτοχο του έναντι μιάς αμοιβής το δικαίωμα να πράξει με κάποιο τρόπο εφόσον αυτό είναι προς το συμφέρον του
    c. Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (Futures)
        i. Είναι τυποποιημένα συμβόλαια σύμφωνα με τα οποία ο πωλητής του συμβολαίου αναλαμβάνει την υποχρέωση να παραδώσει στον αγοραστή του συμβολαίου κάποια προκαθορισμένη ποσότητα ενός περιουσικού στοιχείου έναντι προκαθορισμένου χρηματικού ποσού σε προκαθορισμένη μελλοντική στιγμή και ο αγοραστής του συμβολαίου αναλαμβάνει να παραλάβει το περιουσιακό στοιχείο και να πληρώσει στον πωλητή του συμβολαίου το προκαθορισμένο χρηματικό ποσό.
    d. Προθεσμιακά συμβόλαια (Forwards)
    e. Ανταλλαγές (Swaps)
        i. Είναι συμβόλαια σύμφωνα με τα οποία οι δύο αντισυμβαλλόμενοι συμφωνούν να ανταλλάσσουν πληρωμές κάποιου είδους σε περιοδική βάση για κάποιο προκαθορισμένο χρονικό διάστημα.
    f. Εγγυήσεις (Warrants)

4. Χρήμα (Money)
    i. Είναι οτιδήποτε χρησιμοποιείται ως μέσο συναλλαγής
    b. Νομίσματα και χαρτονομίσματα
    c. Καταθέσεις και τραπεζογραμμάτια

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Παράγωγα

2.1 Εισαγωγή

Ένα ***παράγωγο συμβόλαιο*** είναι ένα αξιόγραφο η αξία του οποίου εξαρτάται από τις αξίες άλλων «πιο βασικών» υποκείμενων μεταβλητών.
Τα παράγωγα συμβόλαια είναι επίσης γνωστά και με τον όρο «***ενδεχόμενες (ή υπό όρους) απαιτήσεις***» ή και «***συγκυριακά συμβόλαια***».

Σε κάθε παράγωγο συμβόλαιο υπάρχουν ***δύο αντισυμβαλλόμενοι***, ο «αγοραστής» του συμβολαίου και ο «πωλητής» του συμβολαίου. Αντίστοιχα δημιουργούνται δύο αντίθετες ***θέσεις*** στο συμβόλαιο, η "***long***" θέση και η "***short***" θέση.

Συνήθως οι υποκείμενες μεταβλητές των παραγώγων συμβολαίων είναι οι τιμές εμπορεύσιμων αξιόγραφων, π.χ. ένα δικαίωμα επί μιας μετοχής είναι ένα αξιόγραφο που η αξία του εξαρτάται από την τιμή της υποκείμενης μετοχής.
Όμως τα παράγωγα συμβόλαια μπορούν να έχουν ως υποκείμενη μεταβλητή σχεδόν οτιδήποτε, από την τιμή του χρυσού έως το ύψος του χιονιού σε ένα χιονοδρομικό κέντρο έως την ποσότητα των αιωρουμένων σωματιδίων στο κέντρο της πόλης, έως την τιμή άλλων παραγώγων κλπ.

2.2. Βασικά είδη παραγώγων συμβολαίων

2.2.1 Προθεσμιακά συμβόλαια

Ένα ***προθεσμιακό συμβόλαιο (forward contract)*** είναι ένα συμβόλαιο σύμφωνα με το οποίο οι δύο αντισυμβαλλόμενοι συμφωνούν έτσι ώστε ο αγοραστής υποχρεούται να αγοράσει από τον πωλητή (και ο πωλητής υποχρεούται να πουλήσει στον αγοραστή) ένα περιουσιακό στοιχείο σε μια προσυμφωνημένη μελλοντική στιγμή και σε μια προσυμφωνημένη τιμή.

Λέμε ότι ο αγοραστής του συμβολαίου έχει μια ***long*** *θέση* στο συμβόλαιο ενώ ο πωλητής έχει μια ***short*** *θέση* στο συμβόλαιο.

Η προσυμφωνημένη τιμή στο προθεσμιακό συμβόλαιο για αυτή την μελλοντική αγοραπωλησία ονομάζεται ***τιμή παράδοσης (delivery price)***.

Η προσυμφωνημένη χρονική στιγμή στο προθεσμιακό συμβόλαιο κατά την οποία θα λάβει χώρα αυτή η μελλοντική αγοραπωλησία ονομάζεται ***χρόνος ωρίμανσης (time of maturity)*** του συμβολαίου.

Μια βασική μεταβλητή που επηρεάζει την ***αξία*** του συμβολαίου είναι η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου στο οποίο αναφέρεται το συμβόλαιο. *Κατά τη στιγμή της συμφωνίας η τιμή παράδοσης του προθεσμιακού συμβολαίου επιλέγεται έτσι ώστε το συμβόλαιο να έχει μηδενική αξία τόσο για τον αγοραστή όσο και για τον πωλητή του συμβολαίου. Μετά από τη στιγμή της συμφωνίας η αξία του συμβολαίου αρχίζει και μεταβάλλεται (οπότε γίνεται θετική για τον ένα αντισυμβαλλόμενο και αρνητική για τον άλλο).*

Η ***προθεσμιακή τιμή (forward price)*** ενός προθεσμιακού συμβολαίου ορίζεται ως η τιμή παράδοσης που θα έκανε το συμβόλαιο να έχει μηδενική αξία.

Για παράδειγμα ο Α συφωνεί να πουλήσει στον Β (και ο Β συμφωνεί να αγοράσει από τον Α) 100.000 λίτρα πετρελαίου σε 1 έτος από σήμερα προς 0,68$ το λίτρο. Ας υποθέσουμε ότι η σημερινή τιμή του ενός λίτρου πετρελαίου είναι 0,65$. Η τιμή 0,68$ ανά λίτρο είναι η τιμή παράδοσης του πετρελαίου σε ένα έτος από σήμερα. Δηλαδή σε ένα έτος από σήμερα ο αγοραστής θα πληρώσει 68.000$ στον πωλητή και θα παραλάβει 100.000 λίτρα πετρέλαιο. Εάν σε ένα έτος από σήμερα η τιμή του πετρελαίου έχει ανέβει στο 1$ ανά λίτρο, ο αγοραστής θα είναι κερδισμένος (και ο πωλητής ζημιωμένος) κατά 32.000$. Αντίθετα εάν σε ένα έτος από σήμερα η τιμή του πετρελαίου είναι 0,50$ ανά λίτρο τότε ο αγοραστής θα είναι ζημιωμένος (και ο πωλητής κερδισμένος) κατά 18.000$.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι την επόμενη ημέρα της συμφωνίας η τιμή του πετρελαίου ανέβηκε από τα 0,65$ ανά λίτρο στο 1$ ανά λίτρο. Εάν οι δύο αντισυμβαλλόμενοι είχαν κάνει τη συμφωνία τους την επόμενη μέρα τότε δεν θα είχαν συμφωνήσει σε τιμή παράδοσης 0,68$ αλλά σε μια άλλη τιμή, ας πούμε 1,05$ ανά λίτρο. Τώρα το προθεσμιακό συμβόλαιο της προηγούμενης ημέρας έχει ήδη θετική αξία για τον αγοραστή και αρνητική αξία για τον πωλητή.
Δηλαδή την επόμενη ημέρα η προθεσμιακή τιμή του συμβολαίου είναι 1,05$ ανά λίτρο. Δηλαδή τα προθεσμιακά συμβόλαια που συμφωνούνται αυτή την ημέρα έχουν τιμή παράδοσης 1,05$ ανά λίτρο. Ο Α που αγόρασε το συμβόλαιο την προηγούμενη

ημέρα είναι σαφώς κερδισμένος (αυτή τη συγκεκριμένη ημέρα (για αργότερα δεν ξέρουμε τι θα συμβεί)).

Αξία των forward συμβολαίων τη στιγμή της ωρίμανσης τους (= τη στιγμή της λήξης του συμβολαίου)

Έστω K η τιμή παράδοσης ενός forward και T η ημερομηνία ωρίμανσης του συμβολαίου. Έστω επίσης S_T η τιμή του υποκείμενου στοιχείου τη στιγμή T.

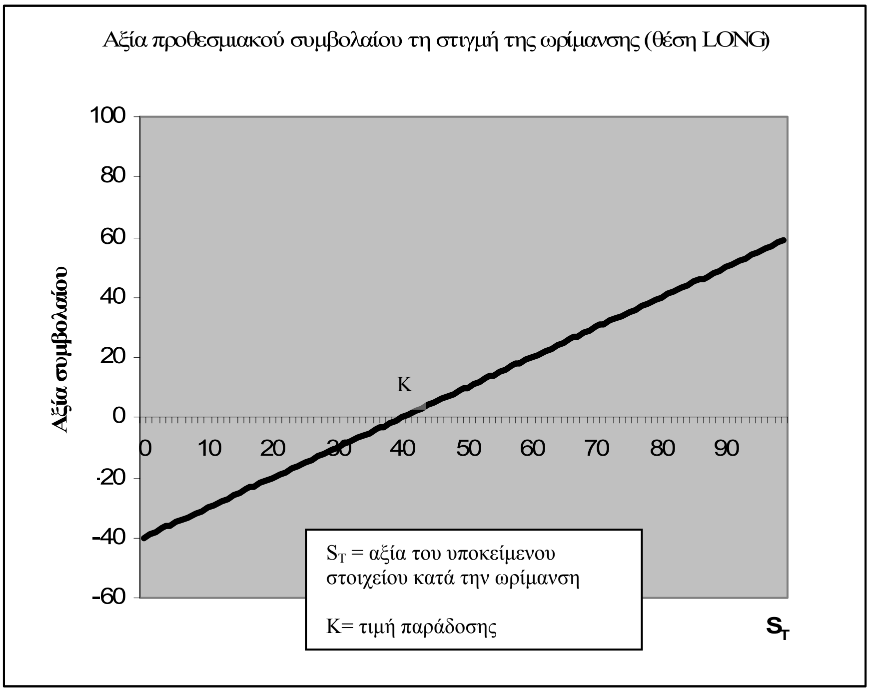
Ας δούμε ποια είναι η αξία κάθε μιας από τις δύο δυνατές θέσεις στο forward κατά τη χρονική στιγμή ωρίμανσης του forward συμβολαίου.

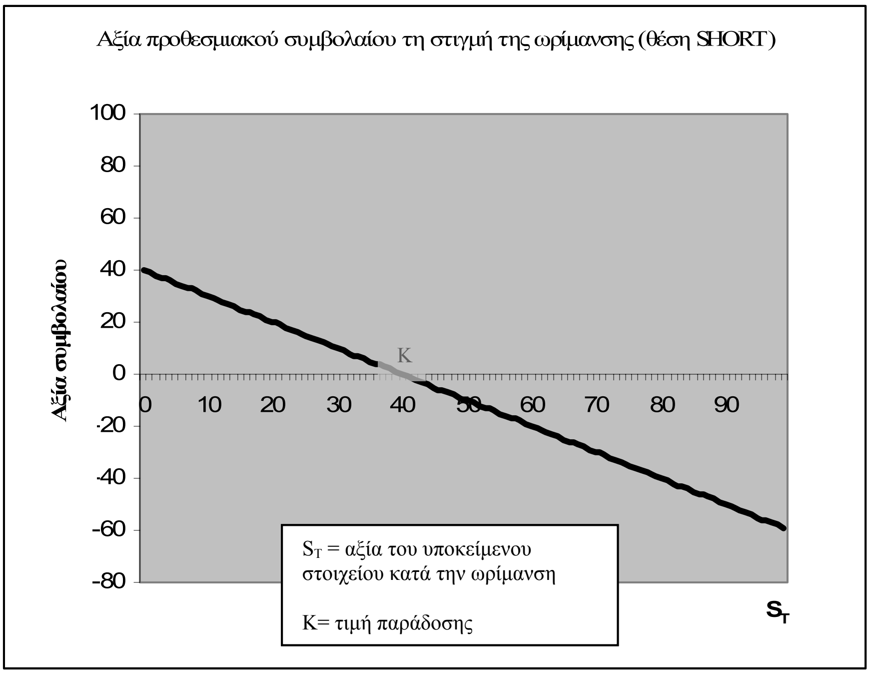
Αξία στη λήξη:

Θέση Long: $S_T - K$

Θέση Short: $K - S_T$

Τα επόμενα διαγράμματα δείχνουν την τελική αξία αυτών των θέσεων ως συνάρτηση της τιμής S_T του υποκείμενου στοιχείου.





Αξία προθεσμιακού συμβολαίου τη στιγμή της ωρίμανσης (θέση SHORT)
Αξία συμβολαίου
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
K
S_T
S_T = αξία του υποκείμενου στοιχείου κατά την ωρίμανση
K= τιμή παράδοσης

2.2.2 Δικαιώματα προαίρεσης (Options)

Τα δικαιώματα προαίρεσης επί μετοχών διαπραγματεύθηκαν για πρώτη φορά σε οργανωμένα χρηματιστήρια το 1973. Τα υποκείμενα στοιχεία μπορεί να είναι μετοχές, χρηματιστηριακοί δείκτες, συνάλλαγμα, εργαλεία χρέους, πρώτες ύλες, άλλα παράγωγα κλπ.

Δύο βασικά είδη:

Δικαίωμα προαίρεσης αγοράς (call option)

Ένα *call option (Ευρωπαϊκού τύπου)* επί ενός υποκείμενου στοιχείου Α, με τιμή εξάσκησης Κ και ημερομηνία λήξης Τ, παρέχει στον κάτοχο του το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο στοιχείο Α στην τιμή Κ *τη* χρονική στιγμή Τ.

Ένα *call option (Αμερικάνικου τύπου)* επί ενός υποκείμενου στοιχείου Α, με τιμή εξάσκησης Κ και ημερομηνία λήξης Τ, παρέχει στον κάτοχο του το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο στοιχείο Α στην τιμή Κ *μέχρι* τη χρονική στιγμή Τ.

Δικαίωμα προαίρεσης πώλησης (put option)

Ένα *put option (Ευρωπαϊκού τύπου)* επί ενός υποκείμενου στοιχείου Α, με τιμή εξάσκησης Κ και ημερομηνία λήξης Τ, παρέχει στον κάτοχο του το δικαίωμα να πουλήσει το υποκείμενο στοιχείο Α στην τιμή Κ *τη* χρονική στιγμή Τ.

Ένα *put option (Αμερικάνικου τύπου)* επί ενός υποκείμενου στοιχείου Α, με τιμή εξάσκησης Κ και ημερομηνία λήξης Τ, παρέχει στον κάτοχο του το δικαίωμα να πουλήσει το υποκείμενο στοιχείο Α στην τιμή Κ *μέχρι* τη χρονική στιγμή Τ.

Ένα option έχει *δύο αντισυμβαλλόμενους*, τον αγοραστή και τον πωλητή.
Ο αγοραστής του δικαιώματος πληρώνει ένα ποσό (*premium, ασφάλιστρο*) στον πωλητή του δικαιώματος και αποκτά τη δυνατότητα να εξασκήσει το δικαίωμα (χωρίς όμως να είναι υποχρεωμένος) κατά το χρόνο εξάσκησης.
Ο αγοραστής του δικαιώματος λέμε ότι έχει μια θέση *long* στο δικαίωμα.

Ο πωλητής του δικαιώματος εισπράττει το premium προκαταβολικά και αναλαμβάνει την υποχρέωση να ικανοποιήσει τον αγοραστή σύμφωνα με τους όρους του δικαιώματος όταν και εφόσον ο αγοραστής αποφασίσει να εξασκήσει το δικαίωμα.
Ο πωλητής του δικαιώματος λέμε ότι έχει μια θέση *short* στο δικαίωμα.

Άρα παρατηρούμε *τέσσερις δυνατές θέσεις* στα βασικά είδη δικαιωμάτων:

1. long call
2. short call
3. long put
4. short put

Από εδώ και στο εξής όταν λέμε option (ή δικαίωμα) θα εννοείται ότι αναφερόμαστε σε option Ευρωπαϊκού τύπου, εκτός εάν ρητά αναφέρεται το αντίθετο.

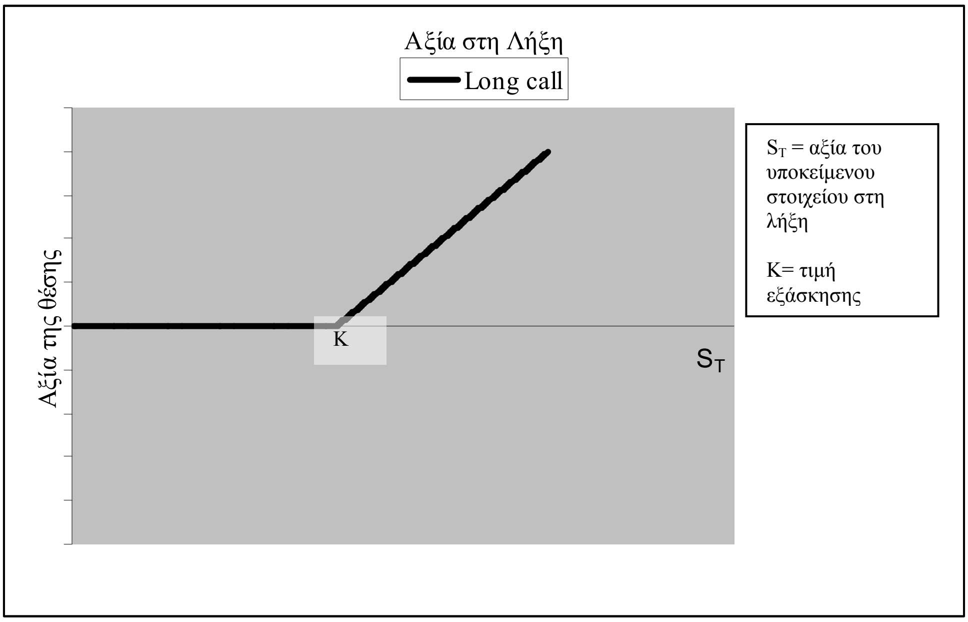
Αξία των δικαιωμάτων στη λήξη

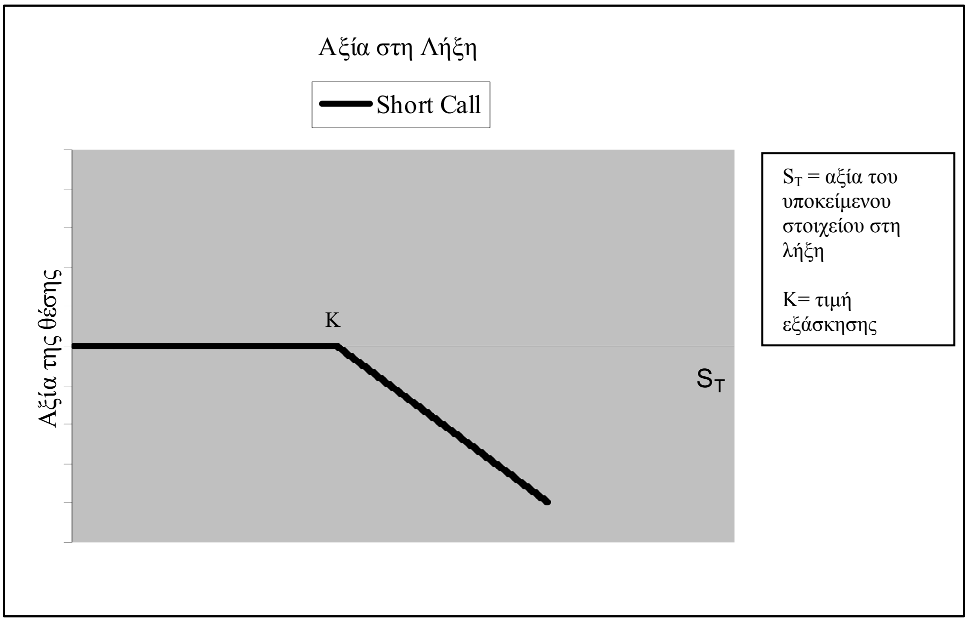
Έστω Κ η τιμή εξάσκησης ενός option και Τ η ημερομηνία λήξης. Έστω επίσης S_T η τιμή του υποκείμενου στοιχείου τη στιγμή Τ.

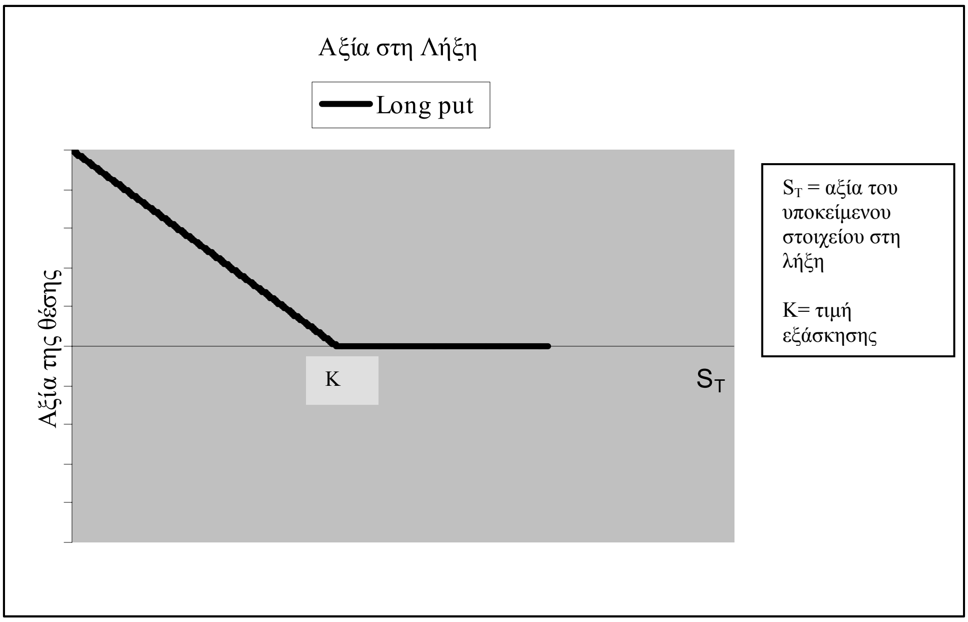
Ας δούμε ποια είναι η αξία κάθε μιας από τις τέσσερις δυνατές θέσεις σε δικαιώματα κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.

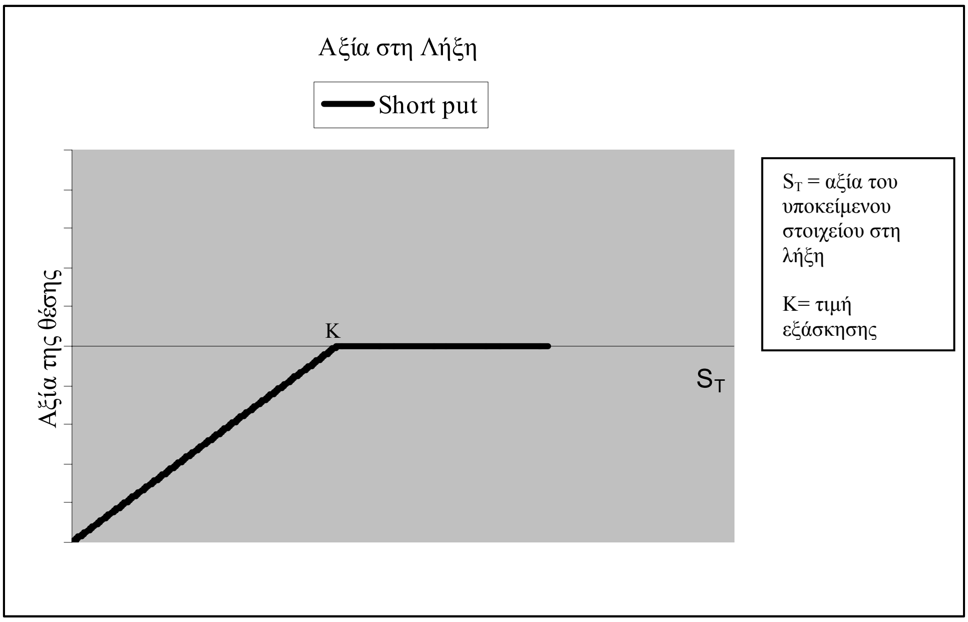
Long call: max (S_T – K, 0)
Short call: - max (S_T – K, 0) = min (K - S_T, 0)
Long put: max (K - S_T, 0)
Short put: - max (K - S_T, 0) = min (S_T – K, 0)

Τα επόμενα διαγράμματα δείχνουν την τελική αξία αυτών των θέσεων ως συνάρτηση της τιμής S_T του υποκείμενου στοιχείου.









Κέρδος (ζημία) των δικαιωμάτων στη λήξη

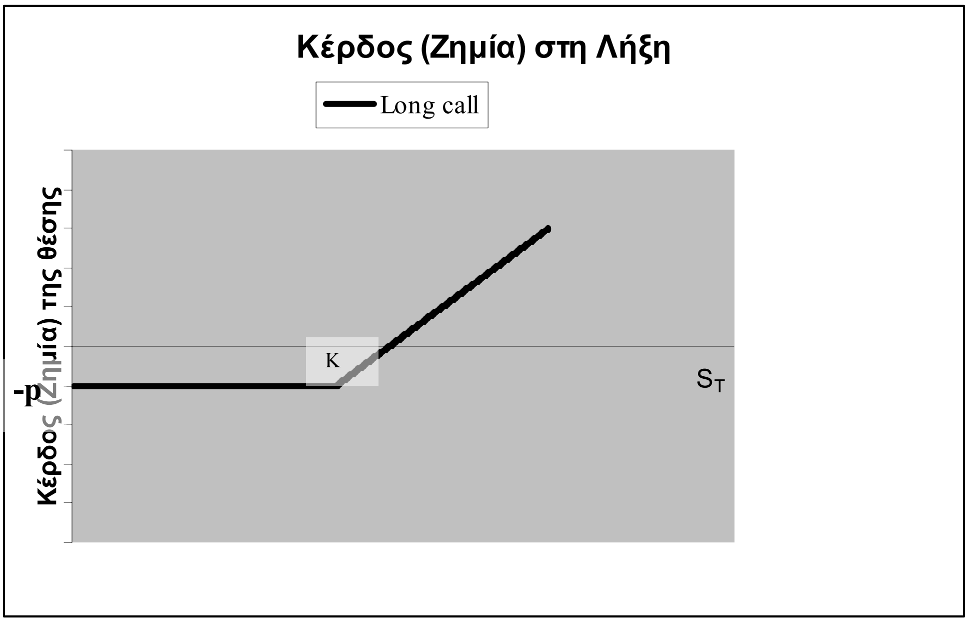
Ένας επενδυτής που αγοράζει ένα δικαίωμα πληρώνει ένα ***premium*** στον πωλητή του δικαιώματος (έστω p). Τότε το κέρδος ή η ζημία στη λήξη του δικαιώματος ανάλογα με τη θέση που έχει ο αντισυμβαλλόμενος δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις και απεικονίζεται στα διαγράμματα που ακολουθούν.

Long call: $\max(S_T - K, 0) - p$

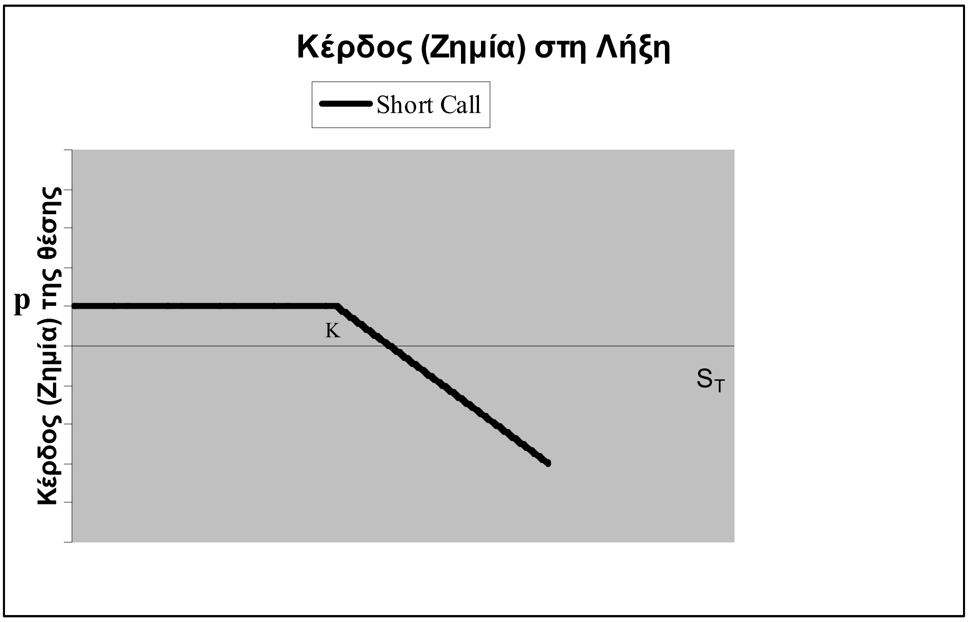
Short call: $p - \max(S_T - K, 0) = p + \min(K - S_T, 0)$

Long put: $\max(K - S_T, 0) - p$

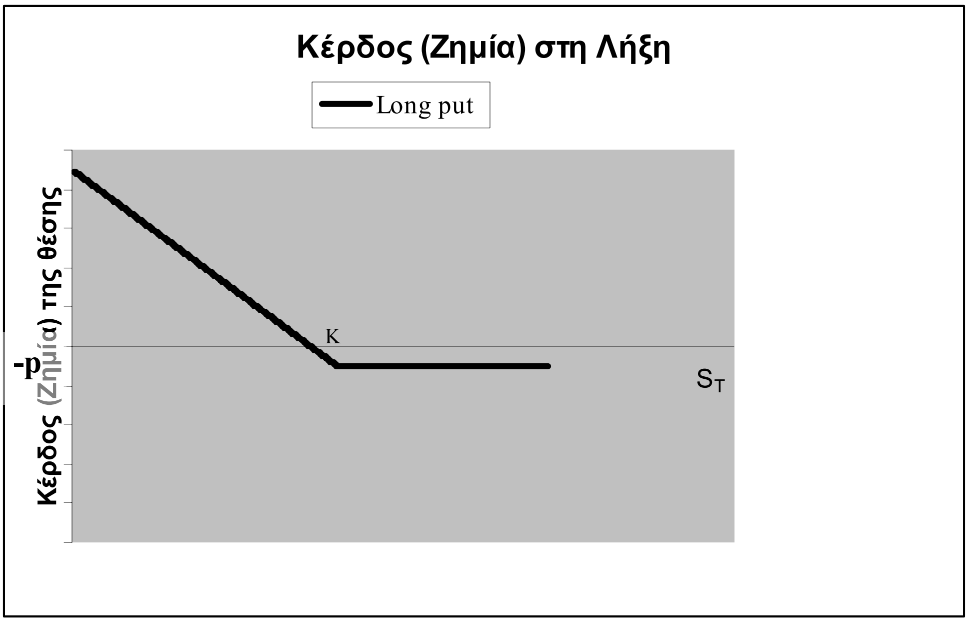
Short put: $p - \max(K - S_T, 0) = p + \min(S_T - K, 0)$

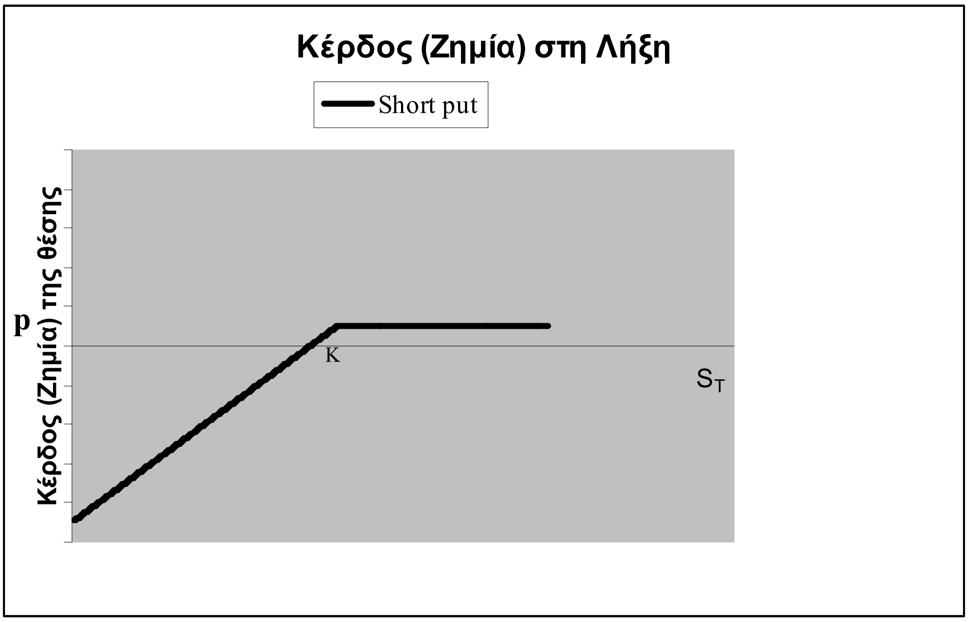


Κέρδος (Ζημία) στη Λήξη
Long call
Κέρδος (Ζημία) της θέσης
-p
K
S_T



Κέρδος (Ζημία) στη Λήξη
Short Call
Κέρδος (Ζημία) της θέσης
p
K
S_T


Κέρδος (Ζημία) στη Λήξη
Long put
Κέρδος (Ζημία) της θέσης
-p
K
S_T


Κέρδος (Ζημία) στη Λήξη
Short put
Κέρδος (Ζημία) της θέσης
p
K
S_T

2.3. Ερωτήσεις

1) Σε τι διαφέρουν μια long θέση σε ένα forward συμβόλαιο με forward τιμή 100 και σε μια long θέση σε ένα call option με τιμή εξάσκησης 100?

2) Η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι $29 και ένα call option επί αυτής της μετοχής με λήξη σε τρείς μήνες και τιμή εξάσκησης $30 κοστίζει $2,90. Έχετε $5.800 στη διάθεση σας και πιστεύετε ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει μέσα στο επόμενο τρίμηνο. Προτείνετε δύο εναλλακτικές στρατηγικές κερδοσκοπίας, η μια να αφορά τοποθέτηση στη μετοχή και η άλλη να αφορά τοποθέτηση στο option. Ποιες είναι οι δυνητικές ζημίες και ποιά τα δυνητικά κέρδη κάθε μιάς από αυτές τις στρατηγικές?

3) Περιγράψτε την αξία στη λήξη του επόμενου χαρτοφυλακίου: μία long θέση σε ένα forward συμβόλαιο επί ενός υποκείμενου στοιχείου και μία long θέση σε ένα put option (Ευρωπαϊκού τύπου) επί του ίδιου υποκείμενου στοιχείου, με την ίδια ημερομηνία ωρίμανσης με το forward και με τιμή εξάσκησης ίση με την forward τιμή τη στιγμή δημιουργίας του χαρτοφυλακίου.

4) «Μια long θέση σε ένα forward είναι ισοδύναμη με ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από μια long θέση σε ένα call option Ευρωπαϊκού τύπου και μια short θέση σε ένα put option Ευρωπαϊκού τύπου». Εξηγείστε αναλυτικά αυτή την πρόταση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ο νόμος της μιας τιμής, η έννοια του arbitrage, βασικές ιδιότητες παραγώγων

3.1. Ο νόμος της μιας τιμής

3.1.1. Πρόταση *(Ο νόμος της μιας τιμής)*
Θεωρείστε δύο επενδύσεις που σήμερα κοστίζουν C_1 και C_2 αντίστοιχα. Εάν η (παρούσα) αξία των μελλοντικών χρηματοροών της πρώτης επένδυσης ισούται *πάντα* με την (παρούσα) αξία των μελλοντικών χρηματοροών της δεύτερης επένδυσης τότε προκειμένου να μην υπάρχει ευκαιρία για arbitrage θα πρέπει να ισχύει $C_1=C_2$.
(Ειδικά στην περίπτωση που κάποια επένδυση έχει βέβαιες μελλοντικές χρηματοροές, τότε, για να μην υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage, θα πρέπει το σημερινό της κόστος να ισούται με την παρούσα αξία αυτών των μελλοντικών χρηματοροών)

Στις επόμενες προτάσεις που αφορούν προθεσμιακά συμβόλαια (forwards) θεωρούμε τον παρακάτω συμβολισμό:

T: *χρονική στιγμή ωρίμανσης (λήξης) του Forward συμβολαίου (σε έτη)*
t: *τρέχουσα χρονική στιγμή (σε έτη)*
S: *τιμή του υποκείμενου στοιχείου τη στιγμή t*
S_T: *τιμή του υποκείμενου στοιχείου τη στιγμή T (άγνωστη κατά τη στιγμή t)*
K: *τιμή παράδοσης του Forward συμβολαίου*
f: *αξία μιας long θέσης σε Forward συμβόλαιο κατά τη στιγμή t*
F: *η Forward τιμή κατά τη χρονική στιγμή t*
r: *ετήσιο επιτόκιο συνεχώς ανατοκιζόμενο, όπως ισχύει τη στιγμή t για μια επένδυση που ωριμάζει τη στιγμή T.*

3.1.2. Εφαρμογή *(η αξία της long θέσης σε ένα forward συμβόλαιο)*
$f=(F-K)e^{-r(T-t)}$
Απόδειξη
Ας θεωρήσουμε ένα forward συμβόλαιο με τιμή παράδοσης *F* (πανομοιότυπο κατά τα άλλα με το συμβόλαιο με τιμή παράδοσης *K)*. Η αξία αυτού του συμβολαίου τη χρονική στιγμή *t* είναι εξ ορισμού μηδενική, ενώ τη χρονική στιγμή *T* η αξία μιας short θέσης σε αυτό το συμβόλαιο θα είναι $F-S_T$.
Η αξία μιας long θέσης στο forward συμβόλαιο με τιμή παράδοσης *K* τη χρονική στιγμή *t* είναι *f*, ενώ τη χρονική στιγμή *T* η αξία μιας long θέσης σε αυτό το συμβόλαιο θα είναι S_T-K.
Αν θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από μια long θέση στο forward με τιμή παράδοσης *K* και από μια short θέση στο forward με τιμή παράδοσης *F*, τότε η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου τη στιγμή *T* είναι προφανώς *F-K*, ενώ τη χρονική στιγμή *t* η αξία του ίδιου χαρτοφυλακίου είναι προφανώς *f-0=f*. Για να μην υπάρχει ευκαιρία για arbitrage θα πρέπει, βάσει του νόμου της μιας τιμής, η σημερινή αξία αυτού του χαρτοφυλακίου να ισούται με την παρούσα αξία της μελλοντικής του χρηματοροής, δηλαδή να ισχύει ότι $f=(F-K)e^{-r(T-t)}$

3.1.3. Εφαρμογή *(Forward τιμή ενός Forward συμβολαίου επί αξιόγραφου που δεν παρέχει έσοδο)*

Για να μην υπάρχει δυνατότητα arbitrage πρέπει να ισχύει η σχέση
$F = Se^{r(T-t)}$

<u>Απόδειξη 1</u>
Ας θεωρήσουμε τα εξής δύο χαρτοφυλάκια

Χαρτοφυλάκιο Α: αποτελείται από μια long θέση στο forward συμβόλαιο και από ένα χρηματικό ποσό ύψους $Ke^{r(T-t)}$ (το οποίο επενδύεται με επιτόκιο *r* για διάστημα *T-t)*

Χαρτοφυλάκιο Β: αποτελείται από μια μονάδα του αξιογράφου.

Τη χρονική στιγμή *T,* το χρηματικό ποσό του χαρτοφυλακίου Α θα αξίζει ακριβώς *K* και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αγορά μιας μονάδας του αξιογράφου βάσει των όρων του forward. Δηλαδή και τα δύο χαρτοφυλάκια θα αποτελούνται από μια μονάδα του αξιογράφου τη χρονική στιγμή *T,* άρα θα έχουν την ίδια αξία αυτή τη χρονική στιγμή.
Τότε όμως, βάσει του νόμου της μιάς τιμής αυτά τα δύο χαρτοφυλάκια θα πρέπει να έχουν την ίδια αξία και τη χρονική στιγμή *t* προκειμένου να μην υπάρχει η δυνατότητα διεξαγωγής arbitrage.
Άρα, $f + Ke^{-r(T-t)} = S$ ή ισοδύναμα $f = S - Ke^{-r(T-t)}$

(Σημείωση: Όταν ξεκινά ένα forward συμβόλαιο, η forward τιμή επιλέγεται να είναι εκείνη η τιμή παράδοσης η οποία να καθιστά την αξία του συμβολαίου *f* ίση με το μηδέν. Άρα σύμφωνα με την τελευταία εξίσωση $F = Se^{r(T-t)}$)

<u>Απόδειξη 2</u>
Έστω $F > Se^{r(T-t)}$.
Τότε, τη χρονική στιγμή *t* ένας επενδυτής δανείζεται το ποσό *S* για χρονικό διάστημα *T-t*, αγοράζει το αξιόγραφο στην τιμή *S* και πουλάει το forward συμβόλαιο (δηλ. λαμβάνει μια short θέση στο forward).
Τη χρονική στιγμή *T,* πουλάει το αξιόγραφο βάσει των όρων του forward συμβολαίου στην τιμή *F* και από αυτά χρησιμοποιεί $Se^{r(T-t)}$ για να αποπληρώσει το δανεισμό του.
'Ετσι, τη χρονική στιγμή *T,* πραγματοποιεί ένα ακίνδυνο κέρδος $F - Se^{r(T-t)}$>0. Δηλαδή, έχει κάνει arbitrage.

Αντίθετα, έστω $F < Se^{r(T-t)}$.
Τότε, τη χρονική στιγμή *t* ένας επενδυτής πουλάει short το υποκείμενο αξιόγραφο (δηλ. το δανείζεται και το πουλάει) ειπράττοντας το ποσό *S* το οποίο επενδύει με επιτόκιο *r* για διάστημα *T-t*. Ταυτόχρονα αγοράζει το forward συμβόλαιο (δηλ. λαμβάνει μια long θέση στο forward).
Τη χρονική στιγμή *T,* εισπράττει $Se^{r(T-t)}$ από την επένδυση του, αγοράζει το αξιόγραφο βάσει των όρων του forward στην τιμή *F* και κλείνει τη short θέση στο αξιόγραφο (επιστρέφοντας το σε αυτόν από τον οποίο το είχε δανεισθεί).
Έτσι τη χρονική στιγμή *T,* πραγματοποιεί ένα ακίνδυνο κέρδος $Se^{r(T-t)} - F$>0. Δηλαδή, έχει κάνει arbitrage.

Άρα, η μοναδική τιμή που δεν επιτρέπει arbitrage είναι $F = Se^{r(T-t)}$

3.1.4. Εφαρμογή *(Forward συναλλαγματική ισοτιμία - Θεώρημα ισοδυναμίας επιτοκίων – Arbitrage καλυμμένου επιτοκίου)*

Ας θεωρήσουμε δύο νομίσματα, το εγχώριο νόμισμα d και το ξένο νόμισμα f. Ας θεωρήσουμε επίσης τους εξής συμβολισμούς:

$r(d)$ = επιτόκιο στο εγχώριο νόμισμα για χρόνο T.

$r(f)$ = επιτόκιο στο ξένο νόμισμα για χρόνο T.

S = spot ισοτιμία (δηλ. πόσες μονάδες του εγχώριου νομίσματος αξίζει σήμερα μια μονάδα του ξένου νομίσματος)

F = προθεσμιακή ισοτιμία για παράδοση τη στιγμή T (δηλ. πόσες μονάδες του εγχώριου νομίσματος συμφωνούμε (σήμερα), να ανταλλάξουμε τη χρονική στιγμή T με μια μονάδα του ξένου νομίσματος)

Για να μην υπάρχει ευκαιρία arbitrage θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$F=Se^{[r(d)-r(f)]T}$$

<u>Απόδειξη</u>

Ας θεωρήσουμε την εξής στρατηγική:

1. Δανειζόμαστε από μία ξένη Τράπεζα μια μονάδα του ξένου νομίσματος για χρόνο T. Τη στιγμή T, θα πρέπει να πληρώσουμε στην ξένη Τράπεζα $e^{r(f)T}$ μονάδες του ξένου νομίσματος.
2. Ανταλλάσσουμε τη μονάδα του ξένου νομίσματος που δανεισθήκαμε, με εγχώριο νόμισμα. Επομένως εισπράττουμε S μονάδες εγχώριου νομίσματος.
3. Καταθέτουμε σε μια εγχώρια Τράπεζα τις S μονάδες του εγχώριου νομίσματος, για χρόνο T. Τη στιγμή T θα λάβουμε από την εγχώρια Τράπεζα $Se^{r(d)T}$ μονάδες του εγχώριου νομίσματος.
4. Αγοράζουμε ένα forward συμβόλαιο σύμφωνα με το οποίο θα αγοράσουμε τη χρονική στιγμή T ξένο νόμισμα (πουλώντας εγχώριο νόμισμα) σε μια προσυμφωνημένη ισοτιμία F.

Τη στιγμή T, εισπράττουμε από την εγχώρια Τράπεζα τις $Se^{r(d)T}$ μονάδες του εγχώριου νομίσματος και τις ανταλλάσσουμε με ξένο νόμισμα, χρησιμοποιώντας την προσυμφωνημένη ισοτιμία F του προθεσμιακού συμβολαίου. Επομένως, λαμβάνουμε $Se^{r(d)T}/ F$ μονάδες του ξένου νομίσματος.

Αυτή η στρατηγική δεν θα είναι κερδοφόρα τη στιγμή T, εάν και μόνο εάν, οι μονάδες του ξένου νομίσματος που λάβουμε είναι ακριβώς όσες πρέπει να πληρώσουμε στην ξένη Τράπεζα από την οποία δανεισθήκαμε στην αρχή. Άρα προκειμένου να μη δημιουργηθεί ευκαιρία για arbitrage θα πρέπει να ισχύει η σχέση:
$Se^{r(d)T}/ F = e^{r(f)T}$

Λύνοντας ως προς F, λαμβάνουμε τον εξής τύπο που εκφράζει το θεώρημα ισοδυναμίας επιτοκίων: $F=Se^{[r(d)-r(f)]T}$

Εάν η προθεσμιακή ισοτιμία F δεν είναι σύμφωνη με την προηγούμενη σχέση, τότε υπάρχει δυνατότητα arbitrage.

3.1.5. Εφαρμογή *(Forward συμβόλαια επί αξιογράφων που παρέχουν ως εισόδημα, κάποια συγκεκριμένα χρηματικά ποσά)*

Έστω I η παρούσα αξία (βάσει του επιτοκίου r) των ποσών που θα παρέχει το αξιόγραφο κατά τη διάρκεια της ζωής του forward. Για να μην υπάρχει δυνατότητα διεξαγωγής arbitrage θα πρέπει να ισχύει

$F = (S - I)e^{r(T-t)}$

<u>Απόδειξη:</u> *(άσκηση)*

3.1.6. Πρόταση *(ισοδυναμία call και put)*

Έστω C η τιμή ενός call option (επί ενός υποκείμενου στοιχείου) με τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία λήξης T.

Έστω P η τιμή ενός put option Ευρωπαϊκού τύπου (επί του ίδιου υποκείμενου στοιχείου) με την ίδια τιμή εξάσκησης K και την ίδια ημερομηνία λήξης T.

Έστω S η τιμή του υποκείμενου στοιχείου τη χρονική στιγμή 0.

Έστω ότι έχουμε σταθερό επιτόκιο r συνεχώς ανατοκιζόμενο.

Τότε προκειμένου να μην υπάρχει ευκαιρία για arbitrage θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$S + P = C + K\, e^{-rT}$

<u>Απόδειξη 1</u>

Ας θεωρήσουμε τα εξής δύο χαρτοφυλάκια τη χρονική στιγμή 0

A: αποτελείται από μια μετοχή και από ένα put option.

B: αποτελείται από ένα call option και από μια κατάθεση στην Τράπεζα ποσού Ke^{-rT}

Άρα η αξία αυτών των χαρτοφυλακίων τη χρονική στιγμή 0 είναι αντίστοιχα:

$A_0 = S+P$

$B_0 = C+ K\, e^{-rT}$

Ας δούμε τώρα την αξία αυτών των χαρτοφυλακίων τη χρονική στιγμή T

$$A_T = S_T + \max(K - S_T\, ,\, 0) = \left\{ \begin{array}{l} K, \text{ εάν } S_T < K \\ \\ S_T, \text{ εάν } K \leq S_T \end{array} \right\} = \max(S_T - K\, ,\, 0) + K = B_T$$

Επομένως τα χαρτοφυλάκια A και B έχουν πάντα την ίδια αξία τη χρονική στιγμή T και επομένως, σύμφωνα με το νόμο της μιας τιμής, για να μην υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage θα πρέπει να έχουν και την ίδια αρχική αξία, δηλαδή $S+P = C+ K\, e^{-rT}$

<u>Απόδειξη 2</u>

Έστω ότι $S + P < C+ K\, e^{-rT}$

Τότε τη χρονική στιγμή 0, πουλάω ένα call option στην τιμή C και δανείζομαι το ποσό $K\, e^{-rT}$ με επιτόκιο r για χρονικό διάστημα T. Με αυτά τα χρήματα αγοράζω μια μετοχή προς S και ένα put option επί αυτής της μετοχής προς P. Μου περισσεύει ένα θετικό ποσό $(C+ K\, e^{-rT}) - (S + P)$ (που το κάνω ότι μου αρέσει!).

Ας δούμε τώρα τι μπορεί να μου συμβεί τη χρονική στιγμή T και εάν διατρέχω κάποιο κίνδυνο οικονομικής ζημίας.

Τη χρονική στιγμή T λοιπόν, χρωστάω το ποσό K (από το δάνειο που είχα πάρει). Παρατηρώ την τιμή της μετοχής S_T και διακρίνω δύο περιπτώσεις: είτε $S_T \geq K$ είτε $S_T < K$.

Στην πρώτη περίπτωση το call option έχει αξία και εξασκείται οπότε πουλάω τη μετοχή που έχω στον κάτοχο του call option προς K. Με το ποσό K που εισπράττω ξεπληρώνω το χρέος του δανεισμού μου και δεν έχω καμία άλλη υποχρέωση.

Στη δεύτερη περίπτωση το call option δεν έχει αξία και άρα δεν εξασκείται. Τώρα όμως το put option έχει αξία και το εξασκώ πουλώντας τη μετοχή μου στην τιμή K. Με το ποσό K που εισπράττω ξεπληρώνω το χρέος του δανεισμού μου και δεν έχω καμία άλλη υποχρέωση.

Έστω τώρα ότι $S + P > C + K e^{-rT}$

Τότε τη χρονική στιγμή 0 πουλάω short μια μετοχή στην τρέχουσα τιμή S (δηλ. δανείζομαι τη μετοχή και την πουλάω με την υπόσχεση να την επιστρέψω τη χρονική στιγμή T) και επίσης πουλάω ένα put option στην τρέχουσα τιμή P. Με τα χρήματα που εισπράττω αγοράζω ένα call option στην τρέχουσα τιμή C και τοποθετώ στην τράπεζα το ποσό $K e^{-rT}$ για χρονικό διάστημα T. Μου περισσεύει ένα θετικό ποσό $(S+P)-(C+K e^{-rT})$(που το κάνω ότι μου αρέσει!).

Ας δούμε τώρα τι μπορεί να μου συμβεί τη χρονική στιγμή T και εάν διατρέχω κάποιο κίνδυνο οικονομικής ζημίας.

Τη χρονική στιγμή T λοιπόν εισπράττω από την Τράπεζα το ποσό K (από την κατάθεση που είχα κάνει). Παρατηρώ την τιμή της μετοχής S_T και διακρίνω δύο περιπτώσεις: είτε $S_T \geq K$ είτε $S_T < K$.

Στην πρώτη περίπτωση το call option έχει αξία και το εξασκώ αγοράζοντας τη μετοχή προς K (χρησιμοποιώντας τα χρήματα που εισέπραξα από την κατάθεση μου στην Τράπεζα) και την επιστρέφω σε αυτόν που μου τη δάνεισε (κλείνοντας έτσι τη short θέση που είχα στη μετοχή). Το put option δεν έχει αξία και δεν εξασκείται, οπότε δεν έχω καμία άλλη υποχρέωση.

Στη δεύτερη περίπτωση, το put option έχει αξία και εξασκείται οπότε αγοράζω τη μετοχή από τον κάτοχο του put option στην τιμή K (χρησιμοποιώντας τα χρήματα που εισέπραξα από την κατάθεση μου στην Τράπεζα) και την επιστρέφω σε αυτόν που μου τη δάνεισε (κλείνοντας έτσι τη short θέση που είχα στη μετοχή) και δεν έχω καμία άλλη υποχρέωση.

Άρα για να μη δημιουργηθεί ευκαιρία ακίνδυνου κέρδους (arbitrage) θα πρέπει να ισχύει η σχέση $S + P = C + K e^{-rT}$

3.1.7 Πρόταση ***(γενικευμένος νόμος της μιας τιμής)***

Θεωρείστε δύο επενδύσεις που σήμερα κοστίζουν C_1 και C_2 αντίστοιχα. Εάν $C_1 < C_2$ και η (παρούσα) αξία των μελλοντικών χρηματοροών της πρώτης επένδυσης είναι *πάντα* μεγαλύτερη ή ίση από την (παρούσα) αξία των μελλοντικών χρηματοροών της δεύτερης επένδυσης τότε υπάρχει ευκαιρία για arbitrage.

<u>Απόδειξη</u>

Προφανώς το arbitrage επιτυγχάνεται πουλώντας τη δεύτερη επένδυση και ταυτόχρονα αγοράζοντας την πρώτη επένδυση

3.2 Ασκήσεις

1) Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζετε ότι η αξία κάποιου αξιόγραφου μετά από μια περίοδο (δηλ. τη χρονική στιγμή 1) θα πάρει κάποια από τις τιμές $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Ποιά θα πρέπει να είναι, τη χρονική στιγμή 0, η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς αυτού του αξιόγραφου με τιμή εξάσκησης K όταν το K είναι μικρότερο από το $\min(s_1, s_2, \ldots, s_n)$?

2) *Έστω C η τιμή ενός call option ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης K επί ενός αξιόγραφου (που δεν παρέχει εισόδημα) που η τρέχουσα τιμή του είναι S. Έστω ότι ο χρόνος έως τη λήξη του call option είναι T και τα επιτόκια είναι r συνεχώς ανατοκιζόμενα. Δείξτε ότι: $\max(S-Ke^{-rT}, 0)<C\leq S$.

3) *Έστω P η τιμή ενός put option ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης K επί ενός αξιόγραφου (που δεν παρέχει εισόδημα) που η τρέχουσα τιμή του είναι S. Έστω ότι ο χρόνος έως τη λήξη του put option είναι T και τα επιτόκια είναι r συνεχώς ανατοκιζόμενα. Δείξτε ότι: $\max(Ke^{-rT} - S, 0)< P \leq Ke^{-rT}$.

4) Ένας επενδυτής αγοράζει ένα call με τιμή εξάσκησης K και πουλάει ένα put με την ίδια τιμή εξάσκησης. Περιγράψτε τη θέση του επενδυτή

5) Έστω ότι C_1, C_2, C_3 είναι οι τιμές call options (ευρωπαϊκού τύπου) με την ίδια ημερομηνία λήξης, με τιμές εξάσκησης K_1, K_2, K_3 αντίστοιχα, όπου $K_3>K_2>K_1$ και $K_3-K_2=K_2-K_1$. Δείξτε ότι $C_2\leq 0{,}5(C_1+C_3)$

6) Ένα call και ένα put option ευρωπαϊκού τύπου επί του ίδιου αξιόγραφου λήγουν και τα δύο σε τρεις μήνες, έχουν και τα δύο τιμή εξάσκησης 20 και η τρέχουσα τιμή τους είναι 3 και για τα δύο. Εάν το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο είναι 10% και η τρέχουσα τιμή του αξιόγραφου είναι 25 κάντε arbitrage.

7) Έστω ότι ταυτόχρονα αγοράζετε ένα call option με τιμή εξάσκησης 100 και πουλάτε ένα call option με τιμή εξάσκησης 105 επί του ίδιου αξιόγραφου και με την ίδια ημερομηνία λήξης. Είναι το αρχικό σας κόστος θετικό ή αρνητικό? Σχεδιάστε το κέρδος (ζημία) στη λήξη σαν συνάρτηση της τιμής του αξιόγραφου στη λήξη.

3.3 Υποδείξεις-απαντήσεις- σχόλια επί των ασκήσεων

1) Η τιμή του δικαιώματος τη χρονική στιγμή 0 θα πρέπει να ισούται με S_0-Ke^{-rT}, όπου S_0 είναι η τιμή του αξιογράφου τη χρονική στιγμή 0. Διαφορετικά μπορεί να διεξαχθεί arbitrage.

2) Θα δείξω ότι εάν δεν ισχύει η ανισότητα τότε μπορώ να διεξάγω arbitrage. Πράγματι, εάν C>S, τότε τη χρονική στιγμή 0 πουλάω ένα call εισπράττω C>S και αγοράζω ένα αξιόγραφο προς S. Μου περισσεύουν C-S που τα κάνω ότι θέλω. Το χειρότερο που μπορεί να μου συμβεί τη χρονική στιγμή T είναι να ασκηθεί το call οπότε πουλάω το αξιόγραφο (που το έχω από τη χρονική στιγμή 0) στον κάτοχο του option και εισπράττω K.Άρα σε αυτή την περίπτωση έχουμε arbitrage, οπότε πρέπει να ισχύει πάντα C<S.
Έστω τώρα ότι $C \le \max(S-Ke^{-rT}, 0)$. Ας παρατηρήσουμε αρχικά ότι δεν έχει νόημα να έχω C μη θετικό (γιατί?). Άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορώ να υποθέσω ότι $0<C\le S-Ke^{-rT}$. Σε αυτή την περίπτωση τη χρονική στιγμή 0 πουλάω short ένα αξιόγραφο και εισπράττω S. Από αυτά καταθέτω Ke^{-rT} στην Τράπεζα για διάστημα T με επιτόκιο r. Μου περισσεύουν $S-Ke^{-rT}$ από τα οποία αγοράζω ένα call και ξοδεύω C. Μου περισσεύουν $(S-Ke^{-rT})-C$ που τα κάνω ότι θέλω. Τη χρονική στιγμή T, εισπράττω K από την Τράπεζα, αγοράζω το αξιόγραφο (είτε από την αγορά, είτε εξασκώντας το call) πληρώνοντας *το πολύ* K και επιστρέφω το αξιόγραφο κλείνοντας τη θέση short που είχα σε αυτό. Άρα και σε αυτή την περίπτωση έχουμε arbitrage, οπότε πρέπει να ισχύει ότι $\max(S-Ke^{-rT}, 0)<C$.
(Προσοχή: εξηγείστε προσεκτικά στον εαυτό σας γιατί δεν μπορεί να ισχύει η ισότητα $\max(S-Ke^{-rT}, 0)=C$. Σκεφτείτε επίσης και συγκρίνετε γιατί στην προηγούμενη άσκηση ίσχυε η ισότητα. Ποιο μη ρεαλιστικό στοιχείο στην προηγούμενη άσκηση μας ανάγκασε να δώσουμε ως απάντηση τη σχέση ισότητας?)

3) Παρόμοια με την προηγούμενη άσκηση

4) Η θέση του επενδυτή είναι ίδια με αυτή μιας long θέσης σε ένα forward με τιμή παράδοσης K.

5) Θεωρείστε ένα χαρτοφυλάκιο που να αποτελείται από 2 calls με τιμή εξάσκησης K_2 και ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο να αποτελείται από ένα call με τιμή εξάσκησης K_1 και ένα call με τιμή εξάσκησης K_3. Στη συνέχεια δείξτε ότι η αξία στη λήξη του πρώτου χαρτοφυλακίου είναι πάντα μικρότερη από τη αξία στη λήξη του δεύτερου χαρτοφυλακίου (διακρίνοντας τρείς περιπτώσεις σχετικά με την αξία του υποκείμενου αξιόγραφου τη στιγμή που λήγουν τα options). Τέλος εφαρμόστε τον γενικευμένο νόμο της μιας τιμής ή εναλλακτικά δείξτε πως θα κάνατε arbitrage εάν δεν ίσχυε η ζητούμενη σχέση)

6) Εφαρμόστε την ισοδυναμία put και call προκειμένου να διαπιστώσετε πως θα κάνετε το arbitrage.

7) Μεγαλύτερη τιμή εξάσκησης σημαίνει ότι έχω το δικαίωμα να αγοράσω το υποκείμενο αξιόγραφο σε υψηλότερη τιμή. Προφανώς δεν είμαι διατεθειμένος να πληρώσω για ένα τέτοιο option τόσα χρήματα όσα θα πλήρωνα για ένα option που θα μου έδινε τη δυνατότητα να αγοράσω το υποκείμενο αξιόγραφο σε χαμηλότερη τιμή. Άρα …

Για να κάνετε το διάγραμμα, απλά σχεδιάστε προσεκτικά τις δύο θέσεις στο ίδιο διάγραμμα και στη συνέχεια να τις «προσθέσετε».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εισαγωγή στο διωνυμικό μοντέλο[1]

4.1. Το διωνυμικό μοντέλο μιάς περιόδου

4.1.1. Η Αγορά

Στην προσπάθεια μας να μελετήσουμε τις τιμές των παραγώγων θα ξεκινήσουμε με ένα μοντέλο αγοράς, όσο πιο απλό γίνεται.

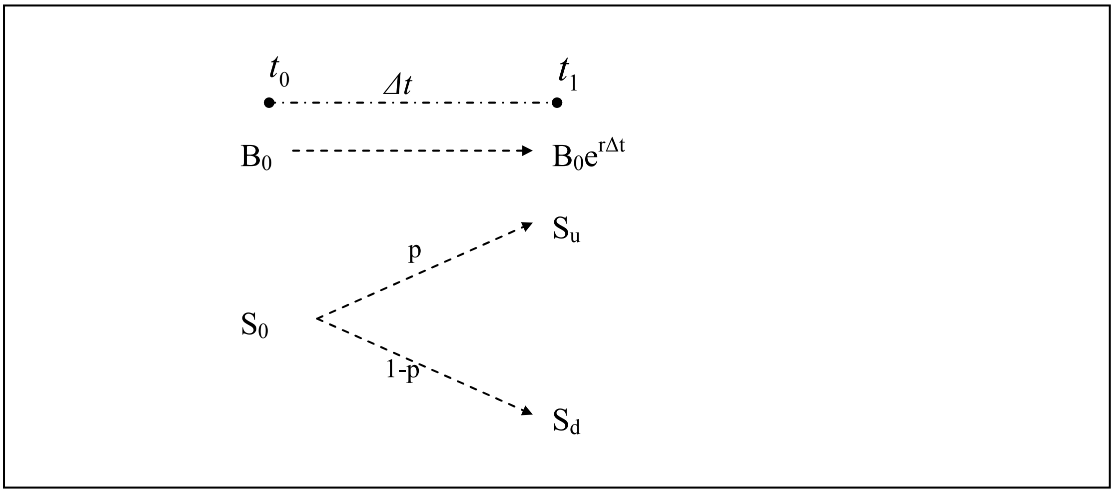
Ο χρόνος αντιπροσωπεύεται από δύο μόνο χρονικές στιγμές, το «τώρα» (t_0) και το «λίγο αργότερα» (t_1) που καθορίζουν μια χρονική περίοδο ($\Delta t = t_1 - t_0$)

Η αξία του χρήματος για τη χρονική περίοδο από t_0 έως t_1, αντιπροσωπεύεται από ένα Τραπεζικό λογαριασμό B ο οποίος κερδίζει σταθερό επιτόκιο r συνεχώς ανατοκιζόμενο. Έτσι εάν την t_0 «αγοράσουμε» έναν Τραπεζικό λογαριασμό αξίας B_0 (δηλαδή καταθέσουμε ένα ποσό B_0 στην Τράπεζα), την t_1 η αξία αυτού του λογαριασμού θα είναι $B_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t}$ (δηλ. θα εισπράξουμε $B_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t}$ από την Τράπεζα). Αντίστοιχα, εάν την t_0 «πουλήσουμε» έναν Τραπεζικό λογαριασμό αξίας B_0 (δηλαδή δανεισθούμε ένα ποσό B_0 από την Τράπεζα), την t_1 η αξία αυτού του λογαριασμού θα είναι $B_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t}$ (δηλ. θα χρωστάμε $B_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t}$ στην Τράπεζα).

Η αβεβαιότητα για το μέλλον σε αυτή την αγορά αντιπροσωπεύεται από ένα αξιόγραφο A το οποίο έχει αβέβαιη (μη προβλέψιμη) μελλοντική αξία (στο νου μας έχουμε μια μετοχή που δεν πληρώνει μέρισμα). Έστω λοιπόν ότι την t_0 η αξία του A έχει την τιμή S_0 ενώ την t_1 δεν γνωρίζουμε τι τιμή θα έχει η αξία του A.
Ας υποθέσουμε όμως ότι η αγορά μας διαθέτει ακόμα μια πληροφορία σχετικά με την μελλοντική τιμή της αξίας του A, συγκεκριμένα ότι την t_1 η αξία του A θα λάβει μια από *δύο μόνο τιμές*, είτε την τιμή S_u (με θετική πιθανότητα p) είτε την τιμή S_d (με πιθανότητα $1-p$), όπου $S_d < S_u$.
(έτσι η αβεβαιότητα για την μελλοντική κατάσταση της αγοράς συμπυκνώνεται σε αυτές τις δύο τιμές και στο μέτρο πιθανότητας που τις συνοδεύει)

Σχηματικά μπορούμε να απεικονίσουμε αυτή την αγορά στο παρακάτω διάγραμμα:

[1] Το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης παραγώγων προτάθηκε αρχικά από τον Sharpe (1978) [Sharpe W.F. , 1978, "Investments", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey] και στη συνέχεια αναπτύχθηκε λεπτομερώς από τους Cox, Ross και Rubinstein (CRR, 1979) [Cox J.C., Ross S.A. & Rubinstein M., 1979, "Option Pricing: A Simplified Approach", Journal of Financial Economics, 7, 229-263]



Έτσι η αγορά μας αποτελείται από δύο στοιχεία, τα αξιόγραφα A και B, στα οποία οι συμμετέχοντες στην αγορά (ας τους ονομάζουμε επενδυτές για συντομία) μπορούν να συναλλαγούν.

Συγκεκριμένα τη χρονική στιγμή t_0 οι επενδυτές έχουν τις εξής δυνατότητες συναλλαγών

Να αγοράσουν x μονάδες του αξιόγραφου A στην τιμή S_0 (ανά μονάδα του A), καταβάλλοντας το ποσό $x \cdot S_0$ στους πωλητές του αξιόγραφου

Να πουλήσουν short x μονάδες του A στην τιμή S_0 (ανά μονάδα του A), εισπράττοντας το ποσό $x \cdot S_0$ από τους αγοραστές του αξιόγραφου. (Πουλάω short το A σημαίνει ότι δανείζομαι το A και το πουλάω με την υποχρέωση να το επιστρέψω αργότερα)

Να καταθέσουν χρήματα στην Τράπεζα για το χρονικό διάστημα Δt με επιτόκιο r.

Να δανεισθούν χρήματα από την Τράπεζα για το χρονικό διάστημα Δt με επιτόκιο r.

Αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή t_1, οι επενδυτές κλείνουν όλες τις θέσεις που είχαν ανοίξει τη χρονική στιγμή t_0 και μένουν μόνο με χρήματα τα οποία καταναλώνουν. Συγκεκριμένα την t_1, οι επενδυτές μπορούν να κάνουν τα εξής:

Να πουλήσουν το αξιόγραφα που είχαν αγοράσει την t_0. Οι τιμή στην οποία θα τα πουλήσουν θα είναι αυτή η τιμή από τις S_1 ή S_2 που θα επικρατεί την t_1.

Να αγοράσουν τα αξιόγραφα που είχαν πουλήσει short και να τα επιστρέψουν.

Να εισπράξουν το προϊόν της κατάθεσης τους από την Τράπεζα.

Να εξοφλήσουν το δανεισμό τους στην Τράπεζα.

4.1.1.1 Παρατήρηση

Για να μην υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage σε αυτή την αγορά θα πρέπει να ισχύει ότι:

$S_d < S_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t} < S_u$

Απόδειξη

Είναι άμεση συνέπεια του νόμου της μιας τιμής, αλλά ας το δούμε εδώ αναλυτικά.

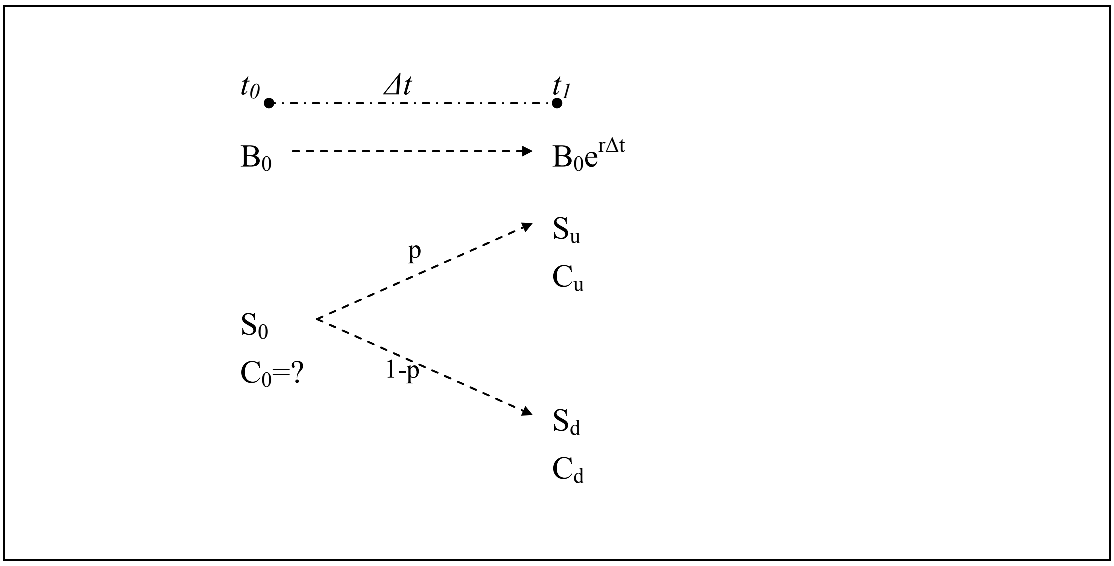
Έστω ότι $S_d \geq S_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t}$

Εκτελώ την εξής στρατηγική arbitrage:

Την t_0 δανείζομαι ποσό S_0 από την Τράπεζα και αγοράζω μια μονάδα του αξιόγραφου A πληρώνοντας S_0. Την t_1 πουλάω το αξιόγραφο και από τα χρήματα που εισπράττω επιστρέφω τα $S_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t}$ που οφείλω στην Τράπεζα. Άρα μου περισσεύουν είτε S_u -$S_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t}$ >0 (με θετική πιθανότητα p) είτε S_d - $S_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t} \geq 0$ (με πιθανότητα 1-p). Άρα, με μηδενικό κόστος έχω θετική πιθανότητα για ακίνδυνο κέρδος και έχω κάνει arbitrage.
Ανάλογα, εάν $S_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t} \geq S_u$, πουλάω short την t_0 ένα αξιόγραφο, εισπράττω S_0 και τα καταθέτω στην Τράπεζα. Τη χρονική στιγμή t_1 εισπράττω $S_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t}$ από την Τράπεζα και κλείνω τη short θέση αγοράζοντας το αξιόγραφο στην τρέχουσα τιμή του η οποία όμως από την υπόθεση μου δεν είναι μεγαλύτερη από $S_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t}$ που εισέπραξα από την Τράπεζα. Αρα και πάλι, με μηδενικό κόστος έχω θετική πιθανότητα για ακίνδυνο κέρδος και έχω κάνει arbitrage.

4.1.2. Το Συμβόλαιο

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι υπάρχει ένα συμβόλαιο C η αξία του οποίου τη χρονική στιγμή t_1 εξαρτάται από την αξία που θα έχει τότε το αξιόγραφο A. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι την t_1, η αξία του C θα είναι C_u εάν η αξία του A είναι S_u ενώ θα είναι C_d εάν η αξία του A είναι S_d. Αυτή η εξάρτηση της τελικής αξίας του C από την τελική αξία του A μας κάνει να αναρωτιόμαστε αν μπορούμε να προδιορίσουμε την αξία C_0 του συμβολαίου C τη χρονική στιγμή t_0.
Συγκεκριμένα, αναρωτιόμαστε *σε ποια τιμή* C_0 *θα πρέπει να αγοράζεται και να πουλιέται το συμβόλαιο τη χρονική στιγμή* t_0 *ώστε να μη δημιουργούνται ευκαιρίες arbitrage σε αυτήν την αγορά?*



Το γεγονός ότι έχουμε τη δυνατότητα συναλλαγών στο αξιόγραφο A και στον Τραπεζικό λογαριασμό B με κάνει να σκεφτώ ως εξής: Αν καταφέρω να προσδιορίσω τη χρονική στιγμή t_0 ένα συνδυασμό (χαρτοφυλάκιο) αποτελούμενο από τα A και B με τέτοιο τρόπο ώστε τη χρονική στιγμή t_1 αυτός ο συνδυασμός να αξίζει *σε κάθε περίπτωση* όσο αξίζει και το συμβόλαιο C, τότε βάσει του νόμου της μιάς τιμής θα πρέπει και τη χρονική στιγμή t_0 η αξία αυτού του συνδυασμού να είναι ίση με την αξία C_0 του συμβολαίου (αν δεν είναι θα μπορώ να κάνω arbitrage).

Έστω λοιπόν ότι την t_0 έχω ένα χαρτοφυλάκιο Π που αποτελείται από ϕ μονάδες του αξιόγραφου A και ψ μονάδες του Τραπεζικού λογαριασμού B. Επομένως η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\Pi_0 = \phi S_0 + \psi$

Τη χρονική στιγμή t_1 το χαρτοφυλάκιο Π θα έχει αξία

$\Pi_u = \phi \cdot S_u + \psi \cdot e^{r \cdot \Delta t}$, εάν το αξιόγραφο αξίζει S_u

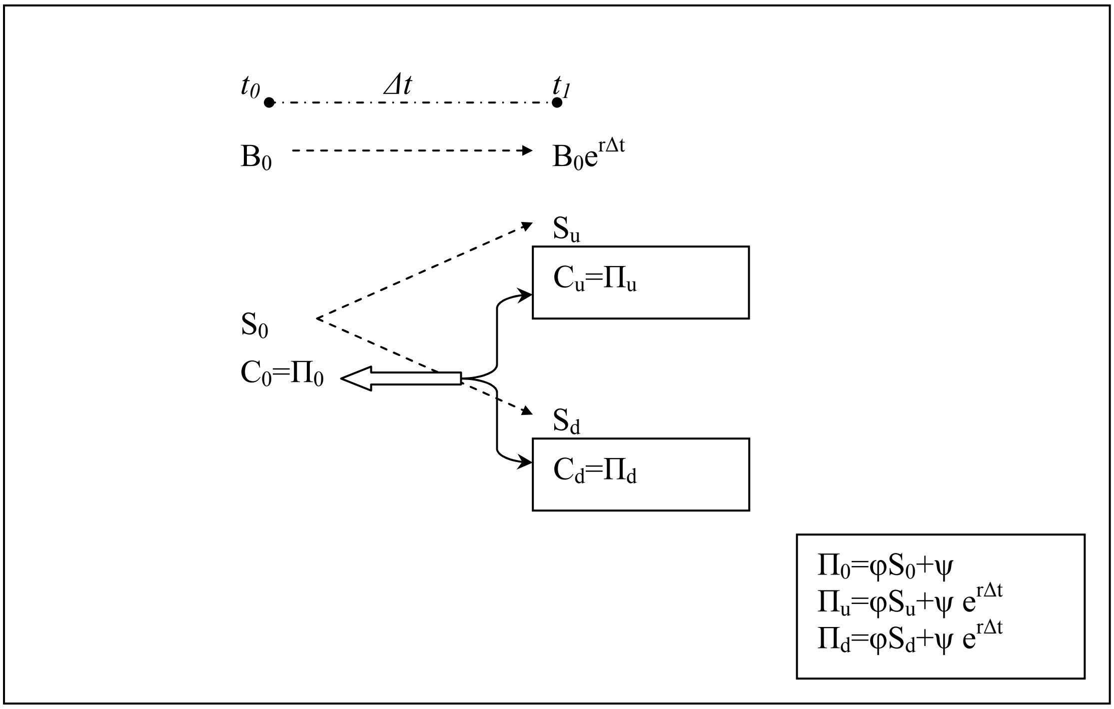
ή

$\Pi_d = \phi \cdot S_d + \psi \cdot e^{r \cdot \Delta t}$, εάν το αξιόγραφο αξίζει S_d

Λύνοντας ως προς ϕ, ψ το σύστημα

$$C_u = \phi \cdot S_u + \psi \cdot e^{r \cdot \Delta t}$$
$$C_d = \phi \cdot S_d + \psi \cdot e^{r \cdot \Delta t}$$

θα προσδιορίσουμε ποια πρέπει να είναι η σύνθεση του χαρτοφυλακίου Π ώστε την t_1 να αξίζει σε κάθε περίπτωση όσο και το συμβόλαιο, οπότε στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την αρχική αξία Π_0 του χαρτοφυλακίου και αυτή θα πρέπει να είναι η αξία C_0 του συμβολαίου ώστε να μην έχουμε arbitrage.



Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$\phi = \dfrac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$ και $\psi = e^{-r\Delta t} \dfrac{S_u C_d - S_d C_u}{S_u - S_d}$

Οπότε η αξία του συμβολαίου την t_0 που δεν επιτρέπει arbitrage είναι $C_0 = \Pi_0 = \phi S_0 + \psi \Rightarrow$

$$C_0 = \underbrace{\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}}_{\phi} S_0 + \underbrace{e^{-r\Delta t}\frac{S_u C_d - S_d C_u}{S_u - S_d}}_{\psi}$$

Το χαρτοφυλάκιο Π που κατασκευάσαμε θα το ονομάζουμε «*το χαρτοφυλάκιο που είναι ισοδύναμο με το συμβόλαιο*» ή απλά «***το ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο***» (όταν δεν υπάρχει αμφιβολία σε ποιό συμβόλαιο αναφερόμαστε).
Επομένως στη μικρή μας αγορά, έχουμε δύο ξεχωριστές οντότητες, το συμβόλαιο C και το ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο Π που πρέπει να έχουν πάντα την ίδια αξία προκειμένου να μην υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage. Αυτό σημαίνει ότι εάν παρατηρήσουμε ότι η *τιμή* του συμβολαίου τη χρονική στιγμή t_0 διαφέρει από την *αξία* του ισοδύναμου χαρτοφυλακίου, τότε μπορούμε να εκτελέσουμε μια στρατηγική arbitrage και να αποκομίσουμε ακίνδυνο κέρδος.

<u>4.1.2.1. Παράδειγμα</u>
Έστω ότι την t_0 η τιμή μιας μετοχής (που δεν πληρώνει μέρισμα) είναι S_0=100 και την t_1 η τιμή αυτής της μετοχής μπορεί να πάρει είτε την τιμή S_u=120 είτε την τιμή S_d=80. Έστω επίσης ότι το επιτόκιο δανεισμού είναι ίσο με $r = 0$. Να υπολογισθεί η αξία C_0 (την t_0) ενός call option επί της μετοχής, με ημερομηνία λήξης την t_1 και τιμή εξάσκησης K=100.

<u>Απάντηση</u>
Η αξία ενός call option στη λήξη t_1, είναι ίση με $\max(S_{t_1} - K, 0)$, όπου S_{t_1} η αξία του υποκείμενου στοιχείου τη στιγμή t_1 και K η τιμή εξάσκησης. Στο παράδειγμα μας προφανώς η αξία του call option τη στιγμή t_1 θα είναι είτε C_u=20 είτε C_d=0.

$\phi = \dfrac{20-0}{120-80} = \dfrac{1}{2}$ και $\psi = \dfrac{120\cdot 0 - 80\cdot 20}{120-80} = -40$

Άρα $C_0 = \dfrac{1}{2}\cdot 100 + (-40) = 10$

<u>4.1.2.2. Παράδειγμα (συνέχεια του παραδείγματος 4.1.2.1.)</u>
Έστω ότι με τις υποθέσεις του προηγούμενου παραδείγματος υπάρχει κάποιος επενδυτής Υ που εκδηλώνει ενδιαφέρον να πουλήσει το call option στην τιμή 8. Κάντε arbitrage.

<u>Απάντηση</u>
Αφού η θεωρητική τιμή του call option είναι 10 και ο επενδυτής προσφέρεται να το πουλήσει χαμηλότερα από τη θεωρητική τιμή θα αγοράσω (φθηνά) το call option από τον Υ και θα πουλήσω ταυτόχρονα το ισοδύναμο με το call option χαρτοφυλάκιο. Αυτό θα μου αποφέρει την t_0 ακίνδυνο κέρδος ίσο με 10-8=2. Ας το δούμε αναλυτικά: την t_0 λοιπόν πουλάω το χαρτοφυλάκιο (ϕ, ψ) που κατασκεύασα στο προηγούμενο παράδειγμα (προφανώς στην τιμή 10), δηλαδή πουλάω short ϕ=1/2 μετοχές προς 100 εισπράττοντας ½*100 = 50 και από αυτά τοποθετώ 40 στην

Τράπεζα. Ταυτόχρονα αγοράζω ένα call option από τον Y στην τιμή 8. Άρα μου περισσεύουν 2 τα οποία μπορώ να τα κάνω ότι θέλω. Ας επαληθεύσουμε τώρα ότι την t_1 δεν θα αντιμετωπίσω κανένα ενδεχόμενο ζημίας.

Πράγματι, εάν την t_1 η μετοχή πάει στο 120, θα εξασκήσω το call option και θα εισπράξω την αξία του, δηλαδή 20. Με αυτά και με τα 40 που μου χρωστάει η Τράπεζα θα αγοράσω ½ μετοχή ξοδεύοντας ½*120=60. Έτσι έχω τώρα 1 μετοχή με την οποία μπορώ να κλείσω τη short θέση μου. Δεν έχω άλλες εκκρεμμότητες.
Εάν την t_1 η μετοχή πάει στο 80, το call option θα έχει μηδενική αξία οπότε δεν θα το εξασκήσω. Εισπράττω όμως τα 40 που μου χρωστάει η Τράπεζα και αγοράζω ½ μετοχή ξοδεύοντας ½*80=40. Έτσι έχω τώρα 1 μετοχή με την οποία μπορώ να κλείσω τη short θέση μου. Δεν έχω άλλες εκκρεμμότητες.

4.1.2.3. Παράδειγμα (συνέχεια του παραδείγματος 4.1.2.1.)
Έστω ότι με τις υποθέσεις του προηγούμενου παραδείγματος υπάρχει κάποιος επενδυτής Y που εκδηλώνει το ενδιαφέρον του να αγοράσει το call option στην τιμή 12. Κάντε arbitrage.

Απάντηση
Αφού η θεωρητική τιμή του call option είναι 10 και ο επενδυτής προσφέρεται να το αγοράσει υψηλότερα από τη θεωρητική τιμή θα πουλήσω (ακριβά) το call option στον Y και θα αγοράσω ταυτόχρονα το ισοδύναμο με το call option χαρτοφυλάκιο. Αυτό θα μου αποφέρει την t_0 ακίνδυνο κέρδος ίσο με 12-10=2. Ας το δούμε αναλυτικά: την t_0 λοιπόν πουλάω ένα call option στον Y στην τιμή 12. Ταυτόχρονα, αγοράζω το χαρτοφυλάκιο (ϕ,ψ) που κατασκεύασα στο παράδειγμα 1 (προφανώς στην τιμή 10), δηλαδή δανείζομαι 40 από την Τράπεζα και αγοράζω ϕ=1/2 μετοχές προς 100 που μουστοιχίζουν ½*100 = 50. Άρα μου περισσεύουν 12-10=2 τα οποία μπορώ να τα κάνω ότι θέλω. Ας επαληθεύσουμε τώρα ότι την t_1 δεν θα αντιμετωπίσω κανένα ενδεχόμενο ζημίας.
Πράγματι, εάν την t_1 η μετοχή πάει στο 120, θα πουλήσω την ½ μετοχή και θα εισπράξω ½*120=60. Από αυτά θα ξεχρεώσω τα 40 που χρωστάω στην Τράπεζα και με τα υπόλοιπα 20 θα αποζημιώσω τον Y που θα εξασκήσει το call option και θα εισπράξω την αξία του. Δεν έχω άλλες εκκρεμμότητες.
Εάν την t_1 η μετοχή πάει στο 80, το call option θα έχει μηδενική αξία οπότε ο Y δεν θα το εξασκήσει. Επίσης θα πουλήσω την ½ μετοχή και θα εισπράξω ½*80=40 με τα οποία θα ξεχρεώσω τα 40 που χρωστάω στην Τράπεζα. Δεν έχω άλλες εκκρεμμότητες.

4.1.3. Από το ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο στις Risk neutral πιθανότητες

Είδαμε προηγουμένως ότι στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου η αξία του παραγώγου συμβολαίου που δεν επιτρέπει arbitrage δίνεται από τη σχέση

$$C_0 = \underbrace{\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}}_{\phi} S_0 + \underbrace{e^{-r\Delta t}\,\frac{S_u C_d - S_d C_u}{S_u - S_d}}_{\psi}$$

Εκτελώντας απλές αλγεβρικές πράξεις μπορούμε να μετασχηματίσουμε αυτή τη σχέση στην εξής ενδιαφέρουσα μορφή:

$$C_0 = \underbrace{e^{-r\Delta t}}_{\text{Παρούσα αξία}} \underbrace{\left[\underbrace{\left(\frac{S_0 e^{r\Delta t} - S_d}{S_u - S_d} \right)}_{0<q<1} C_u + \underbrace{\left(\frac{S_u - S_0 e^{r\Delta t}}{S_u - S_d} \right)}_{0<1-q<1} C_d \right]}_{\text{Μέση τιμή κάτω από το μέτρο πιθανότητας Q της τελικής αξίας του συμβολαίου}}$$

Οι ποσότητες μέσα στις παρενθέσεις είναι ανάμεσα στο 0 και στο 1 (βλέπε παρατήρηση 1) και αθροίζονται στη μονάδα, άρα συνιστούν κάποιο μέτρο πιθανοτήτων που τις ονομάζουμε ***Arrow-Debreu πιθανότητες ή risk neutral πιθανότητες ή πιθανότητες ουδέτερες ως προς τον κίνδυνο ή ισοδύναμες martingale πιθανότητες***.

Έτσι, μπορούμε να διατυπώσουμε την εξής πρόταση:
Η (non arbitrage) αξία του παραγώγου συμβολαίου την t_0 είναι η παρούσα αξία της αναμενόμενης τιμής (ως προς το μέτρο Arrow-Debreu) της αξίας του στη λήξη.

4.1.3.1. Παράδειγμα (ίδια δεδομένα με αυτά του 4.1.2.1)

Έστω ότι την t_0 η τιμή μιας μετοχής (που δεν πληρώνει μέρισμα) είναι S_0=100 και την t_1 η τιμή αυτής της μετοχής μπορεί να πάρει είτε την τιμή S_u=120 είτε την τιμή S_d=80. Έστω επίσης ότι το επιτόκιο δανεισμού είναι ίσο με $r = 0$. Να υπολογισθούν οι risk neutral πιθανότητες και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσετε την αξία C_0 (την t_0) ενός call option επί της μετοχής, με ημερομηνία λήξης την t_1 και τιμή εξάσκησης K=100.

Απάντηση

Η αξία ενός call option στη λήξη t_1, είναι ίση με $\max(S_{t_1} - K, 0)$, όπου S_{t_1} η αξία του υποκείμενου στοιχείου τη στιγμή t_1 και K η τιμή εξάσκησης. Στο παράδειγμα μας προφανώς η αξία του call option τη στιγμή t_1 θα είναι είτε C_u=20 είτε C_d=0.

Οι risk neutral πιθανότητες είναι:

$$\text{πιθανότητα ανόδου } = q = \frac{S_0 \cdot e^{r\cdot\Delta t} - S_d}{S_u - S_d} = \frac{100-80}{120-80} = \frac{1}{2}$$

$$\text{πιθανότητα καθόδου } = 1 - q = \frac{1}{2}$$

Άρα

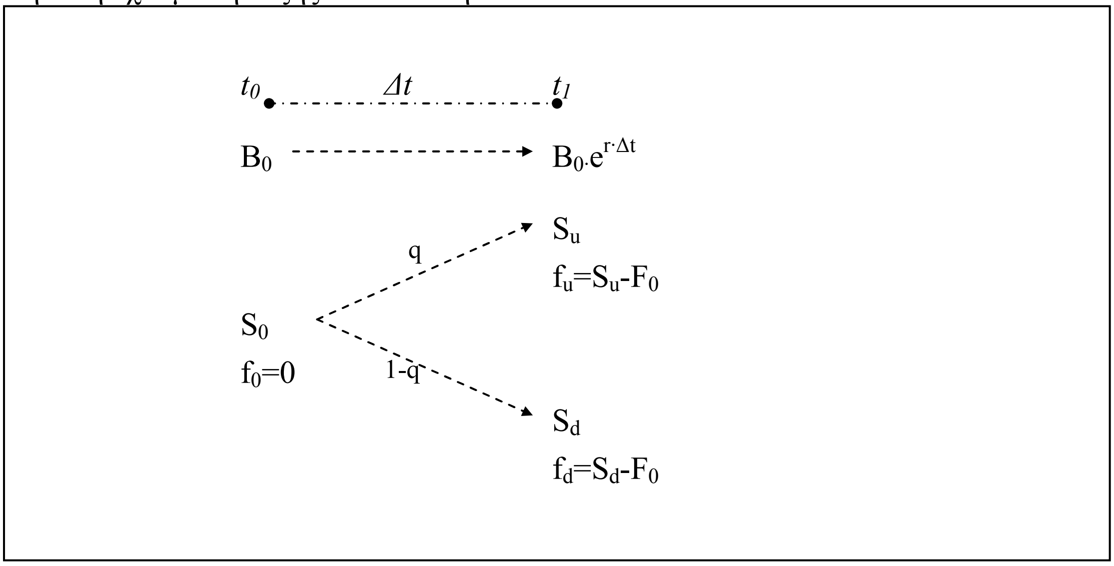
$$C_0 = e^{-r\cdot\Delta t} \cdot \left[q \cdot C_u + (1-q) \cdot C_d \right] = \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 10$$

4.1.3.2. Παράδειγμα (υπολογισμός της προθεσμιακής τιμής ενός forward συμβολαίου)

Έστω ότι την t_0 η τιμή μιας μετοχής (που δεν πληρώνει μέρισμα) είναι S_0 και την t_1, η τιμή αυτής της μετοχής μπορεί να πάρει είτε την τιμή S_u είτε την τιμή S_d. Έστω επίσης ότι το επιτόκιο δανεισμού είναι ίσο με r. Να υπολογισθεί η προθεσμιακή τιμή F_0 ενός προθεσμιακού συμβολαίου επί της μετοχής που ωριμάζει την t_1.

Απάντηση

Υπενθυμίζουμε ότι τη χρονική στιγμή t_0 η προθεσμιακή τιμή F_0 ενός προθεσμιακού συμβολαίου είναι εκείνη η τιμή παράδοσης που κάνει το συμβόλαιο να έχει μηδενική αξία (την t_0). Έστω f_0 η αξία του προθεσμιακού συμβολαίου τη χρονική στιγμή t_0. Έστω f_u η αξία του προθεσμιακού συμβολαίου την t_1 εάν η τιμή της μετοχής είναι S_u και f_d η αξία του προθεσμιακού συμβολαίου την t_1 εάν η τιμή της μετοχής είναι S_d. Δηλαδή έχουμε την εξής κατάσταση:



Οι risk neutral πιθανότητες είναι κατά τα γνωστά

$$\text{πιθανότητα ανόδου } = q = \frac{S_0 \cdot e^{r\cdot\Delta t} - S_d}{S_u - S_d}$$

$$\text{πιθανότητα καθόδου } = 1 - q = \frac{S_u - S_0 \cdot e^{r\cdot\Delta t}}{S_u - S_d}$$

Για να μην υπάρχει arbitrage θα πρέπει να ισχύει

$$f_0 = e^{-r\cdot\Delta t} \cdot \left[q \cdot f_u + (1-q)\cdot f_d \right]$$

που συνεπάγεται ότι

$$0 = e^{-r\cdot\Delta t} \cdot \left[\frac{S_0 \cdot e^{r\cdot\Delta t} - S_d}{S_u - S_d} \cdot (S_u - F_0) + \frac{S_u - S_0 \cdot e^{r\cdot\Delta t}}{S_u - S_d} \cdot (S_d - F_0) \right]$$

Οπότε λύνοντας την εξίσωση ως προς F_0 βρίσκουμε ότι

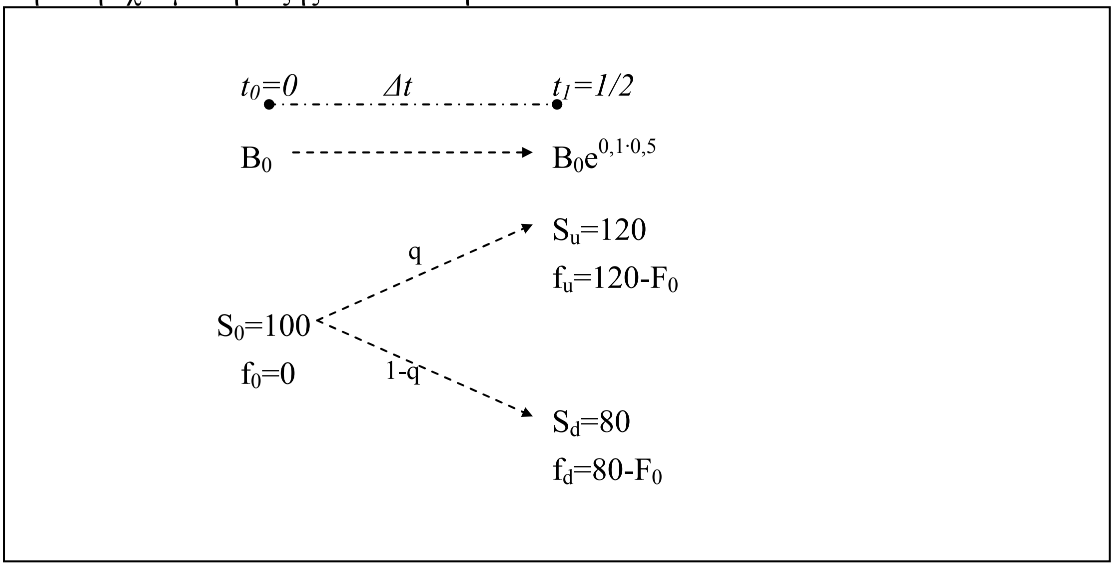
$F_0 = S_0 \cdot e^{r\cdot\Delta t}$ όπως αναμενόταν

4.1.3.3. Παράδειγμα (προθεσμιακή τιμή forward αριθμητικό παράδειγμα)

Έστω ότι την t_0 η τιμή μιας μετοχής (που δεν πληρώνει μέρισμα) είναι S_0=100 και την $t_1 = 6$ μήνες, η τιμή αυτής της μετοχής μπορεί να πάρει είτε την τιμή S_u=120 είτε την τιμή S_d=80. Έστω επίσης ότι το επιτόκιο δανεισμού είναι ίσο με $r = 10\%$. Να υπολογισθεί η προθεσμιακή τιμή F_0 ενός προθεσμιακού συμβολαίου επί της μετοχής που ωριμάζει την t_1.

<u>Απάντηση</u>

Υπενθυμίζουμε ότι τη χρονική στιγμή t_0 η προθεσμιακή τιμή F_0 ενός προθεσμιακού συμβολαίου είναι εκείνη η τιμή παράδοσης που κάνει το συμβόλαιο να έχει μηδενική αξία (την t_0). Έστω f_0 η αξία του προθεσμιακού συμβολαίου τη χρονική στιγμή t_0. Έστω f_u η αξία του προθεσμιακού συμβολαίου την t_1 εάν η τιμή της μετοχής είναι S_u και f_d η αξία του προθεσμιακού συμβολαίου την t_1 εάν η τιμή της μετοχής είναι S_d. Δηλαδή έχουμε την εξής κατάσταση:



Οι risk neutral πιθανότητες είναι κατά τα γνωστά

$$\text{πιθανότητα ανόδου } = q = \frac{S_0 \cdot e^{r\cdot\Delta t} - S_d}{S_u - S_d} = \frac{100 \cdot e^{10\%\cdot 0,5} - 80}{120-80} = 0,6282$$

$$\text{πιθανότητα καθόδου } = 1-q = 0,3718$$

Για να μην υπάρχει arbitrage θα πρέπει να ισχύει

$$f_0 = e^{-r\cdot\Delta t} \cdot \left[q \cdot f_u + (1-q)\cdot f_d\right]$$

που συνεπάγεται ότι

$$0 = e^{-10\%\cdot 0,5} \cdot \left[0,6282 \cdot (120 - F_0) + 0,3718 \cdot (80 - F_0)\right]$$

Οπότε λύνοντας την εξίσωση ως προς F_0 βρίσκουμε ότι

$$F_0 = 105,1271$$

(προφανώς στην πράξη θα χρησιμοποιούσαμε απευθείας τον τύπο $F_0 = S_0 \cdot e^{r\cdot\Delta t} = 100 \cdot e^{10\%\cdot 0,5}$ *που είναι πολύ πιο απλός (εδώ απλά κάναμε ένα παράδειγμα για να δούεμ την εφαρμογή της μεθόδου risk neutral αποτίμησης.)*

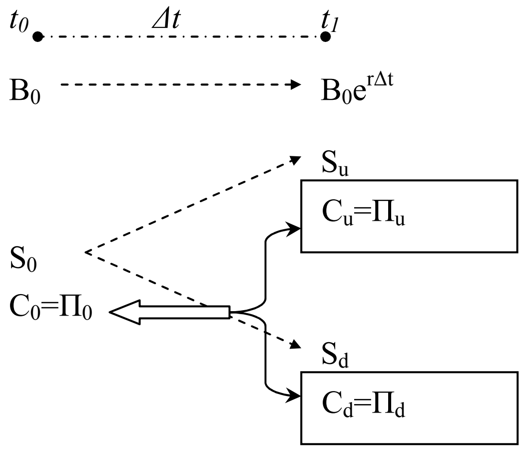
<u>4.1.3.4. Παρατηρήσεις</u>

1) Παρατηρείστε ότι οι Arrow-Debreu πιθανότητες εξαρτώνται αποκλειστικά από τις διάφορες τιμές του αξιόγραφου A και από το επιτόκιο r.

2) Αν ο τύπος που βγάλαμε είναι συνεπής τότε θα πρέπει να τιμολογεί σωστά και το αξιόγραφο A. Πράγματι, προσέξτε ότι αν αντικαταστήσουμε στον προηγούμενο τύπο το C με το S το αποτέλεσμα θα είναι S_0. Δηλαδή οι Arrow-Debreu πιθανότητες είναι τέτοιες ώστε η παρούσα αξία της αναμενόμενης τιμής των μελλοντικων τιμών του αξιόγραφου A είναι ίση με τη σημερινή του τιμή.
3) Όπως και στην προηγούμενη παρατήρηση μπορούμε να δούμε ότι και ο Τραπεζικός λογαριασμός B τιμολογείται σωστά. Πράγματι, αν θέσει κανείς $C_u = C_d = 1$ (δηλαδή αν υποθέσουμε ότι το παράγωγο είναι τέτοιο που να δίνει στη λήξη 1 με βεβαιότητα (δηλ. είναι ουσιαστικά ένας Τραπεζικός λογαριασμός)), τότε ο παραπάνω τύπος θα δώσει $C_0 = e^{-r\Delta t}$, δηλαδή το ποσό που θα έπρεπε να τοποθετήσουμε στην Τράπεζα για να εισπράξουμε 1 μετά από χρόνο Δt. Δηλαδή οι Arrow-Debreu πιθανότητες είναι τέτοιες ώστε η παρούσα αξία της αναμενόμενης τιμής των μελλοντικων τιμών του αξιόγραφου B είναι ίση με τη σημερινή του τιμή (βέβαια αυτό θα συνέβαινε για το αξιόγραφο B ότι πιθανότητες και να χρησιμοποιούσαμε!)
4) Παρατηρείστε ότι οι πραγματικές πιθανότητες p και 1-p που είχαμε θεωρήσει στο πρώτο διάγραμμα αυτού του κεφαλαίου δεν μπήκαν ποτέ στη συζήτηση. Επομένως δεν είχαν καμία σημασία για τον υπολογισμό της αξίας του συμβολαίου.
5) Οι Arrow Debreu πιθανότητες που κατασκευάσαμε παραπάνω δεν έχουν καμμία σχέση με τις «πραγματικές» πιθανότητες (πραγματικές με την έννοια της συχνότητας παρατηρήσεων).
6) Οι Arrow Debreu πιθανότητες είναι εκείνες οι πιθανότητες που καθιστούν martingale τη διαδικασία της παρούσας αξίας των τιμών του αξιόγραφου A (το κάνουν και για το B με τετριμμένο όμως τρόπο). Με άλλα λόγια όλα τα παιχνίδια που παίζονται σε αυτό το δέντρο κάτω από αυτές τις πιθανότητες είναι δίκαια αν λάβει κανείς υπόψη του και τον παράγοντα της αξίας του χρόνου.

4.1.4. Συνοψίζοντας

Τα βασικά σημεία από όλα τα παραπάνω συγκεντρώνονται περιληπτικά στον επόμενο πίνακα:



$$q = \frac{S_0 \cdot e^{r\Delta t} - S_u}{S_u - S_d}$$

$$\phi = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$$

$$C_0 = e^{-r\cdot\Delta t} \cdot [q \cdot C_u + (1-q) \cdot C_d]$$

$$\Pi_0 = \varphi S_0 + \psi$$
$$\Pi_u = \varphi S_u + \psi\, e^{r\Delta t}$$
$$\Pi_d = \varphi S_d + \psi\, e^{r\Delta t}$$

4.2. Το Διωνυμικό Μοντέλο Πολλών Περιόδων

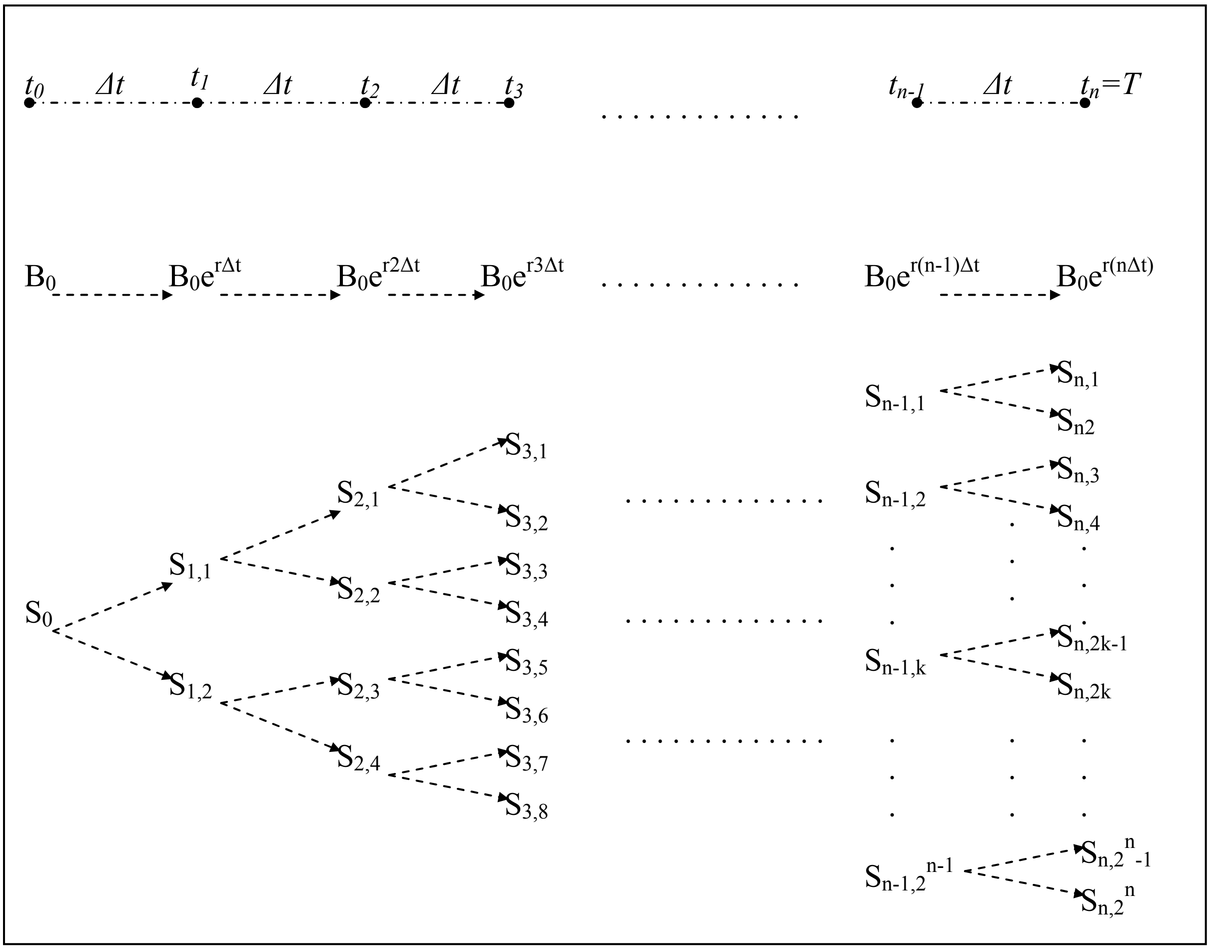
4.2.1. Η Αγορά

Ας προσπαθήσουμε να κάνουμε τώρα το μοντέλο μας λίγο πιο ρεαλιστικό. Θα πυκνώσουμε το μοντέλο μας εισάγοντας περισσότερες χρονικές στιγμές και επιτρέποντας περισσότερες τιμές στη λήξη. Ουσιαστικά θα «κολλήσουμε» μεταξύ τους πολλά μοντέλα μιας μιας περιόδου για να φτιάξουμε ένα μοντέλο πολλών περιόδων.

Ο χρόνος αντιπροσωπεύεται από n+1 χρονικές στιγμές, t_0, t_1, …, t_n που καθορίζουν n χρονικές περιόδους διάρκειας Δt η κάθε μια.

Η αξία του χρήματος για κάθε χρονική περίοδο, αντιπροσωπεύεται από ένα Τραπεζικό λογαριασμό B ο οποίος κερδίζει σταθερό επιτόκιο r συνεχώς ανατοκιζόμενο. Έτσι εάν την t_i «αγοράσουμε» έναν Τραπεζικό λογαριασμό αξίας B_i (δηλαδή καταθέσουμε ένα ποσό B_i στην Τράπεζα), την t_{i+1} η αξία αυτού του λογαριασμού θα είναι $B_i \cdot e^{r \cdot \Delta t}$ (δηλ. θα εισπράξουμε $B_i \cdot e^{r \cdot \Delta t}$ από την Τράπεζα). Αντίστοιχα, εάν την t_i «πουλήσουμε» έναν Τραπεζικό λογαριασμό αξίας B_i (δηλαδή δανεισθούμε ένα ποσό B_i από την Τράπεζα), την t_{i+1} η αξία αυτού του λογαριασμού θα είναι $B_i \cdot e^{r \cdot \Delta t}$ (δηλ. θα χρωστάμε $B_i \cdot e^{r \cdot \Delta t}$ στην Τράπεζα).

Η αβεβαιότητα για το μέλλον σε αυτή την αγορά αντιπροσωπεύεται από ένα αξιόγραφο A το οποίο έχει αβέβαιη (μη προβλέψιμη) μελλοντική αξία (στο νου μας έχουμε μια μετοχή που δεν πληρώνει μέρισμα) που η εξέλιξη της τιμής του απεικονίζεται στο παρακάτω διάγραμμα, όπου έχουμε απεικονίσει επίσης την εξέλιξη της αξίας του Τραπεζικού λογαριασμού B. Παρατηρούμε και πάλι σχετικά με το αξιόγραφο A ότι σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή και όποια και αν είναι η τιμή του A εκείνη τη στιγμή δεν μπορούμε να προβλέψουμε την τιμή του για την επόμενη χρονική στιγμή, όμως γνωρίζουμε ότι θα πάρει τη μια από δύο μόνο τιμές.



Παρατηρείστε ότι στο μοντέλο της μιας περιόδου η πληροφορία που είχαμε τη χρονική στιγμή t_0 σχετικά με την αξία του A στη λήξη ήταν ότι μπορεί να πάρει τη μια από δύο μόνο τιμές. Εδώ, στο μοντέλο των n περιόδων η πληροφορία που έχουμε τη χρονική στιγμή t_0 σχετικά με την αξία του A στη λήξη είναι ότι μπορεί να πάρει τη μια από 2^n τιμές. Δηλαδή τώρα έχω μεγαλύτερη αβεβαιότητα την t_0 σχετικά με την αξία στη λήξη του αξιογράφου A. Βέβαια, καθώς ο χρόνος περνάει και πλησιάζω προς τη λήξη αυτή η αβεβαιότητα σχετικά με την αξία του A στη λήξη όλο και μειώνεται. Για παράδειγμα, όταν φθάσει η χρονική στιγμή t_{n-1} θα γνωρίζω ότι την επόμενη χρονική στιγμή το A θα μπορεί να πάρει τη μια από δυο μόνο τιμές (ανάλογα φυσικά με την τιμή που θα έχει τη στιγμή t_{n-1}). Η ποιότητα της πληροφορίας σχετικά με την μελλοντική τιμή του αξιογράφου A είναι ίδια με αυτή στο μοντέλο της μιας περιόδου μόνο όταν βρίσκομαι σε μια συγκεκριμένη κορυφή του δέντρου και κοιτάζω τι θα συμβεί την επόμενη χρονική στιγμή.

Έτσι η αγορά μας αποτελείται και πάλι από δύο στοιχεία, τα αξιόγραφα A και B, στα οποία οι επενδυτές μπορούν να συναλλαγούν μόνο τις χρονικές στιγμές $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Συγκεκριμένα τη χρονική στιγμή t_i (i≤n) οι επενδυτές έχουν τις εξής δυνατότητες συναλλαγών

Να αγοράσουν το αξιόγραφο A στην τιμή που θα ισχύει εκείνη τη στιγμή στην αγορά, καταβάλλοντας το αντίστοιχο ποσό στους πωλητές του αξιόγραφου

Να πουλήσουν το αξιόγραφο A εφόσον το είχαν αγοράσει σε προηγούμενη χρονική στιγμή, εισπράττοντας το αντίστοιχο ποσό από τους αγοραστές του αξιόγραφου.

Να πουλήσουν short το αξιόγραφο A (εφόσον δεν το είχαν αγοράσει σε προηγούμενη χρονική στιγμή) στην τιμή που θα ισχύει εκείνη τη στιγμή στην αγορά, εισπράττοντας το αντίστοιχο ποσό από τους αγοραστές του αξιόγραφου.
Να καταθέσουν χρήματα στην Τράπεζα για χρονικό διάστημα που να μην υπερβαίνει το χρόνο που απομένει έως τη λήξη, με επιτόκιο r.
Να δανεισθούν χρήματα από την Τράπεζα για για χρονικό διάστημα που να μην υπερβαίνει το χρόνο που απομένει έως τη λήξη, με επιτόκιο r.
Τη χρονική στιγμή t_n=T, οι επενδυτές πρέπει να κλείσουν όλες τις θέσεις που έχουν ανοικτές και να μείνουν μόνο με χρήματα τα οποία καταναλώνουν.

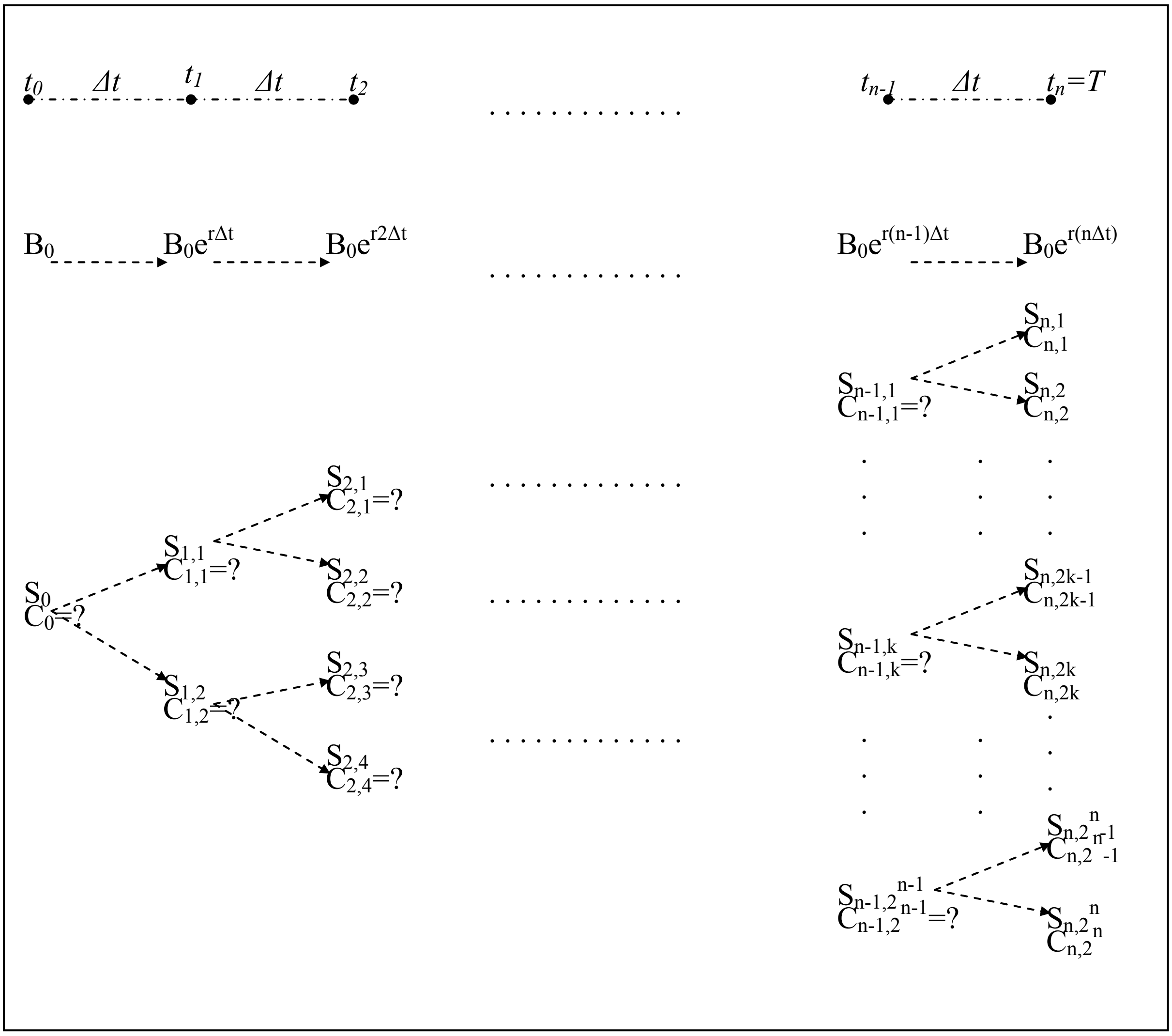
Προφανώς ισχύει και εδώ το ανάλογο της Παρατήρησης 1 που είδαμε στο μοντέλο της μιάς περιόδου.

4.2.1.1. Παρατήρηση
Για να μην υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage σε αυτή την αγορά θα πρέπει για όλα τα t=1,2,…,n και για όλα τα k=1,2,…,2^t να ισχύει ότι:
$S_{t,2k} < S_{t-1,k} \cdot e^{r \cdot \Delta t} < S_{t,2k-1}$
Απόδειξη
(άσκηση)

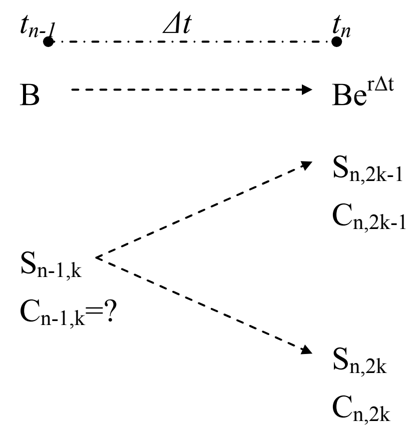
4.2.2. Το συμβόλαιο

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι υπάρχει ένα συμβόλαιο C η αξία του οποίου τη χρονική στιγμή t_n=T εξαρτάται από την αξία που θα έχει τότε το αξιόγραφο A. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι την T, η αξία του C θα είναι $C_{n,k}$ εάν η αξία του A είναι $S_{n,k}$. Αναρωτιόμαστε αν μπορούμε (με την προϋπόθεση ότι δεν πρέπει να δημιουργηθούν ευκαιρίες arbitrage) να προδιορίσουμε την αξία του συμβολαίου C σε όλες τις προηγούμενες χρονικές στιγμές και σε όλες τις καταστάσεις του κόσμου. Ιδιαίτερα, αναρωτιόμαστε *σε ποια τιμή C_0 θα πρέπει να αγοράζεται και να πουλιέται το συμβόλαιο τη χρονική στιγμή t_0 ώστε να μη δημιουργούνται ευκαιρίες arbitrage σε αυτήν την αγορά?*

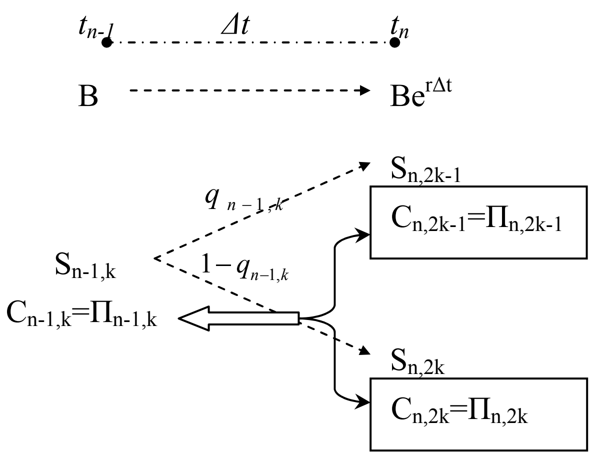
Διαγραμματικά:



Έχοντας ήδη αναπτύξει το διωνυμικό μοντέλο της μιας περιόδου δεν θα πρέπει να αντιμετωπίσουμε ιδιαίτερες δυσκολίες.
Θα εξετάσουμε το δέντρο μας από το τέλος προς την αρχή, αφού η πληροφορία σχετικά με το συμβόλαιο είναι μαζεμένη στη λήξη του συμβολαίου. Ας δούμε για παράδειγμα αν μπορούμε να προσδιορίσουμε την non arbitrage τιμή του συμβολαίου στις διάφορες καταστάσεις που ενδέχεται να συμβούν τη χρονική στιγμή t_{n-1}. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι βρισκόμαστε στην χρονική στιγμή t_{n-1} και η τιμή του A είναι $S_{n-1,k}$. Γνωρίζουμε ότι την επόμενη χρονική στιγμή δύο μόνο πράγματα μπορεί να συμβούν στην τιμή του A. Είτε η τιμή του θα ανέβει στο $S_{n,2k-1}$, είτε θα πέσει στο $S_{n,2k}$. Με άλλα λόγια αν βρεθώ στη χρονική στιγμή t_{n-1} και η τιμή του A είναι $S_{n-1,k}$ το μόνο που θα έχω να αντιμετωπίσω θα είναι ένα διωνυμικό μοντέλο μιάς περιόδου όπως φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα



Φυσικά, γνωρίζω πολύ καλά όχι μόνο πως να υπολογίσω την non arbitrage τιμή $C_{n-1,k}$ του συμβολαίου σε μια τέτοια κατάσταση αλλά και να εκμεταλλευθώ την κατάσταση εκτελώντας μια στρατηγική arbitrage στην περίπτωση που η τιμή που δίνεται για το συμβόλαιο στην αγορά διαφέρει από την θεωρητική του τιμή. Ιδιαίτερα μπορώ να υπολογίσω τις Arrow-Debreu πιθανότητες, αλλά και το ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο



$$q_{n-1,k} = \frac{S_{n-1,k} \cdot e^{r\Delta t} - S_{n,2k}}{S_{n,2k-1} - S_{n,2k}}$$

$$\phi_{n-1,k} = \frac{C_{n,2k-1} - C_{n,2k}}{S_{n,2k-1} - S_{n,2k}}$$

$$C_{n-1,k} = e^{-r\cdot\Delta t} \cdot [q \cdot C_{n,2k-1} + (1-q) \cdot C_{n,2k}]$$

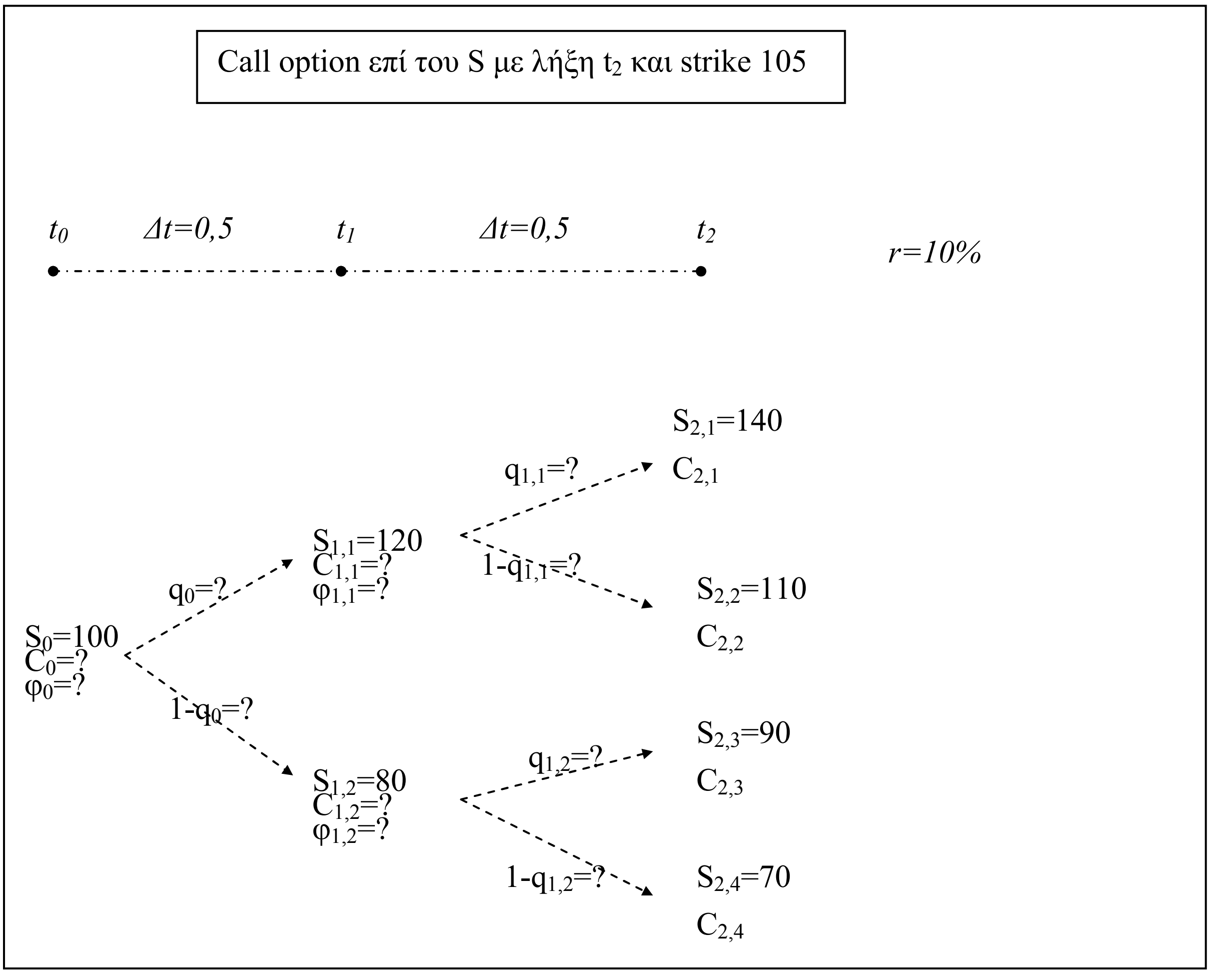
$$\Pi_{n-1,k} = \varphi_{n-1,k} S_{n-1,k} + \psi_{n-1,k}$$

$$\Pi_{n,2k-1} = \varphi_{n-1,k} S_{n,2k-1} + \psi_{n-1,k}\, e^{r\Delta t}$$

$$\Pi_{n,2k} = \varphi_{n-1,k} S_{n,2k} + \psi_{n-1,k}\, e^{r\Delta t}$$

Έτσι τη χρονική στιγμή t_{n-1}, και σε κάθε κορυφή του δέντρου που αντιστοιχεί σε αυτή τη χρονική στιγμή, μπορώ να υπολογίσω την τιμή που θα πρέπει υποχρεωτικά να λάβει το συμβόλαιο C ώστε να μην παρουσιασθούν ευκαιρίες arbitrage. Έχοντας τώρα την αξία του συμβολαίου C για τη χρονική στιγμή t_{n-1}, μπορώ να ακολουθήσω την ανάλογη διαδικασία και να υπολογίσω την non arbitrage αξία του συμβολαίου για τη χρονική στιγμή t_{n-2} και να συνεχίσω με τον ίδιο τρόπο μέχρι να υπολογίσω το C_0. Ας δούμε όμως ένα ολοκληρωμένο παράδειγμα:

4.2.2.1. Παράδειγμα



Το call option με λήξη T και με strike K έχει αξία στη λήξη που δίνεται από τη σχέση $C_T = \max(S_T - K, 0)$ Άρα στο παράδειγμα μας:

$C_{2,1} = \max(140 - 105, 0) = 35$

$C_{2,2} = \max(110 - 105, 0) = 5$

$C_{2,3} = \max(90 - 105, 0) = 0$

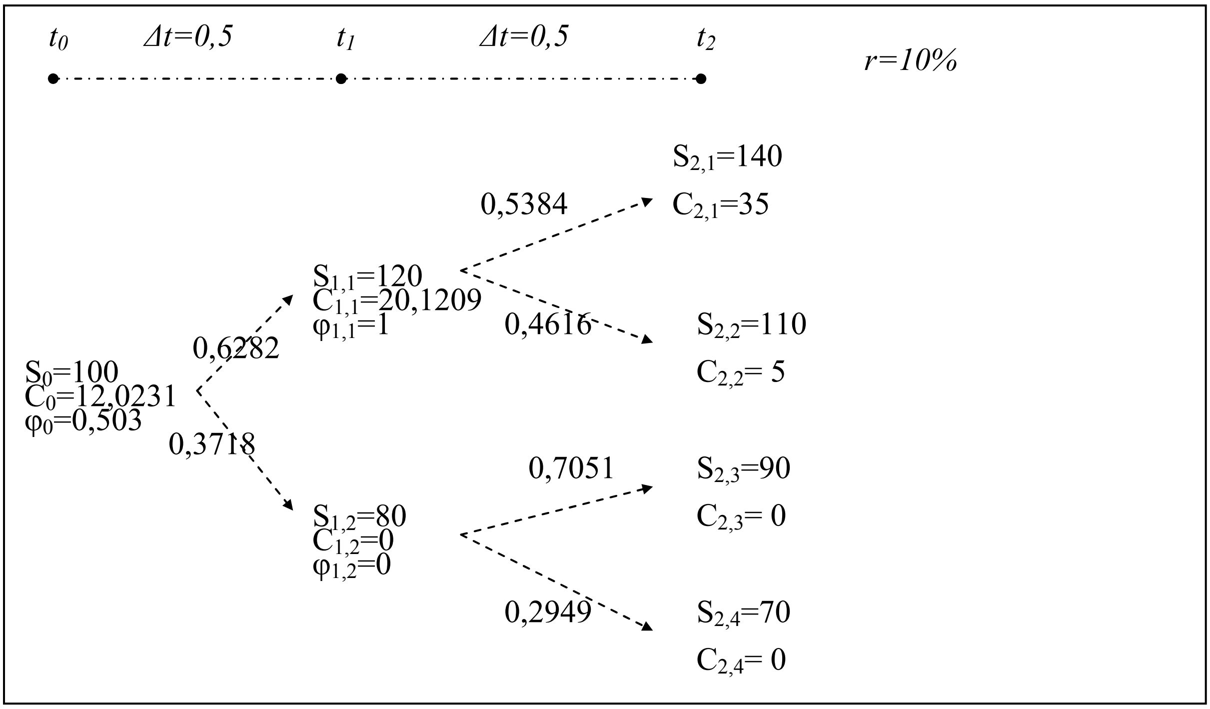
$C_{2,4} = \max(70 - 105, 0) = 0$

Οι Arrow-Debreu πιθανότητα ανόδου στο δυωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου δίνεται από τη σχέση $q = \dfrac{S_0 \cdot e^{r\Delta t} - S_u}{S_u - S_d}$. Άρα στο δικό μας παράδειγμα υπολογίζουμε:

$$q_0 = \frac{100 \cdot e^{\frac{10}{100} \cdot 0,5} - 80}{120 - 80} = 0,6282$$
$$1 - q_0 = 0,3718$$
$$q_{1,1} = \frac{120 \cdot e^{\frac{10}{100} \cdot 0,5} - 110}{140 - 110} = 0,5384$$
$$1 - q_{1,1} = 0,4616$$
$$q_{1,2} = \frac{120 \cdot e^{\frac{10}{100} \cdot 0,5} - 110}{140 - 110} = 0,7051$$
$$1 - q_{1,2} = 0,2949$$

Η non-arbitrage τιμή του call option στο διωνυμικό μοντέλο μιάς περιόδου δίνεται από τη σχέση $C = e^{-r \cdot \Delta t} \cdot [q \cdot C_u + (1-q) \cdot C_d]$. Άρα στο δικό μας παράδειγμα υπολογίζουμε:
$$C_{1,1} = e^{-\frac{10}{100} \cdot 0,5} \cdot [0,5384 \cdot 35 + 0,4616 \cdot 5] = 20,1209$$
$$C_{1,2} = e^{-\frac{10}{100} \cdot 0,5} \cdot [0,7051 \cdot 0 + 0,2949 \cdot 0] = 0$$
Και στη συνέχεια
$$C_0 = e^{-\frac{10}{100} \cdot 0,5} \cdot [0,6282 \cdot 20,1209 + 0,3718 \cdot 0] = 12,0231$$

Η θέση σε μετοχές στο ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο, στο διωνυμικό μοντέλο μιάς περιόδου δίνεται από τη σχέση $\phi = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$. Άρα στο δικό μας παράδειγμα υπολογίζουμε:
$$\phi_{1,1} = \frac{35 - 5}{140 - 110} = 1$$
$$\phi_{1,2} = \frac{0 - 0}{90 - 70} = 0$$
$$\phi_0 = \frac{20,1209 - 0}{120 - 80} = 0,503$$



Ένας επενδυτής που πουλάει αυτό το call option τη χρονική στιγμή t_0 στην τιμή C_0=12,0231 (και εισπράττει αυτό το ποσό) διατρέχει τον κίνδυνο τη χρονική στιγμή t_2 να πρέπει να πληρώσει 35 στον κάτοχο του call option και άρα να υποστεί ζημία 35-12,0231. Εχοντας όμως υπολογίσει το ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο σε κάθε κορυφή του δέντρου, ο επενδυτής μπορεί να ακολουθήσει την εξής στρατηγική προκειμένου να αντισταθμίσει τον κίνδυνο.

Αφού πούλησε το call option θα αγοράσει το ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο. Έτσι την t_0 αγοράζει 0,503 μετοχές και ξοδεύει 0,503*100=50,3. Από την πώληση του call option έχει εισπράξει 12,0231 οπότε του χρειάζονται άλλα 50,3-12,0231=38,2769 τα οποία δανείζεται από την Τράπεζα.

Τα μονοπάτια που μπορεί να ακολουθήσει η τιμή της μετοχής είναι τα εξής:

(i)	100	120	140
(ii)	100	120	110
(iii)	100	80	90
(iv)	100	80	70

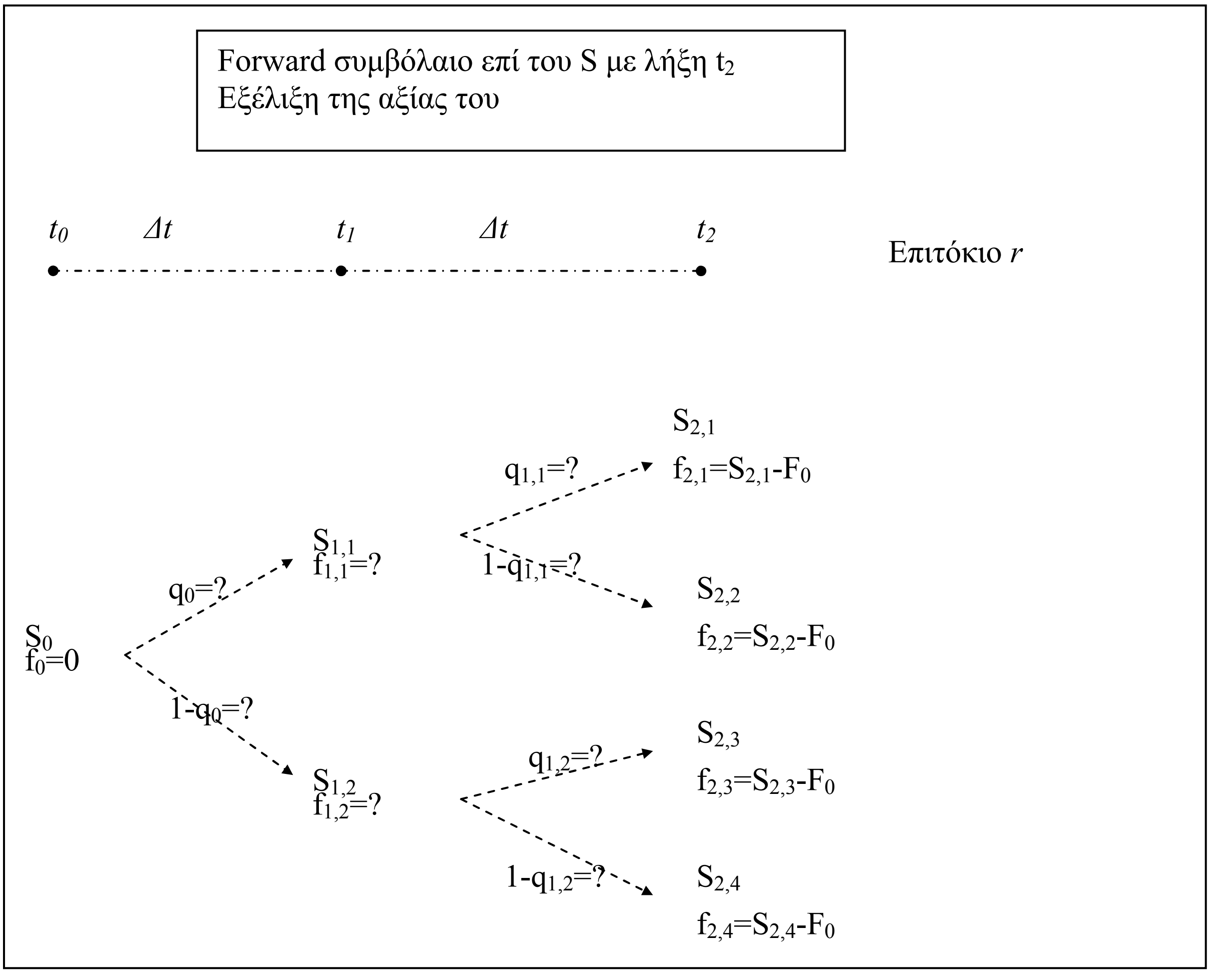
Θα τα εξετάσουμε ξεχωριστά.

(i) Την t_1 η μετοχή έχει πάει στο 120. Κοιτάζει ο επενδυτής την ποσότητα μετοχών που πρέπει να έχει για να είναι καλυμμένος σε μια τέτοια περίπτωση και διαπιστώνει ότι χρειάζεται 1 μετοχή ενώ έχει μόνο 0,503 μετοχή. Αγοράζει λοιπόν 1-0,503=0,497 μετοχή από την αγορά ξοδεύοντας 0,497*120=59,64 τα οποία δανείζεται από την Τράπεζα. Έτσι τώρα ο επενδυτής έχει μια short θέση στο call option, μία μετοχή στα χέρια του και ένα χρέος στην Τράπεζα ύψους $38{,}2769 \cdot e^{10\%*0,5}+59{,}64$. Την επόμενη χρονική στιγμή η μετοχή θα βρεθεί στο 140. Ο επενδυτής θα χρωστάει 35 από τη short θέση στο call option και

$38{,}2769 \cdot e^{10\%*2*0,5}+59{,}64 \cdot e^{10\%*0,5}$=105 στην Τράπεζα, δηλαδή σύνολο 140, τα οποία θα ξεπληρώσει πουλώντας τη μετοχή που έχει. Άρα ούτε γάτα ούτε ζημιά σε αυτή την περίπτωση

(ii) Την t_1 η μετοχή έχει πάει στο 120. Κοιτάζει ο επενδυτής την ποσότητα μετοχών που πρέπει να έχει για να είναι καλυμμένος σε μια τέτοια περίπτωση και διαπιστώνει ότι χρειάζεται 1 μετοχή ενώ έχει μόνο 0,503 μετοχή. Αγοράζει λοιπόν 1-0,503=0,497 μετοχή από την αγορά ξοδεύοντας 0,497*120=59,64 τα οποία δανείζεται από την Τράπεζα. Έτσι τώρα ο επενδυτής έχει μια short θέση στο call option, μία μετοχή στα χέρια του και ένα χρέος στην Τράπεζα ύψους $38{,}2769 \cdot e^{10\% \cdot 0{,}5} + 59{,}64$. Την επόμενη χρονική στιγμή η μετοχή θα βρεθεί στο 110. Ο επενδυτής θα χρωστάει 5 από τη short θέση στο call option και
$38{,}2769 \cdot e^{10\% \cdot 2 \cdot 0{,}5} + 59{,}64 \cdot e^{10\% \cdot 0{,}5} = 105$ στην Τράπεζα, δηλαδή σύνολο 110, τα οποία θα ξεπληρώσει πουλώντας τη μετοχή που έχει. Άρα ούτε γάτα ούτε ζημιά σε αυτή την περίπτωση
(iii) Την t_1 η μετοχή έχει πάει στο 80. Κοιτάζει ο επενδυτής την ποσότητα μετοχών που πρέπει να έχει για να είναι καλυμμένος σε μια τέτοια περίπτωση και διαπιστώνει ότι δεν πρέπει να έχει καμία μετοχή. Πουλάει στην αγορά την 0,503 μετοχή που είχε και εισπράττει 0,503*80=40,24 από τα οποία ξεπληρώνει το χρέος του προς την Τράπεζα το οποίο τώρα είχε ανέλθει στο $38{,}2769 \cdot e^{10\% \cdot 0{,}5} = 40{,}24$. Έτσι τώρα ο επενδυτής έχει μόνο μια short θέση στο call option. Την επόμενη χρονική στιγμή η μετοχή θα βρεθεί στο 90. Το call δεν θα έχει καμμία αξία, άρα ούτε γάτα ούτε ζημιά σε αυτή την περίπτωση.
(iv) Την t_1 η μετοχή έχει πάει στο 80. Κοιτάζει ο επενδυτής την ποσότητα μετοχών που πρέπει να έχει για να είναι καλυμμένος σε μια τέτοια περίπτωση και διαπιστώνει ότι δεν πρέπει να έχει καμία μετοχή. Πουλάει στην αγορά την 0,503 μετοχή που είχε και εισπράττει 0,503*80=40,24 από τα οποία ξεπληρώνει το χρέος του προς την Τράπεζα το οποίο τώρα είχε ανέλθει στο $38{,}2769 \cdot e^{10\% \cdot 0{,}5} = 40{,}24$. Έτσι τώρα ο επενδυτής έχει μόνο μια short θέση στο call option. Την επόμενη χρονική στιγμή η μετοχή θα βρεθεί στο 70. Το call δεν θα έχει καμμία αξία, άρα ούτε γάτα ούτε ζημιά σε αυτή την περίπτωση.
Άρα, ότι μονοπάτι και να ακολουθήσει η μετοχή ο επενδυτής δεν θα διατρέξει κανένα κίνδυνο ζημίας.

4.2.2.2. Παράδειγμα



Με $f_{i,j}$ συμβολίζουμε την αξία που έχει, τη χρονική στιγμή i και όταν η τιμή της μετοχής είναι $S_{i,j}$, ένα forward συμβόλαιο επί της μετοχής S που συμφωνείται την χρονική στιγμή t_0 και ωριμάζει τη χρονική στιγμή t_2.

Οι Arrow-Debreu πιθανότητες υπολογίζονται από:

$$q_0 = \frac{S_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t} - S_{1,2}}{S_{1,1} - S_{1,2}}$$

$$1 - q_0 = \frac{S_{1,1} - S_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t}}{S_{1,1} - S_{1,2}}$$

$$q_{1,1} = \frac{S_{1,1} \cdot e^{r \cdot \Delta t} - S_{2,2}}{S_{2,1} - S_{2,2}}$$

$$1 - q_{1,1} = \frac{S_{2,1} - S_{1,1} \cdot e^{r \cdot \Delta t}}{S_{2,1} - S_{2,2}}$$

$$q_{1,2} = \frac{S_{1,2} \cdot e^{r \cdot \Delta t} - S_{2,4}}{S_{2,3} - S_{2,4}}$$

$$1 - q_{1,2} = \frac{S_{2,3} - S_{1,2} \cdot e^{r \cdot \Delta t}}{S_{2,3} - S_{2,4}}$$

Τότε

Η non-arbitrage τιμή του call option στο διωνυμικό μοντέλο μιάς περιόδου δίνεται από τη σχέση $C = e^{-r\cdot\Delta t}\cdot[q\cdot C_u + (1-q)\cdot C_d]$. Άρα στο δικό μας παράδειγμα υπολογίζουμε:

$$f_{1,1} = e^{-r\cdot\Delta t}\cdot[q_{1,1}\cdot f_{2,1} + (1-q_{1,1})\cdot f_{2,2}] \Rightarrow$$

$$f_{1,1} = e^{-r\cdot\Delta t}\cdot[q_{1,1}\cdot(S_{2,1}-F_0) + (1-q_{1,1})\cdot(S_{2,2}-F_0)] \Rightarrow$$

$$f_{1,1} = e^{-r\cdot\Delta t}\cdot[q_{1,1}\cdot S_{2,1} + (1-q_{1,1})\cdot S_{2,2} - F_0] \Rightarrow$$

$$f_{1,1} = e^{-r\cdot\Delta t}\cdot[S_{1,1}\cdot e^{r\cdot\Delta t} - F_0] \Rightarrow$$

$$f_{1,1} = S_{1,1} - e^{-r\cdot\Delta t}\cdot F_0$$

Παρόμοια

$$f_{1,2} = S_{1,2} - e^{-r\cdot\Delta t}\cdot F_0$$

(Και επομένως

$$0 = f_0 = e^{-r\cdot\Delta t}\cdot[q_0\cdot f_{1,1} + (1-q_0)\cdot f_{1,2}] \Rightarrow$$

$$0 = e^{-r\cdot\Delta t}\cdot[q_0\cdot(S_{1,1} - e^{-r\cdot\Delta t}\cdot F_0) + (1-q_0)\cdot(S_{1,2} - e^{-r\cdot\Delta t}\cdot F_0)] \Rightarrow$$

$$0 = e^{-r\cdot\Delta t}\cdot[q_0\cdot S_{1,1} + (1-q_0)\cdot S_{1,2} - e^{-r\cdot\Delta t}\cdot F_0] \Rightarrow$$

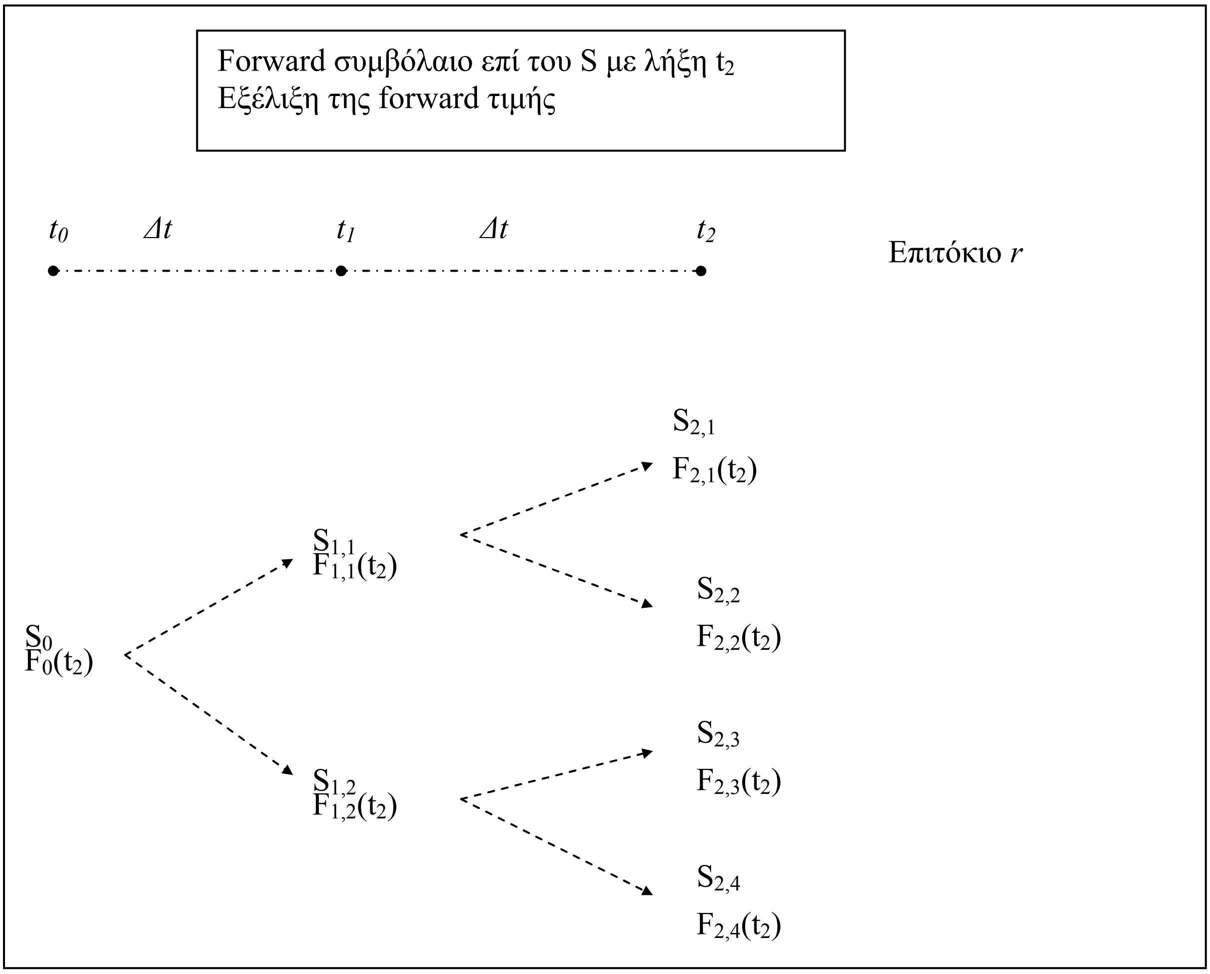
$$0 = e^{-r\cdot\Delta t}\cdot[S_0\cdot e^{r\cdot\Delta t} - e^{-r\cdot\Delta t}\cdot F_0] \Rightarrow$$

$$0 = S_0 - e^{-r\cdot 2\cdot\Delta t}\cdot F_0 \Rightarrow$$

$$F_0 = S_0\cdot e^{r\cdot 2\cdot\Delta t}$$

όπως αναμενόταν)

4.2.2.2. Παράδειγμα (συνέχεια του προηγούμενου)



Με $F_{i,j}(t_2)$ συμβολίζουμε την forward τιμή ενός forward συμβολαίου επί της μετοχής S που συμφωνείται την χρονική στιγμή i όταν η τιμή της μετοχής είναι $S_{i,j}$ και ωριμάζει τη χρονική στιγμή t_2.

Προφανώς

$$F_0(t_2) = S_0 \cdot e^{r \cdot 2 \cdot \Delta t}$$

$$F_{1,1}(t_2) = S_{1,1} \cdot e^{r \cdot \Delta t}$$

$$F_{1,2}(t_2) = S_{1,2} \cdot e^{r \cdot \Delta t}$$

$$F_{2,1}(t_2) = S_{2,1} \cdot e^{r \cdot 0 \cdot \Delta t} = S_{2,1}$$

$$F_{2,2}(t_2) = S_{2,2} \cdot e^{r \cdot 0 \cdot \Delta t} = S_{2,2}$$

$$F_{2,3}(t_2) = S_{2,3} \cdot e^{r \cdot 0 \cdot \Delta t} = S_{2,3}$$

$$F_{2,4}(t_2) = S_{2,4} \cdot e^{r \cdot 0 \cdot \Delta t} = S_{2,4}$$

Παρατηρείστε ότι (όπως αναμενόταν) η εξέλιξη των προθεσμιακών τιμών είναι συνεπής με τη διαδικασία της risk neutral τιμολόγησης.

4.3. Συνοψίζοντας

1) Θεωρήσαμε ένα μοντέλο αγοράς διακριτού χρόνου που αποτελείται από δύο στοιχεία, ένα αβέβαιο τίτλο Α («μετοχή») και ένα βέβαιο τίτλο Β («τραπεζικός λογαριασμός με επιτόκιο r») και πολλές χρονικές περιόδους.
2) Υποθέσαμε ότι για κάθε μελλοντική χρονική στιγμή γνωρίζουμε όλες τις πιθανές τιμές αυτών των τίτλων (χωρίς όμως να γνωρίζουμε ποια από αυτές τις πιθανές τιμές θα πραγματοποιηθεί)
3) Υποθέσαμε τις διαδρομές από τις οποίες μπορεί να οδηγηθεί ο αβέβαιος τίτλος σε καθεμιά από αυτές τις τιμές ξεκινώντας από κάποια προηγούμενη (διωνυμικό δέντρο)
4) Υποθέσαμε ότι οι επενδυτές μπορούν να κάνουν συναλλαγές σε αυτές τις τιμές χωρίς να τις επηρεάζουν.
5) Υποθέσαμε ότι δεν δημιουργούνται ευκαιρίες arbitrage

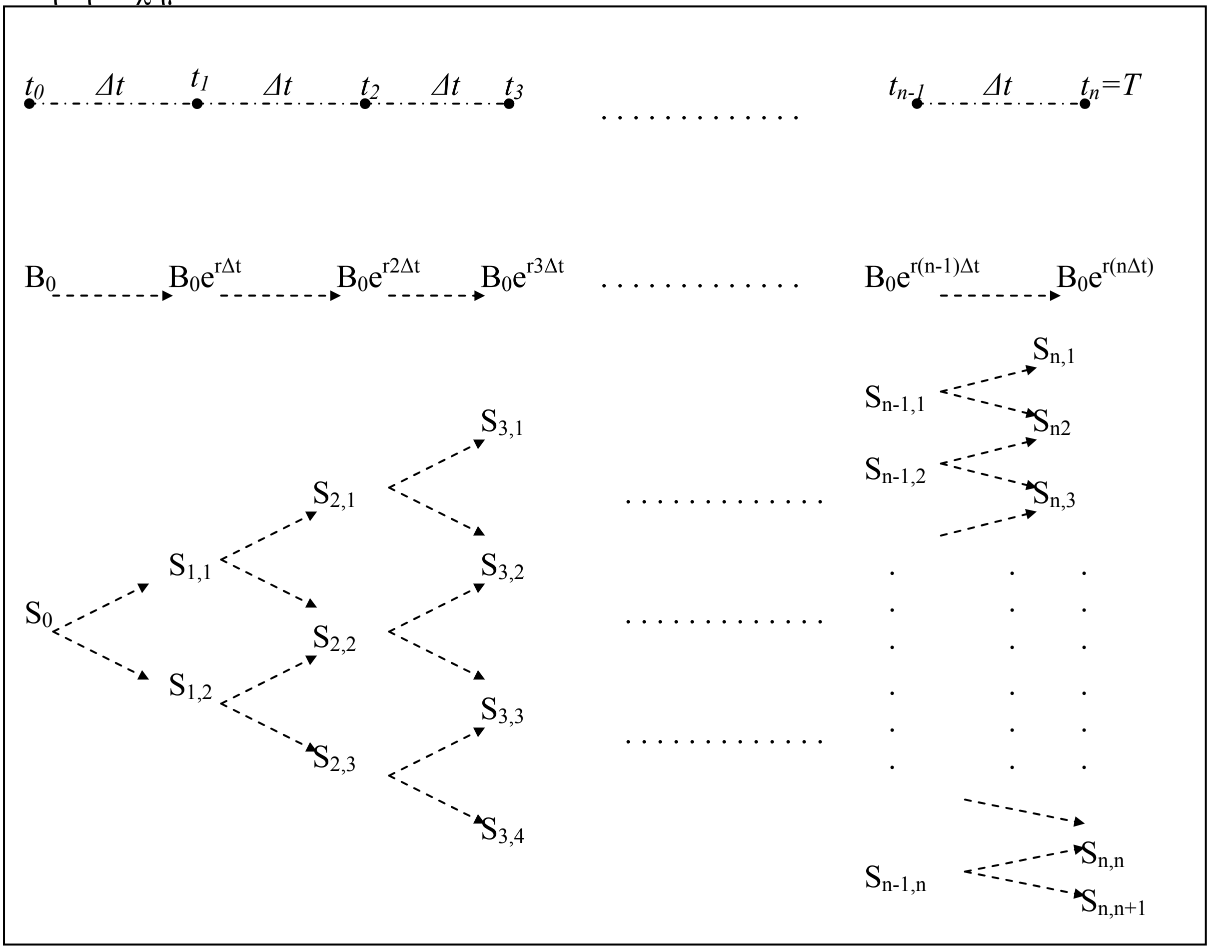
- Συμπεράναμε ότι κάθε παράγωγο συμβόλαιο το οποίο καθορίζεται πλήρως από την απαίτηση (που έχει ο κάτοχος του) στη λήξη του συμβολαίου πρέπει να έχει συγκεκριμένη μοναδική αξία σε κάθε κορυφή του δέντρου. Δηλαδή είδαμε ότι, με τις υποθέσεις που κάναμε, η αξία του παραγώγου πρέπει να εξελίσσεται με μοναδικό τρόπο πάνω στο δέντρο και αποκαλύψαμε αυτή την εξέλιξη της αξίας του παραγώγου.

- Ιδιαίτερα, είδαμε ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανοτήτων (risk neutral πιθανότητες) που εξαρτάται μόνο από το σύστημα τιμών της αγοράς (δηλαδή από το αξιόγραφο Α και το επιτόκιο r) και μας επιτρέπει να υπολογίζουμε την αξία κάθε τέτοιου παραγώγου (σε οποιοδήποτε σημείο του δέντρου) ως την παρούσα αξία της αναμενόμενης (κάτω από αυτό το risk neutral μέτρο) τελικής του αξίας. Επίσης παρατηρήσαμε (από τον τύπο που βγάλαμε για τις risk neutral πιθανότητες), ότι σε δοθέν σύστημα τιμών οι risk neutral πιθανότητες δεν εξαρτώνται απλά από τις δοθείσες τιμές αλλά από τις σχετικές αποστάσεις μεταξύ τους, λαμβανομένης υπόψη και της χρονικής αξίας του χρήματος,

- Επίσης είδαμε ότι το παράγωγο συμβόλαιο είναι ισοδύναμο με ένα δυναμικά αναπροσαρμοζόμενο («αυτοχρηματοδοτούμενο» και «προβλέψιμο») χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από (μεταβαλλόμενες κάθε στιγμή) θέσεις φ και ψ στα στοιχεία Α και Β αντίστοιχα (δηλαδή στα διαπραγματεύσιμα στοιχεία της αγοράς). Ιδιαίτερα προσδιορίσαμε την διαδικασία εξέλιξης της θέσης φ στον αβέβαιο τίτλο Α και της θέσης ψ στον τραπεζικό λογαριασμό Β.
  (Έτσι ένας επενδυτής που πουλάει (αντίστοιχα αγοράζει) το παράγωγο συμβόλαιο στην non arbitrage τιμή του και θέλει να αντισταθμίσει τον κίνδυνο αυτής της συναλλαγής, θα αγοράσει (αντίστοιχα πουλήσει) το ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο και θα το αναπροσαρμόζει συνεχώς σύμφωνα με τα εκάστοτε φ και ψ που ισχύουν. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι *κάθε χρονική στιγμή* ο επενδυτής *έχει τη δυνατότητα να προσδιορίσει* τις ποσότητες φ και ψ (από τα Α και Β αντίστοιχα) που χρειάζεται να έχει το ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο, ώστε *την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή* το χαρτοφυλάκιο αυτό να έχει πάντα την ίδια αξία με το παράγωγο)

4.4. Αναδιπλούμενα δέντρα εξέλιξης των τιμών

Συνήθως είναι βολικότερο να δουλεύουμε με αναδιπλούμενα δέντρα προκειμένου να περιγράψουμε την εξέλιξη της τιμής του αβέβαιου τίτλου. Η μόνη διαφορά που έχουν από τα δέντρα που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους είναι ότι μια ανοδική κίνηση ακολουθούμενη από μια καθοδική κίνηση της τιμής του Α, καταλήγει στο ίδιο σημείο που καταλήγει μια καθοδική κίνηση ακολουθούμενη από μια ανοδική κίνηση. Σχηματικά



Ας τυποποιήσουμε τώρα το διωνυμικό μοντέλο κάτω από αυτό το πρίσμα με κάπως πιο ειδικό τρόπο

Ας θεωρήσουμε ένα χρονικό διάστημα $[0,\mathrm{T}]$ εντός του οποίου θέλουμε να αναπαραστήσουμε την εξέλιξη των τιμών στην αγορά.

Χωρίζουμε το διάστημα $[0,\mathrm{T}]$ σε n ίσες περιόδους χρονικής διάρκειας $\Delta t = \frac{\mathrm{T}}{n}$ η κάθε μια. Έτσι έχουμε τις χρονικές στιγμές $t_0 = 0,\ t_1 = \Delta t,\ t_2 = 2\Delta t, \ldots,\ t_n = n\Delta t = \mathrm{T}$

Έστω ότι την t_0 η τιμή του αξιόγραφου Α είναι $S(t_0) = S_0$

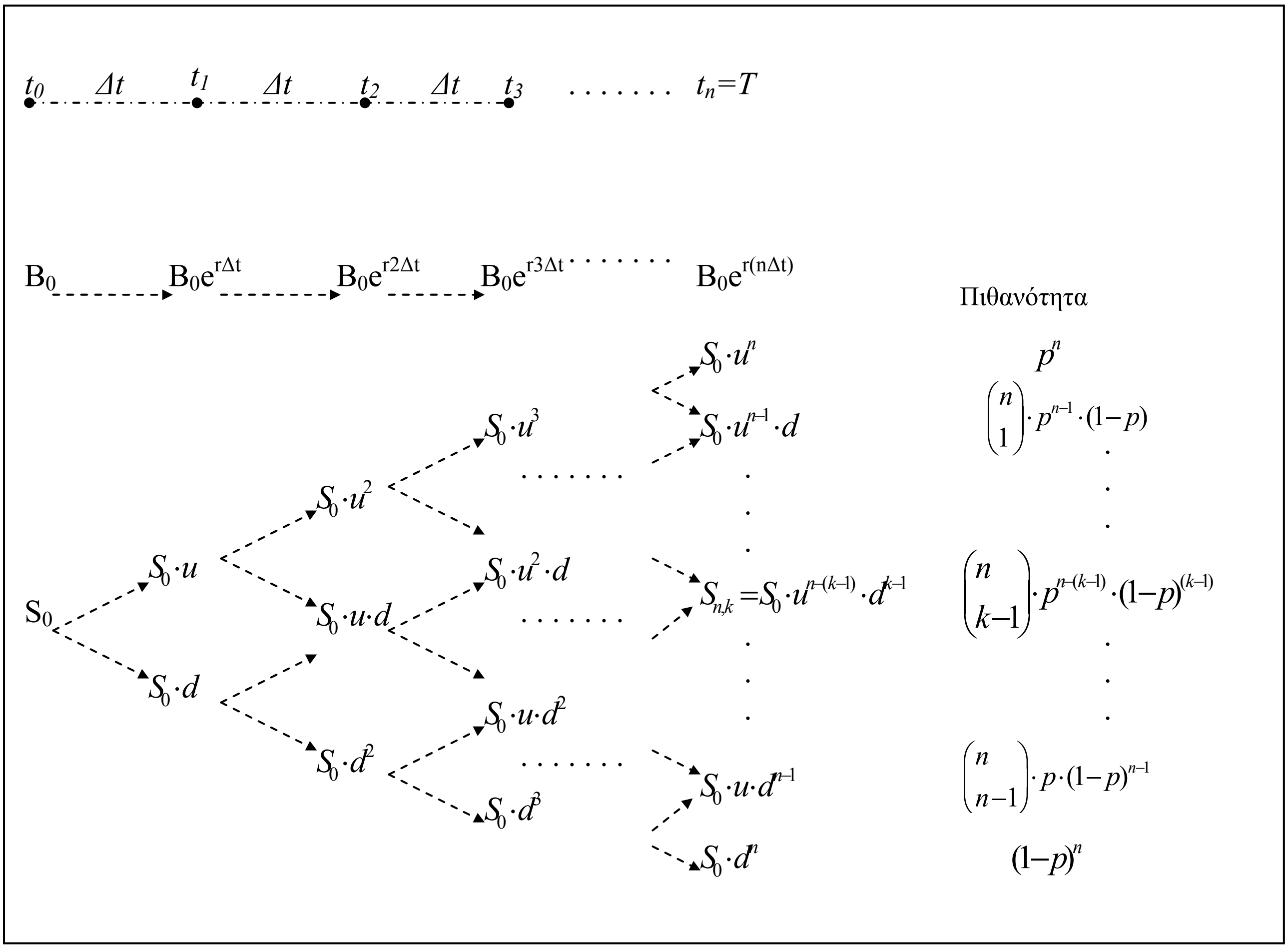
Έστω επίσης ότι αν τη στιγμή t_k η τιμή του αξιόγραφου είναι $S(t_k)$ τότε την επόμενη χρονική στιγμή t_{k+1} η τιμή του αξιόγραφου θα είναι

$$S(t_{k+1}) = \begin{cases} S(t_k)\cdot u & \text{με πιθανότητα } p \\ S(t_k)\cdot d & \text{με πιθανότητα } (1-p) \end{cases}$$

για κάποια σταθερά u και d.

Αναφορικά με το συμβολισμό του προηγούμενου διαγράμματος θα έχουμε ότι $S_{\kappa,\lambda} = S_0 \cdot u^{\kappa-(\lambda-1)} \cdot d^{\lambda-1}$

Ας το δούμε αυτό στο επόμενο διάγραμμα n περιόδων. Παρατηρείστε ότι τη χρονική στιγμή t_n το αξιόγραφο Α ενδέχεται να λάβει $n+1$ τιμές. Σημειώνουμε δίπλα σε κάθε μια από αυτές τις τιμές ποια είναι η πιθανότητα να παραγματοποιηθεί (προσοχή: η πιθανότητα p στην οποία αναφερόμαστε εδώ δεν έχει σχέση με τις risk neutral πιθανότητες. Εδώ προσπαθούμε να μοντελάρουμε την «πραγματική εξέλιξη» της τιμής του Α). Είναι προφανές ότι διαφορετικές επιλογές των u και d θα δώσουν διαφορετικά μοντέλα για την εξέλιξη της τιμής του Α. Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πως μπορούμε να καθορίζουμε τα u και d έτσι ώστε η εξέλιξη των τιμών του αβέβαιου τίτλου Α να προσομοιάζει στην «πραγματικότητα».



Παρατηρείστε τώρα ότι σε αυτή τη θεώρηση, οποιαδήποτε χρονική στιγμή t και σε οποιαδήποτε κορυφή του δέντρου, η risk neutral πιθανότητα είναι

$$q = \frac{S_t \cdot e^{r\cdot\Delta t} - S_t\cdot d}{S_t\cdot u - S_t \cdot d} = \frac{e^{r\cdot\Delta t}-d}{u-d}.$$

Έτσι, αν θέλω τώρα να υπολογίσω την t_0 - non arbitrage τιμή C_0 ενός (ευρωπαϊκού τυου) παραγώγου που η αξία του στη λήξη t_n λαμβάνει τις τιμές $C_{n,1}$, $C_{n,2}, ..., C_{n,n+1}$, μπορώ να το κάνω άμεσα, δηλαδή

$$C_0 = e^{-r\cdot T} \cdot \left[q^n \cdot C_{n,1} + \binom{n}{1} q^{(n-1)} \cdot (1-q) \cdot C_{n,2} + ... + \binom{n}{n-1} q \cdot (1-q)^{(n-1)} \cdot C_{n,n} + (1-q)^n \cdot C_{n,n+1} \right]$$

Δηλαδή

$$C_0 = e^{-r\cdot T} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot q^{(n-k)} \cdot (1-q)^k C_{n,k+1} = e^{-r\cdot T} \cdot \mathrm{E}_Q[C_n]$$

όπου $q = \dfrac{e^{r\cdot\Delta t} - d}{u - d}$

4.5. Η δυναμική της εξέλιξης της τιμής του αβέβαιου τίτλου

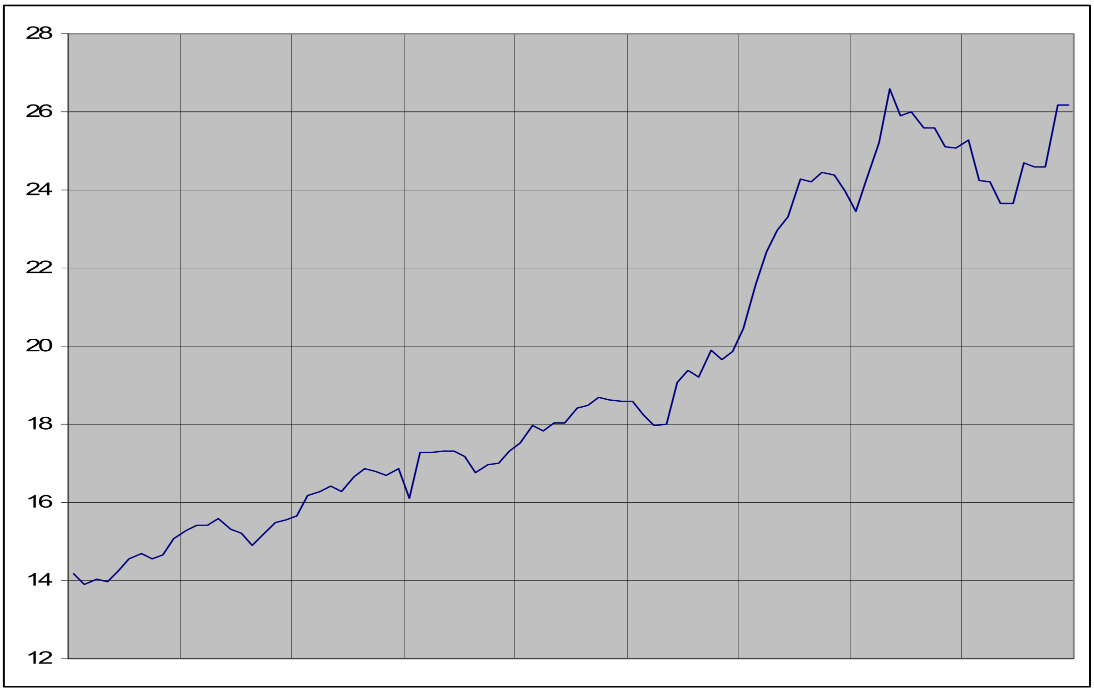
4.5.1. Η λογαριθμοκανονική κατανομή των τιμών του αβέβαιου τίτλου.

Μέχρι στιγμής έχουμε υποθέσει σχετικά αυθαίρετη εξέλιξη της τιμής του αβέβαιου τίτλου Α.

Υπογραμμίζουμε εδώ τον αποφασιστικό ρόλο που δείχνει να παίζει η πιθανή εξέλιξη των τιμών του Α, *που εμείς υποθέσαμε* στο μοντέλο μας,για τον προσδιορισμό των risk neutral πιθανοτήτων όπως επίσης και για τον προσδιορισμό του ισοδύναμου χαρτοφυλακίου και άρα για τον προσδιορισμό της non arbitrage τιμής του παραγώγου. Εάν αυτή η υπόθεση για την πιθανή εξέλιξη των τιμών του Α είναι σωστή τότε η non arbitrage τιμή του παραγώγου που εξάγουμε είναι σωστή, το ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο είναι σωστά υπολογισμένο και η διαδικασία αντιστάθμισης θα λειτουργήσει με ασφάλεια.

Επομένως, καλό θα είναι να σκεφτούμε λίγο περισσότερο πάνω σε αυτή την υπόθεση και στον τρόπο που μπορούμε να παράγουμε την εξέλιξη των τιμών του αβέβαιο τίτλου Α, έτσι ώστε να αισθανόμαστε ότι προσεγγίζει κάπως πιο πειστικά την πραγματικότητα.

Η λογαριθμοκανονική κατανομή των τιμών των μετοχών είναι το κλασσικό μοντέλο που χρησιμοποιείται στα χρηματοοικονομικά οικονομικά. Ας προσπαθήσουμε να δούμε γιατί μοιάζει αρκετά ικανοποιητικό ένα τέτοιο μοντέλο. Στο επόμενο γράφημα βλέπουμε την εξέλιξη της τιμής μιας μετοχής ανά ημέρα για κάποιο χρονικό διάστημα.



Η μελλοντική τιμή μιάς μετοχής είναι αβέβαιη και πολύ δύσκολο να προβλεφθεί.

Για λόγους παρουσίασης έχουμε χωρίσει το χρονικό διάστημα [0,T] σε n ίσες περιόδους διάρκειας Δt η κάθε μια. Θα επιχειρήσουμε να αντιληφθούμε τη διαδικασία εξέλιξης της τιμής της μετοχής σε ολόκληρο το διάστημα [0,T], προσπαθώντας να κατανοήσουμε τη διαδικασία εξέλιξης της τιμής σε κάθε επιμέρους περίοδο.

Ας συμβολίσουμε με S_t την τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t. Θα αναλύσουμε τώρα την (λογαριθμική) απόδοση της μετοχής σε κάθε περίοδο. Προφανώς $S_{t_k} = S_{t_{k-1}} \cdot \left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \right)$. Έστω R_{t_k} η λογαριθμική απόδοση της μετοχής στη χρονική περίοδο $[t_{k-1}, t_k]$[2]. Από τον ορισμό του R_{t_k} θα έχουμε ότι $S_{t_k} = S_{t_{k-1}} \cdot \exp(R_{t_k})$

Προφανώς $S_T = S_0 \cdot \exp[R_{t_1} + R_{t_2} + ... + R_{t_n}]$

Έστω $R(T) = \ln\left(\frac{S_T}{S_0} \right)$ η λογαριθμική απόδοση της μετοχής για την περίοδο [0,T].

Προφανώς $R(T) = R_{t_1} + R_{t_2} + ... + R_{t_n}$

Θα κάνουμε τώρα τέσσερις «εύλογες» υποθέσεις για τις κατανομές των αποδόσεων των τιμών της μετοχής

Υ1: Οι αποδόσεις R_{t_i} είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές

Σημαίνει ότι η απόδοση σε μια περίοδο [t_{k-1}, t_k] δεν μπορεί να χρησιμεύσει για την πρόβλεψη της απόδοσης την επόμενη χρονική περίοδο

Υ2: Οι αποδόσεις R_{t_i} είναι ισόνομα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές

Σημαίνει ότι η απόδοση σε μια περίοδο [t_{k-1}, t_k] δεν εξαρτάται από την τιμή που είχε η μετοχή τη χρονική στιγμή t_{k-1}.

Οι υποθέσεις Υ1 και Υ2 σημαίνουν ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί ένα <u>τυχαίο περίπατο</u> και συσχετίζονται με την «υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών»[3]

Υ3: $E\left[R_{t_i} \right] = \mu \cdot \Delta t$, όπου μ είναι η αναμενόμενη (λογαριθμική) ετήσια απόδοση της μετοχής και η οποία είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος του Δt.

Σημαίνει ότι η αναμενόμενη απόδοση σε μια περίοδο [t_{k-1}, t_k]ισούται με μια σταθερά μ επί τη χρονική διάρκεια της περιόδου. Δηλαδή είναι ανάλογη της διάρκειας της χρονικής περιόδου.

Υ4: $Var\left[R_{t_i} \right] = \sigma^2 \cdot \Delta t$, όπου σ^2 η διακύμανση της (λογαριθμικής) ετήσιας απόδοσης της μετοχής και η οποία είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος του Δt.

Σημαίνει ότι η διακύμανση της απόδοσης σε μια περίοδο [t_{k-1}, t_k]ισούται με μια σταθερά σ^2 επί τη χρονική διάρκεια της περιόδου. Δηλαδή είναι ανάλογη της διάρκειας της χρονικής περιόδου

Με τις παραπάνω υποθέσεις η διακύμανση της (λογαριθμικής) απόδοσης της μετοχής για το χρονικό διάστημα [0,T] είναι:

---

[2] Εξ ορισμού έχουμε $R_{t_k} = \ln\left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \right)$.

[3] Fama, E., 1970, "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", Journal of Finance, **25**, 383-417

Fama, E., 1991, "Efficient Capital Markets: II ", Journal of Finance, **46**, 1575-1617

$$
\begin{aligned}
Var\left[R(\mathrm{T})\right] &= \sum_{k=1}^{n} Var\left[R_{t_k}\right] \quad (\text{από Y1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sigma^2 \cdot \Delta t \quad (\text{από Y2 και Y4}) \\
&= n \cdot \sigma^2 \cdot \Delta t = \sigma^2 \cdot T
\end{aligned}
$$

Επισημαίνουμε ότι οι υποθέσεις Y1-Y4 είναι αρκετά ισχυρές και συνεπάγονται ότι οι αποδόσεις R_{t_k} ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο $\mu \cdot \Delta t$ και διακύμανση $\sigma^2 \cdot \Delta t$. Η απόδειξη βασίζεται στο κεντρικό οριακό θεώρημα[4].

<u>Συνοψίζοντας:</u>
Δεδομένου ενός χρονικού διαστήματος [0,T], το χωρίσαμε σε n περιόδους διάρκειας Δt η κάθε μια και εξετάσαμε την κατανομή των (γεωμετρικών) αποδόσεων της μετοχής σε κάθε επιμέρους περίοδο. Διατυπώσαμε υποθέσεις Y1-Y4 για τη φύση αυτών των αποδόσεων (στη βάση εμπειρικών μελετών). Οι υποθέσεις αυτές οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι για μικρές χρονικές περιόδους Δt οι αποδόσεις είναι κανονικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές. Αφού το άθροισμα ανεξάρτητων κανονικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών είναι επίσης κανονικά κατανεμημένο, συμπεράναμε ότι $\ln\left(\dfrac{S_T}{S_0}\right)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $\mu \cdot T$ και διακύμανση $\sigma^2 \cdot T$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι η τιμή της μετοχής S_T ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή.
<u>Παρατήρηση 1</u>: Εάν S_T ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή, τότε η μέση τιμή της S_T δεδομένης της σημερινής τιμής S_0 *μπορεί να δειχθεί* ότι δίνεται από τη σχέση $E\left[S_T \mid S_0\right] = S_0 \cdot \exp\left[\mu \cdot T + \sigma^2 \cdot \dfrac{\mathrm{T}}{2}\right]$
<u>Παρατήρηση 2 (συνέχεια της προηγούμενης παρατήρησης)</u>
Το μέτρο των risk neutral πιθανοτήτων κατασκευάσθηκε έτσι ώστε κάτω από αυτό το μέτρο να ισχύει ότι $E_Q\left[S_T \mid S_0\right] = S_0 \cdot \exp\left[r \cdot T\right]$. Συγκρίνοντας αυτή τη σχέση με αυτή της προηγούμενης παρατήρησης συμπεραίνουμε ότι κάτω από το risk neutral μέτρο θα πρέπει να ισχύει $\mu = r - \dfrac{\sigma^2}{2}$

Στην επόμενη παράγραφο αναφερόμαστε στο διωνυμικό ανάλογο ενός μοντέλου που επιχειρεί να περιγράψει την εξέλιξη της τιμής του αβέβαιου τίτλου, εάν αυτή έχει σταθερή δεδομένη τάση και σταθερό δεδομένο θόρυβο. Καθώς η χρονική περίοδος Δt τείνει στο 0 , το διωνυμικό μοντέλο τείνει στη λογαριθμοκανονική κατανομή για την τιμή του αβέβαιου τίτλου.

4.5.2. Μοντέλο με σταθερή τάση και θόρυβο

<u>4.5.2.1. Περιγραφή του μοντέλου</u>

[4] Cox D.R. and Miller H.D., 1990, The Theory of Stochastic Processes. London: Chapman and Hall

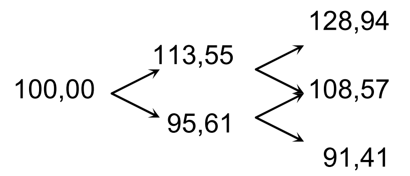
Κάθε χρονική περίοδος είναι διάρκειας Δt.
Θεωρούμε τρείς καθορισμένες και σταθερές παραμέτρους
μ=τάση
σ=θόρυβος
r=επιτόκιο
όλα μετρημένα σε ετήσια βάση.
Η αξία B_t του τραπεζικού λογαριασμού B τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $B_t = B_0 \cdot e^{r \cdot t}$.
Η διαδικασία που θα ακολουθεί η τιμή του αξιόγραφου A, δίνεται από τη σχέση:

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t \cdot e^{\mu \cdot \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}, & \text{με πιθανότητα } 1/2 \\ S_t \cdot e^{\mu \cdot \Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}, & \text{με πιθανότητα } 1/2 \end{cases}$$

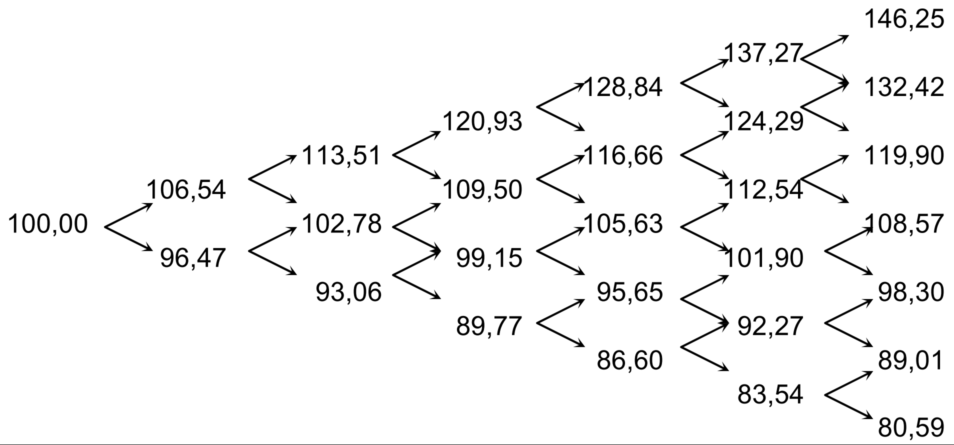
(Οι πιθανότητες ½ που αναφέρονται παραπάνω θεωρούμε ότι είναι οι *πραγματικές* πιθανότητες ανόδου και καθόδου σε κάθε σημείο.)

<u>Σχόλιο 1</u>
Οι επόμενοι τρείς πίνακες δείχνουν τα δέντρα τιμών του αβέβαιου τίτλου Α που παράγει το μοντέλο όταν ο χρονικός ορίζοντας είναι Τ=60 ημέρες, η αρχική τιμή του αβέβαιου τίτλου Α είναι S_0=100, η τάση είναι 50% ετησίως (που σημαίνει ότι σε ένα έτος η αναμενόμενη απόδοση του τίτλου είναι 50%) και η παραλλακτικότητα (volatility) είναι 30% ετησίως (που σημαίνει ότι η τυπική απόκλιση της κατανομής της ετήσιας απόδοσης του τίτλου είναι 30%).

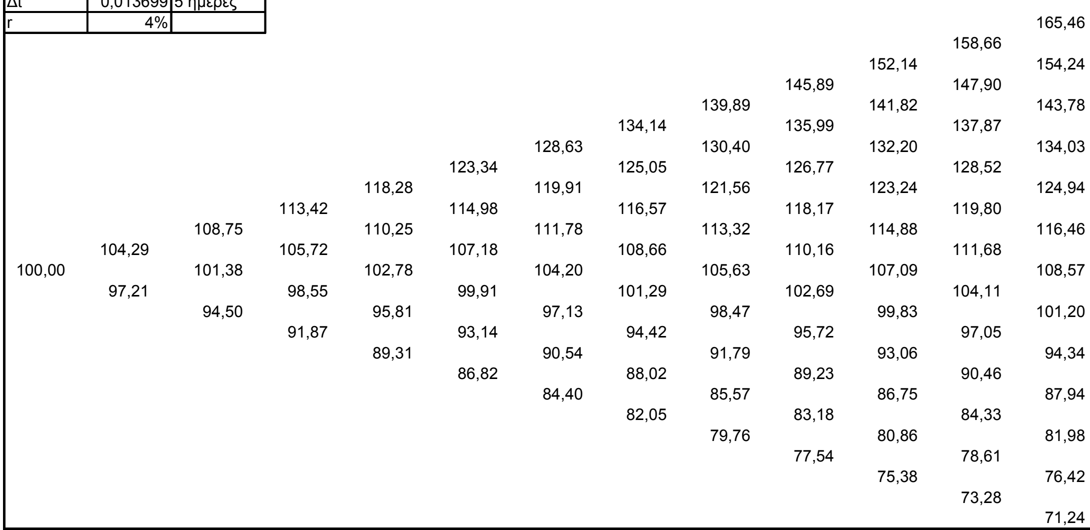
S_0	100	
μ	50%	ανά έτος
σ	30%	ανά έτος
Δt	0,082192	30 ημέρες
r	4%	



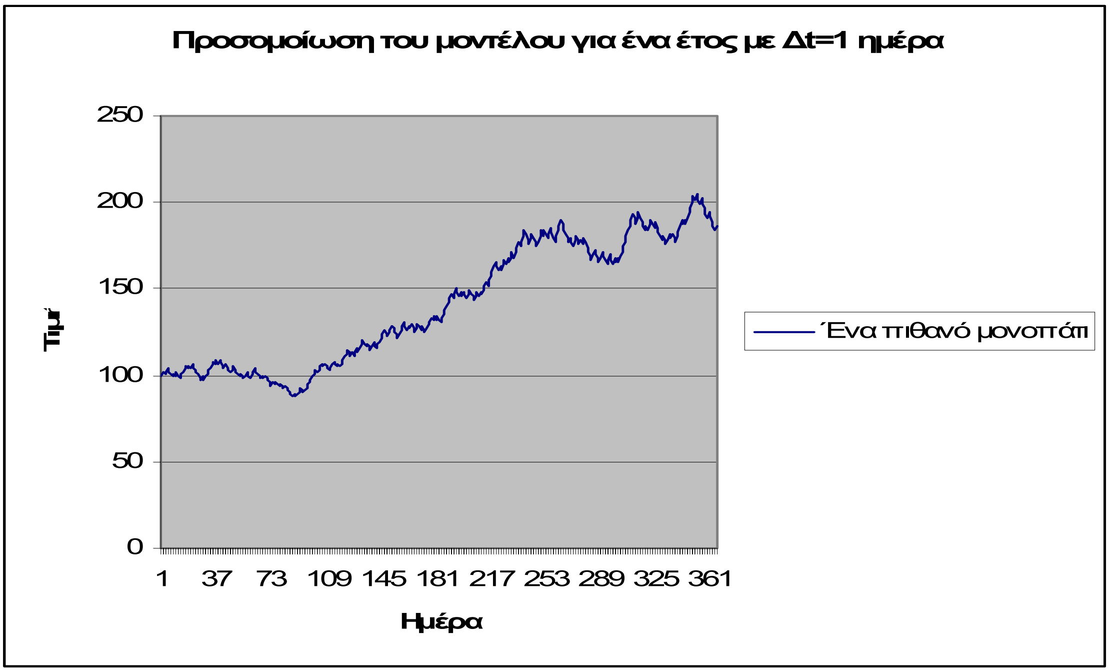
S_0	100	
μ	50%	ανά έτος
σ	30%	ανά έτος
Δt	0,027397	10 ημέρες
r	4%	



S_0	100	
μ	50%	ανά έτος
σ	30%	ανά έτος
Δt	0,013699	5 ημέρες
r	4%	



Το επόμενο διάγραμμα δείχνει ένα από τα μονοπάτια που θα μπορούσε να ακολουθήσει η τιμή της μετοχής στη διάρκεια ενός έτους στο αντίστοιχο δέντρο με Δt=1 ημέρα.



<u>Σχόλιο 2 (*ο αβέβαιος τίτλος κάτω από το πραγματικό μέτρο*)</u>

Για κάθε χρονική στιγμή t στο δέντρο, το πλήθος των περιόδων Δt μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή είναι $n=\frac{t}{\Delta t}$ και η τιμή της μετοχής θα είναι $S_t = S_0 \cdot e^{[\mu t + \sigma\sqrt{t}\cdot\left(\frac{2\cdot X_n - n}{\sqrt{n}}\right)]}$, όπου X_n είναι το πλήθος των ανοδικών κινήσεων από τη στιγμή t_0 έως τη στιγμή t[5]

Η τυχαία μεταβλητή X_n ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με μέσο $\frac{n}{2}$ και διακύμανση $\frac{n}{4}$, οπότε η $\left(\frac{2\cdot X_n - n}{\sqrt{n}}\right)$ έχει μέσο 0 και διακύμανση 1. Από το κεντρικό οριακό θεώρημα αυτή η κατανομή συγκλίνει σε μια κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση 1. Έτσι, καθώς το Δt τείνει στο 0 και το n μεγαλώνει, η κατανομή του S_t τείνει στη λογαριθμοκανονική κατανομή, αφού το $\ln S_t$ τείνει στην κανονική κατανομή με μέσο $\ln S_0 + \mu\cdot t$ και διακύμανση $\sigma^2\cdot t$.

---

[5] πραγματικά, σε $n=\frac{t}{\Delta t}$ βήματα ο συντελεστής του μ θα είναι $n\cdot\Delta t = \frac{t}{\Delta t}\cdot\Delta t = t$, ενώ ο συντελεστής του σ θα είναι

$\sqrt{\Delta t}\cdot$(πλήθος ανοδικών κινήσεων - πλήθος καθοδικών κινήσεων)

$$= \sqrt{\Delta t}\cdot[X_n - (n - X_n)] = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{n}}\cdot(2\cdot X_n - n) = \sqrt{t}\cdot\frac{2\cdot X_n - n}{\sqrt{n}}$$

Σχόλια 3 (*ο αβέβαιος τίτλος κάτω από το Risk Neutral μέτρο*)

Σύμφωνα με τον τύπο μας για τις risk neutral πιθανότητες, μπορούμε να δούμε ότι η risk neutral πιθανότητα ανόδου είναι *περίπου ίση* με $q = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{\Delta t}(\frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r}{\sigma})]$ [6]

Άρα, κάτω από το risk neutral μέτρο, η X_n εξακολουθεί να έχει τη διωνυμική κατανομή, όμως τώρα έχει μέσο nq και διακύμανση $nq(1-q)$.

Άρα, η $\left(\frac{2 \cdot X_n - n}{\sqrt{n}}\right)$ έχει μέσο $-\sqrt{t}(\frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r}{\sigma})$ και διακύμανση ασυμπτωτικά ίση με 1. Επομένως, από το κεντρικό οριακό θεώρημα συγκλίνει σε μια κανονική κατανομή με τον ίδιο μέσο και διακύμανση ίση με 1. Η αντίστοιχη S_t τείνει στη λογαριθμοκανονική κατανομή, αφού $\ln S_t$ τείνει στην κανονική κατανομή με μέσο $\ln S_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot t$ και διακύμανση $\sigma^2 \cdot t$. Αυτό μπορεί να γραφεί ως

$S_t = S_0 \cdot \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t} \cdot Z\right]$ όπου $Z \sim N(0,1)$ κάτω από το risk neutral μέτρο.

Σχόλιο 4 (*Το μοντέλο Cox-Ross-Rubinstein (CRR) για την τιμολόγηση παραγώγων*)

Προσέξτε ότι η πραγματική μέση απόδοση μ του αβέβαιου τίτλου, έχει εξαφανιστεί από τον τύπο της κατανομής του S_t κάτω από το risk neutral μέτρο.

Δηλαδή με όποιο μ και να είχα ξεκινήσει (π.χ. μ=0) θα κατέληγα στην ίδια σχέση $S_t = S_0 \cdot \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t} \cdot Z\right]$ για την κατανομή του S_t. Αυτό μας κάνει να σκεφθούμε ότι για την την τιμολόγηση των παραγώγων, δεν έχει σημασία ποια είναι η αναμενόμενη απόδοση μ του αβέβαιου τίτλου Α, και ότι αυτό που πραγματικά παίζει ρόλο είναι η volatility σ. Άρα για λόγους τιμολόγησης παραγώγων θα μπορούσα να κατασκευάσω το διωνυμικό μου μοντέλο από τη σχέση

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t \cdot e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ S_t \cdot e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{cases}$$

Αυτό το τελευταίο μοντέλο ονομάζεται μοντέλο Cox, Ross, Rubinstein (CRR) για την τιμολόγηση παραγώγων

---

[6] Σύμφωνα με τον τύπο για την risk neutral πιθανότητα ανόδου έχουμε ότι

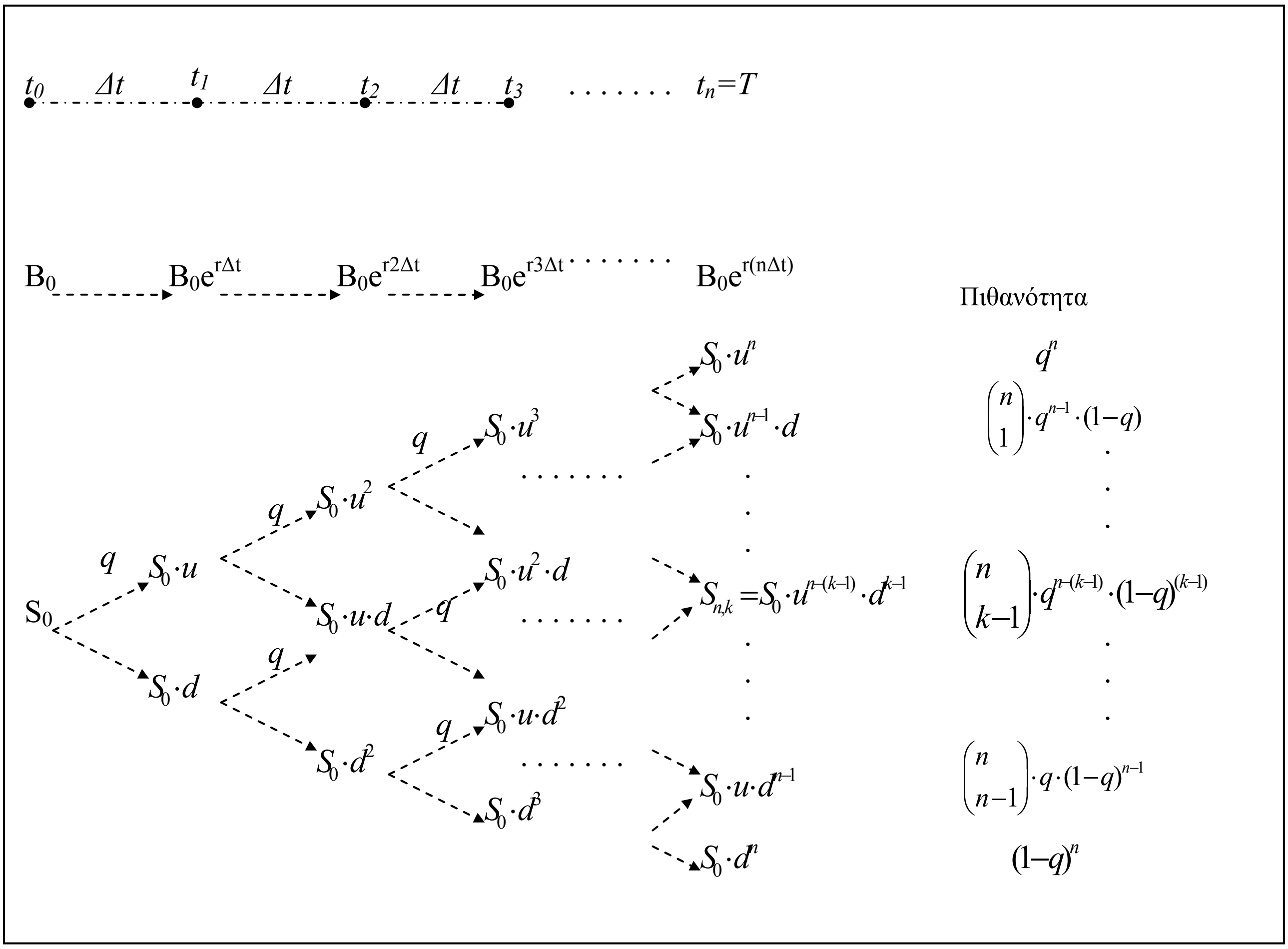
$q = \frac{S_t \cdot e^{r \cdot \Delta t} - S_t \cdot e^{\mu \cdot \Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}}{S_t \cdot e^{\mu \cdot \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} - S_t \cdot e^{\mu \cdot \Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}}$. Εάν αντικαταστήσουμε τις δυνάμεις του e σε αυτόν τον τύπο με το αντίστοιχο ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0 και στο αποτέλεσμα θεωρήσουμε 0 όλες τις δυνάμεις του Δt με εκθέτη μεγαλύτερο από τη μονάδα θα έχουμε αυτή την προσέγγιση. Προσέξτε ότι όσο μικρότερο είναι το Δt τόσο πιο καλή είναι η προσέγγιση.

4.6. Τα (συνήθη) δέντρα τιμολόγησης παραγώγων πρακτικά

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει μέχρι στιγμής, σε μια αγορά που δεν επιτρέπει arbitrage κάθε παράγωγο μπορεί να τιμολογηθεί με την υπόθεση ότι η αγορά είναι risk neutral. Αυτό σημαίνει ότι για την αποτίμηση των παραγώγων μπορούμε να υποθέσουμε τα εξής:

1. Η αναμενόμενη απόδοση όλων των αξιόγραφων ισούται με το τραπεζικό επιτόκιο
2. Οι μελλοντικές χρηματοροές μπορούν να τιμολογηθούν βρίσκοντας την παρούσα αξία της αναμενόμενης τελικής τους αξίας.

Στο επόμενο μοντέλο θέλουμε να προσδιορίσουμε τους παράγοντες u και d και τις risk neutral πιθανότητες q και $1-q$ ώστε το δέντρο που θα προκύψει να είναι συνεπές με τα παραπάνω και με την περιγραφή της τιμής μιας μετοχής που η απόδοση της έχει volatility σ.



Ισχύουν τα εξής

(1) $S_t\cdot e^{r\cdot\Delta t}=q\cdot S_t\cdot u+(1-q)\cdot S_t\cdot d$ (από risk neutrality)

(2) $S_t\sigma^2\Delta t=E_Q({S_{t+1}}^2)-E_Q(S_{t+1})^2$ (από volatility)

Οι παραπάνω εξισώσεις ισοδυναμούν με τις

(1') $\quad e^{r\cdot\Delta t}=q\cdot u+(1-q)\cdot d$

(2') $\quad \sigma^2\cdot\Delta t=q\cdot u^2+(1-q)\cdot d^2-\left[q\cdot u+(1-q)\cdot d\right]^2$

Εάν υποθέσουμε μαζί με τις (1') και (2') την

(3^{α}) $u \cdot d = 1$

Καταλήγουμε στο μοντέλο

(A) $u = \exp\left(\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right)$

$$d = \exp\left(-\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right) \qquad \text{(CRR model)}$$

$$q = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d}$$

(3^{β}) Αν θέσουμε q=1/2 και λύσουμε το σύστημα των (1') και (2') και αγνοώντας τις δυνάμεις του Δt με εκθέτη μεγαλύτερο από τη μονάδα, καταλήγουμε στο μοντέλο

(B) $u = \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right]$

$$d = \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \Delta t - \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right]$$

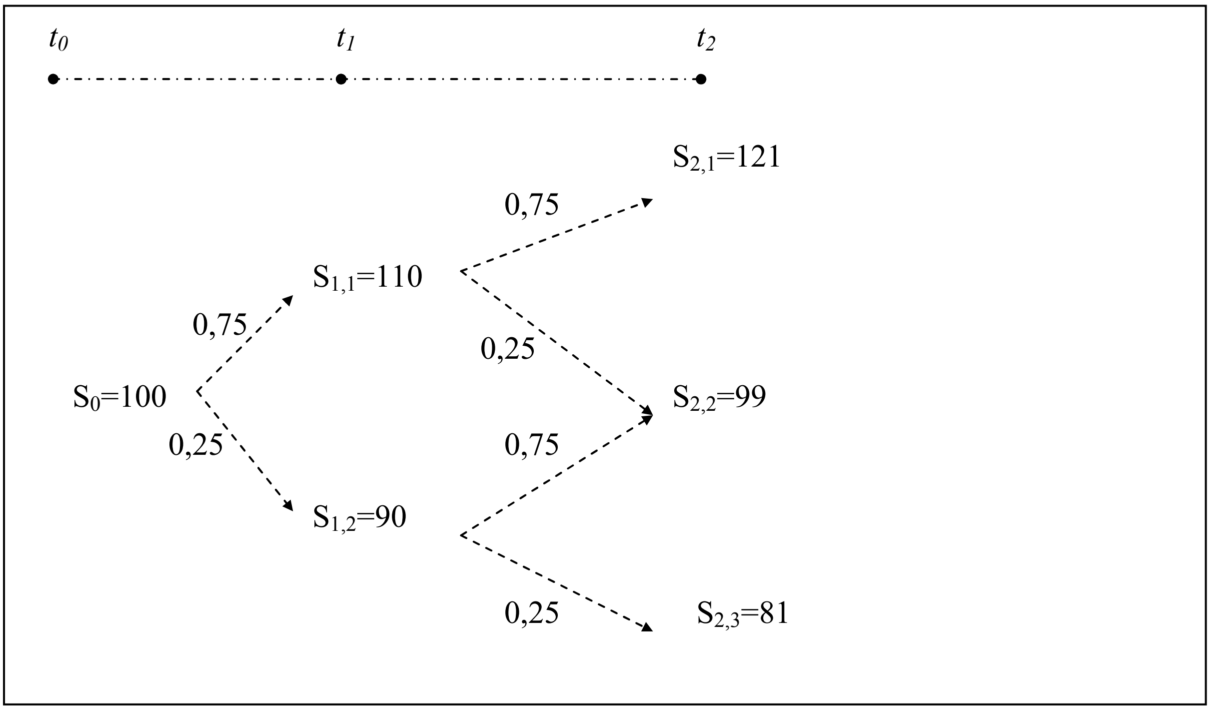
(σκεφτείτε το μοντέλο (B) σε σχέση με την παρατήρηση 2 της παραγράφου 4.5.1)

4.7. Ασκήσεις

1) Η αναμενόμενη τιμή της λογαριθμικής απόδοσης μιας μετοχής είναι 12% ανά έτος και η volatility είναι 30% ανά έτος

(α) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή και η volatility για περίοδο ενός μηνός?
(β) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή και η volatility για περίοδο δύο μηνών?
(γ) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή και η volatility για περίοδο τριών μηνών?
(δ) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή και η volatility για περίοδο έξι μηνών?

2) Θεωρείστε το επόμενο διωνυμικό μοντέλο για μια μετοχή:



(α) Ποια είναι η πιθανότητα $S_2 = 121$?
(β) Ποια είναι η πιθανότητα $S_2 = 99$?
(γ) Ποια είναι η πιθανότητα $S_2 = 81$?
(δ) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της μετοχής την t_1?
(ε) Ποια είναι η διακύμανση της τιμής της μετοχής την t_1? Την t_2? Είναι η διακύμανση της τιμής της μετοχής αύξουσα, φθίνουσα ή σταθερή ως προς το χρόνο?

3) Θεωρείστε μια λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση ετήσια απόδοση μ=0,05 και τυπική απόκλιση της ετήσιας απόδοσης ίση με σ=0,2

(α) Εκφράστε τους παράγοντες u και d για την διωνυμική προσέγγιση σε αυτή την λογαριθμοκανονική κατανομή συναρτήσει του χρονικού βήματος Δt
(β) Υπολογίστε τις τιμές στο (α) για Δt=1, 1/2, 1/4, 1/8. Τι συμβαίνει στα u και d καθώς το Δt μειώνεται?
(γ) Χρησιμοποιώντας Δt=1 κατασκευάστε το διωνυμικό δέντρο για 2 περιόδους. Θεωρείστε ότι η αρχική τιμή της μετοχής είναι ίση με 100.

4) Η αναμενόμενη τιμή της λογαριθμικής απόδοσης είναι 12% το χρόνο και η volatility είναι 30% το χρόνο. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 100.

(α) Εάν το διάστημα Δt επιλεγεί να είναι ίσο με μία ημέρα (δηλαδή Δt=1/365) χρησιμοποιείστε τη σχέση $S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t \cdot e^{\mu\cdot\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}, & \text{με πιθανότητα } 1/2 \\ S_t \cdot e^{\mu\cdot\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}, & \text{με πιθανότητα } 1/2 \end{cases}$ για να υπολογίσετε την διωνυμική κατανομή της τιμής της μετοχής σε αυτό το διάστημα.

(β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή του $\frac{S_{t_1}}{S_0}$

(γ) Υπολογίστε την τυπική απόκλιση του $\frac{S_{t_1}}{S_0}$. Τι σχέση έχει η τιμή που βρήκατε με την τιμή του $\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}$?

5) Η αναμενόμενη τιμή της λογαριθμικής απόδοσης μιας μετοχής είναι 15% το χρόνο και η volatility της είναι 30% το χρόνο. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι ίση με 100.

(α) Εάν το διάστημα Δt επιλεγεί να είναι ίσο με μία εβδομάδα (δηλαδή Δt=7/365) χρησιμοποιείστε τη σχέση $S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t \cdot e^{\mu\cdot\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}, & \text{με πιθανότητα } 1/2 \\ S_t \cdot e^{\mu\cdot\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}, & \text{με πιθανότητα } 1/2 \end{cases}$ για να υπολογίσετε ένα διωνυμικό δέντρο για την τιμή της μετοχής με χρονικό ορίζοντα τριών εβδομάδων

(β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο τέλος της πρώτης εβδομάδας.

(γ) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο τέλος της δεύτερης εβδομάδας.

(δ) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο τέλος της τρίτης εβδομάδας.

(ε) Συγκρίνετε την απάντηση σας στο (δ) με την τιμή που θα υπολογίζατε αν είχατε χρησιμοποιήσει τη σχέση $E\left[S_T \mid S_0\right] = S_0 \cdot \exp\left[\mu \cdot T + \sigma^2 \cdot \frac{T}{2}\right]$

6) Ένα call option ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης 50 έχει ημερομηνία λήξης σε ένα έτος. Η τρέχουσα τιμή της υποκείμενης μετοχής είναι 40. Το επιτόκιο είναι 5% και η volatility της μετοχής 30% το χρόνο. Χωρίστε το έτος σε δύο εξάμηνα και χρησιμοποιώντας τα μοντέλα της παραγράφου 4.6. σχεδιάστε τα αντίστοιχα δέντρα και τιμολογείστε με τη μέθοδο των risk neutral πιθανοτήτων το call option σε καθένα από αυτά τα δέντρα. Επίσης σε κάθε κορυφή των δέντρων σημειώστε ποιο είναι το ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο σε μετοχές και σε δανεισμό.

7) Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο (forward) επί μιας μετοχής ABC ωριμάζει σε 106 ημέρες. Χωρίστε το διάστημα των 106 ημερών σε 2 ίσες περιόδους. Το επιτόκιο είναι 4,35% και η volatility της απόδοσης της μετοχής είναι 25% το χρόνο. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 60.
Χρησιμοποιώντας τα μοντέλα της παραγράφου 4.6. σχεδιάστε τα αντίστοιχα δέντρα, σημειώστε τις risk neutral πιθανότητες και χρησιμοποιώντας τις risk neutral πιθανότητες βρείτε σε κάθε κορυφή του δέντρου την αντίστοιχη προθεσμιακή τιμή (forward τιμή).

8) Ένα προθεσμιακό (forward) συμβόλαιο επί μιας μετοχής XYZ ωριμάζει σε ένα έτος. Ένα ευρωπαϊκό call option έχει ως υποκείμενο αξιόγραφο το προθεσμιακό συμβόλαιο. Το call option λήγει σε έξι μήνες και η τιμή εξάσκησης του είναι 60. Η αξία του option στη λήξη είναι $\max(F(T,T_F)-60,0)$, όπου T συμβολίζει την ημερομηνία λήξης του option, T_F συμβολίζει την ημερομηνία ωρίμανσης του forward και $F(T,T_F)$ συμβολίζει την προθεσμιακή τιμή ενός forward επί της μετοχής το οποίο συμφωνείται την T και ωριμάζει την T_F . Το επιτόκιο είναι 4,75% και η volatility ίση με 20% το χρόνο. Χωρίστε το διάστημα του ενός έτους σε δύο εξάμηνα και χρησιμοποιώντας τα μοντέλα της παραγράφου 4.6. σχεδιάστε τα αντίστοιχα δέντρα και υπολογίστε την τρέχουσα non arbitrage τιμή του option.

9) Θεωρείστε το εξής συμβόλαιο επί της μετοχής BBB. Σε ένα έτος από τώρα, εάν η τιμή της μετοχής είναι μεταξύ \$30 και \$60 τότε πρέπει να πληρώσετε την τότε ισχύουσα τιμή της μετοχής για να αγοράσετε τη μετοχή. Εάν η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη ή ίση από \$60 τότε για να αγοράσετε τη μετοχή θα πρέπει να πληρώσετε ένα ποσό που δίνεται από τη σχέση $60+\dfrac{S-60}{10}$ όπου S είναι η τότε ισχύουσα τιμή της μετοχής. Τέλος εάν η τιμή της μετοχής είναι τότε μικρότερη από \$30 τότε για να αγοράσετε τη μετοχή θα πρέπει να πληρώσετε \$30.

(α) Σχεδιάστε ένα διάγραμμα που να δείχνει το ποσό που θα πρέπει να πληρώσετε για τη μετοχή κατά την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου.

(β) Χωρίστε το χρονικό διάστημα του ενός έτους σε δύο εξάμηνα. Χρησιμοποιείστε ένα διωνυμικό δέντρο για τη μετοχή, όπου οι παράγοντες ανόδου και καθόδου της τιμής της μετοχής δίνονται από

$$u=\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\Delta t+\sigma\cdot\sqrt{\Delta t}\right]=1,27904$$

$$d=\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\Delta t-\sigma\cdot\sqrt{\Delta t}\right]=0,77969$$

όπου r=5,85%, σ=35% το χρόνο και Δt=0,5. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 45. Χρησιμοποιείστε τις risk neutral πιθανότητες για να τιμολογήσετε αυτό το συμβόλαιο.

(γ) Μπορείτε να αναπαραστήσετε αυτό το συμβόλαιο ως ένα συνδυασμό από τη μετοχή και από διάφορα options?

10) Ένα put option P, επί μιας μετοχής S, με τιμή εξάσκησης K=\$45 λήγει σε ένα έτος. Χωρίστε το χρονικό διάστημα του ενός έτους σε δύο εξάμηνα. Το συνεχώς ανατοκιζόμενο τραπεζικό επιτόκιο είναι r=4,5% και η ετήσια volatility της υποκείμενης μετοχής είναι σ=20%

(a) Αν η σημερινή τιμή της μετοχής είναι S_0=\$35, σχεδιάστε ένα δέντρο δύο περιόδων για την εξέλιξη της τιμής της μετοχής χρησιμοποιώντας το CRR μοντέλο: $S_{t+\Delta t}=\begin{cases} S_t\cdot e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ S_t\cdot e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{cases}$

(b) Υπολογίστε την risk neutral πιθανότητα ανόδου

(c) Υπολογίστε τη σημερινή τιμή P_0 του put option χρησιμοποιώντας τις risk neutral πιθανότητες

(d) Για κάθε κορυφή του δέντρου, περιγράψτε το χαρτοφυλάκιο από μετοχή και δανεισμό που είναι ισοδύναμο με το put option. Επαληθεύστε με αυτό τον τρόπο την απάντηση σας στο (c).

(e) Έστω ένα call option C επί του put option P με τιμή εξάσκησης ίση με το P_0 που βρήκατε στο (c) και λήξη σε έξι μήνες (σας δίνει το δικαίωμα να αγοράσετε σε έξι μήνες από σήμερα, το προηγούμενο put option στη σημερινή non arbitrage τιμή του). Να υπολογίσετε (με όποιο τρόπο θέλετε), την σημερινή non arbitrage τιμή του C_0

11) Μια αγορά αποτελείται από δύο μετοχές X και Y. Έστω ότι σήμερα οι τιμές των μετοχών είναι X0=100 και Y0=180, ενώ ένα χρόνο αργότερα γνωρίζουμε ότι δύο μόνο καταστάσεις ενδέχεται να αντιμετωπίσουμε: είτε (α) Xu=120 καιYu=280 είτε (β) Xd=80 και Yd=40. Τραπεζικός λογαριασμός δεν υπάρχει σε αυτή την αγορά. Μπορείτε να βρείτε ποια θα πρέπει να είναι η σημερινή τιμή ενός συμβολαίου το οποίο μετά από ένα χρόνο θα αξίζει 20 στην κατάσταση (α) και 0 στην κατάσταση (β)?

12) Έστω ότι μια αγορά αποτελείται από ένα Τραπεζικό λογαριασμό και από τις δύο μετοχές της προηγούμενης άσκησης. Ο Τραπεζικός λογαριασμός μας επιτρέπει είτε να δανείσουμε είτε να δανεισθούμε για διάστημα ενός έτους με σταθερό επιτόκιο r=10% ετήσια ανατοκιζόμενο. Κάντε arbitrage.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εισαγωγή στη λήψη αποφάσεων

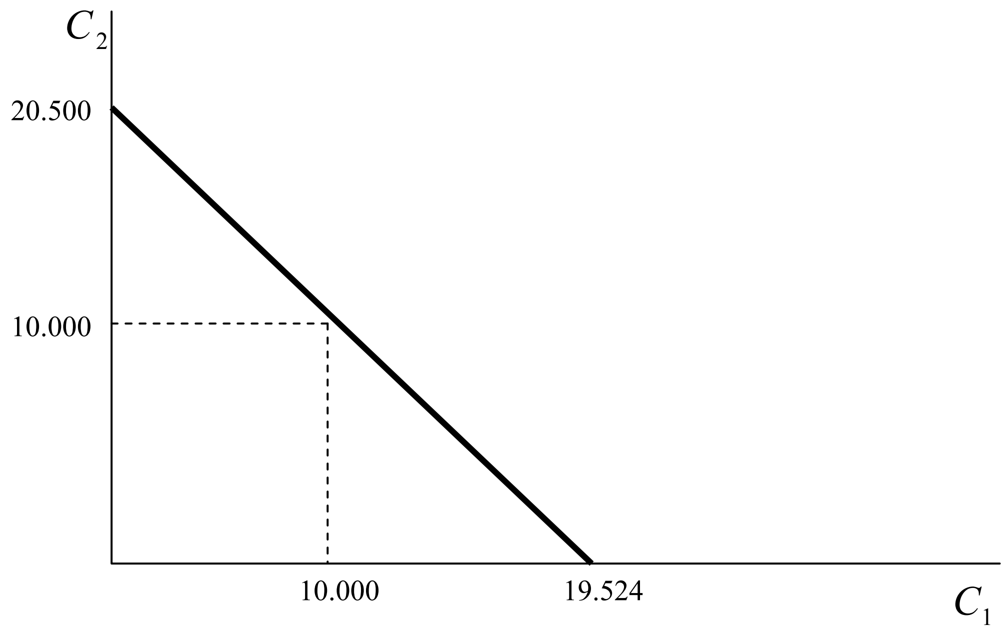
5.1. Καθεστώς Βεβαιότητας

5.1.1. Εισαγωγικό Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε έναν καταναλωτή ο οποίος θα εισπράξει με βεβαιότητα ένα 10.000$ σήμερα και άλλα 10.000$ μετά από ένα έτος. Ας υποθέσουμε ότι η μόνη διαθέσιμη επένδυση είναι ένας καταθετικός λογαριασμός με απόδοση 5% ετησίως . Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι ο καταναλωτής μπορεί να δανεισθεί με επιτόκιο 5% ετησίως.

Προκειμένου να αποφασίσει πόσο πρέπει να καταναλώσει σε κάθε περίοδο, ο καταναλωτής πρέπει πρώτα να καθορίσει όλες τις διαθέσιμες σε αυτόν επιλογές και στη συνέχεια να επιλέξειμια από αυτές.
Ας δούμε λοιπόν πρώτα τι επιλογές κατανάλωσης έχει διαθέσιμες σε καθεμία από τις δύο περιόδους, δηλαδή ποιο είναι το σύνολο ευκαιριών του.
Μερικά παραδείγματα τέτοιων επιλογών είναι τα εξής:
(ι) Καταναλώνει 10.000$ σε κάθε μια από τις δύο περιόδους
(ιι) Αποταμιεύει τα πάντα την πρώτη περίοδο και καταναλώνει τα πάντα την δεύτερη περίοδο. Δηλαδή, δεν καταναλώνει τίποτα την πρώτη περίοδο, βάζει τα 10.000$ στην Τράπεζα με τόκο 5% και στην αρχή της δεύτερης περιόδου αυτά τα 10.000$ έχουν γίνει 10.000·(1+5%)=10.500$. Έτσι η κατανάλωση της δεύτερης περιόδου είναι 20.500$ (τα 10.500$ που προέκυψαν από την αποταμίευση της πρώτης περιόδου σύν τα 10.000$ που εισπράττει στη δεύτερη περίοδο)
(ιιι) Καταναλώνει ότι μπορεί την πρώτη περίοδο και δε νοιάζεται για την δεύτερη περίοδο. Δηλαδή, δανείζεται την πρώτη περίοδο ποσό Χ τέτοιο ώστε Χ·(1+5%)=10.000$ (άρα Χ=9.524$) και καταναλώνει σήμερα 19.524$. Την δεύτερη περίοδο όταν θα εισπράξει τα 10.000$ θα πρέπει να τα επιστρέψει στην Τράπεζα και δεν θα έχει τίποτα για να καταναλώσει.

Γενικά,
Έστω I_1, I_2 τα έσοδα του καταναλωτή την πρώτη και τη δεύτερη περίοδο αντίστοιχα. Επίσης έστω C_1, C_2 τα ποσά που καταναλώνει ο καταναλωτής την πρώτη και τη δεύτερη περίοδο αντίστοιχα. Προφανώς τα ποσά που καταναλώνει περιορίζονταο από τα ποσά εσόδων που έχει διαθέσιμα στις δύο περιόδους. Άρα ισχύει η εξής σχέση:
$$C_2 = I_2 + (I_1 - C_1)\cdot(1+5\%)$$
Που είναι μια γραμμική σχέση ανάμεσα στα C_1 και C_2, άρα παριστάνεται από μια ευθεία. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το σύνολο εφικτών επιλογών του καταναλωτή φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα:



Άρα ο επενδυτής έχει άπειρο πλήθος επιλογών κατανάλωσης στις δύο αυτές περιόδους. Φυσικά, παραμένει ακόμα ανοικτό το ερώτημα πως επιλέγει τελικά μια από αυτές τις επιλογές. Προφανώς εξαρτάται από τις προσωπικές προτιμήσεις το καταναλωτή. Στην επόμενη παράγραφο θα προσπαθήσουμε να «μαθηματικοποιήσουμε» αυτές τις προτιμήσεις.

5.1.2. Ορθολογικές προτιμήσεις

Έστω Χ το σύνολο επιλογών ενός επενδυτή / καταναλωτή.
Εφοδιάζουμε το Χ με μία σχέση προτίμησης $\succ$, δηλαδή αν x,y είναι δύο επιλογές του επενδυτή (δηλ. $x,y \in X$) τότε
$x \succ y \Leftrightarrow$ [ο επενδυτής προτιμάει την x τουλάχιστον όσο και την y]

Μία σχέση προτίμησης $\succ$, ονομάζεται ορθολογική εάν ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:
(ι) πληρότητα: $\forall x, y \in X \Rightarrow x \succ y$ ή $y \succ x$ ή και τα δύο ($x \sim y$)
(ιι) ανακλαστικότητα: $\forall x \in X \Rightarrow x \succ x$
(ιιι) μεταβατικότητα: $\forall x, y, z \in X$ με $x \succ y$ και $y \succ z \Rightarrow x \succ z$

Και ενώ τα δύο πρώτα αξιώματα μπορούν να γίνουν αποδεκτά εύκολα, το τρίτο μπορεί να οδηγήσει σε καταστάσεις όπως

4.1.2.1. Παράδειγμα (Το παράδοξο του Condorcet)
Έστω Σ1, Σ2, Σ3 τρείς συνεταίροι. Ο καθένας έχει τις δικές του προτιμήσεις. Όμως αποφασίζουν τι θα πράξουν για την εταιρεία στην αρχή της πλειοψηφίας. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι αντιμετωπίζουν κάποιο επιχειρηματικό πρόβλημα για τη λύση του οποίου έχουν τρείς επιλογές Α, Β, Γ. Έστω επίσης ότι οι τρείς συνεταίροι είναι ορθολογικοί (δηλαδή έχουν ορθολογικές προτιμήσεις). Έστω ότι οι προτιμήσεις τους ως προς τις τρείς επιλογές Α,Β,Γ δίδονται ως εξής:
Σ1: $A \succ_1 B \succ_1 \Gamma$
Σ2: $B \succ_2 \Gamma \succ_2 A$

Σ3: $\Gamma \succ_3 A \succ_3 B$

Αποφασίζοντας στην αρχή της πλειοψηφίας η εταιρεία εκφράζει την προτίμηση $A \succ B$ αφού τόσο ο Σ1 όσο και ο Σ3 προτιμούν την Α από τη Β.
Επίσης η εταιρεία εκφράζει την προτίμηση $B \succ \Gamma$ αφού τόσο ο Σ1 όσο και ο Σ2 προτιμούν τη Β από τη Γ.
Αν οι προτιμήσεις της εταιρείας που εκφράζονται στην αρχή της πλειοψηφίας ήταν ορθολογικές θα έπρεπε λόγω της μεταβατικότητας να ισχύει ότι $A \succ \Gamma$.
Όμως η εταιρεία εκφράζει την προτίμηση $\Gamma \succ A$ αφού τόσο ο Σ2 όσο και ο Σ3 προτιμούν τη Γ από την Α.

5.1.3. Συναρτήσεις ωφελιμότητας

Θέλουμε να αντιστοιχίσουμε τώρα τη σχέση προτίμησης $\succ$ με τη γνωστή σχέση διάταξης $\geq$ στο $\mathbb{R}$. Θα το επιτύχουμε μέσω μιας συνάρτησης $u : X \to \mathbb{R}$ που θα την ονομάσουμε συνάρτηση ωφελιμότητας.

5.1.3.1 Ορισμός

Μια συνάρτηση $u : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται συνάρτηση ωφελιμότητας αν και μονο αν $\forall x, y \in X$ ισχύει ότι $x \succ y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$

5.1.3.2. Πρόταση:

Αν μια σχέση προτίμησης $\succ$ στο Χ μπορεί να χαρακτηρισθεί από μια συνάρτηση ωφελιμότητας $u : X \to \mathbb{R}$, τότε η $\succ$ είναι ορθολογική.
Απόδειξη
Έστω $x, y, z \in X$ με $x \succ y$ και $y \succ z$. Αρκεί να δείξω ότι $x \succ z$
Αφού η $\succ$ χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση ωφελιμότητας $u : X \to \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x \succ y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y) \\ y \succ z \Leftrightarrow u(y) \geq u(z) \end{array}\right\} \Rightarrow u(x) \geq u(z) \Leftrightarrow x \succ z$$

Αν υποθέσουμε μια επιπλέον συνθήκη για τη σχέση $\succ$, συγκεκριμένα ότι οι προτιμήσεις που εκφράζει δεν αλλάζουν «ξαφνικά» (δηλαδή έχουν μια συνέχεια), τότε ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι αν η $\succ$ είναι ορθολογική τότε μπορεί να περιγραφεί από μια συνάρτηση ωφελιμότητας. Ο επόμενος ορισμός διατυπώνει με μαθηματικό τρόπο τη συνθήκη της μη ξαφνικής αλλαγής των προτιμήσεων που εκφράζει η $\succ$.

5.1.3.3. Ορισμός (συνεχούς σχέσης προτίμησης)

Έστω Χ (με μια μετρική) εφοδιασμένο με σχέση προτίμηση $\succ$. Η $\succ$ λέγεται συνεχής εάν: $\forall (x_n)_{n=1,\dots}, (y_n)_{n=1,\dots}$ ακολουθίες στοιχείων του Χ τέτοιες ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ και $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ και $x_n \succ y_n$ $\forall n$, τότε $x \succ y$
(Ισοδύναμα τα σύνολα $\Lambda_z^+ = \{x \in X : x \succ z\}$ και $\Lambda_z^- = \{x \in X : x \prec z\}$ είναι κλειστά)

5.1.3.4. Πρόταση:

Αν μια σχέση προτίμησης είναι ορθολογική και συνεχής τότε υπάρχει συνάρτηση ωφελιμότητας που την χαρακτηρίζει
Απόδειξη (παραλείπεται)

5.1.3.5. Παραδείγματα συναρτήσεων ωφελιμότητας

Cobb-Douglas:	$u(x,y)=x^{a}\cdot y^{(1-a)},\ a\in[0,1]$
Leontieff	$u(x,y)=\min(x,y)$
Εκθετική	$u(x)=1-\exp(-\lambda\cdot x)$
Λογαριθμική	$u(x)=\ln(x)$
Τετραγωνική	$u(x)=x-a\cdot x^{2}$

5.1.4. Καμπύλη αδιαφορίας

Έστω ένας επενδυτής που έχει προτιμήσεις $\succ$. Η καμπύλη αδιαφορίας του επενδυτή, η οποία διέρχεται από ένα σημείο $a\in \mathrm{X}$ είναι το σύνολο $I_a=\{x\in \mathrm{X}: x\sim a\}$. Δηλαδή αποτελείται από όλα εκείνα τα στοιχεία του X που είναι εξίσου προτιμητέα με το a.

Παρατηρήσεις:

Εύκολα επαληθεύει κανείς ότι

$a\sim b\Leftrightarrow I_a=I_b$

$a\nsim b\Leftrightarrow I_a\cap I_b=\varnothing$

$a\succ b\Leftrightarrow(\forall x\in I_a$ και $\forall y\in I_b\Rightarrow x\succ y)$

$x,y\in I_a\Rightarrow x\sim y$

$a\succ b\Leftrightarrow(\forall x\in I_a$ και $\forall y\in I_b\Rightarrow u(x)\geq u(y))$

$u(x)\neq u(y)\Leftrightarrow I_x\cap I_y=\varnothing$

$a\in I_x\Leftrightarrow x\in I_a$

$I_a=\{x\in X: u(x)=u(a)\}=u^{-1}(u(a))$

5.1.4.1. Παράδειγμα (Προϋπολογισμός)

Έστω x_A,x_B ποσότητες των αγαθών A και B αντίστοιχα και p_A,p_B οι αντίστοιχες τιμές. Έστω $X=\{(x_A,x_B): x_A,x_B\in\mathbb{R}\}$ το σύνολο επιλογών. Έστω επίσης ότι η προτίμηση του καταναλωτή στις δύο ποσότητες περγράφεται από μια σχές ωφελιμότητας $u(\underline{x})=u(x_A,x_B)$

Ο καταναλωτής έχει πεπερασμένα χρήματα για κατανάλωση και έτσι ο προϋπολογισμός m του καταναλωτή, θέτει περιορισμούς στις επιλογές του από το σύνολο X. Συγκεκριμένα καθορίζει ένα σύνολο εφικτών επιλογών:

$B_m=\{(x_A,x_B)\in X: p_A\cdot x_A+p_B\cdot x_B\leq m\}=\{\underline{x}\in X:\underline{p}\cdot\underline{x}\leq m\}$

Έτσι το πρόβλημα της κατανάλωσης του καταναλωτή περιγράφεται ως το εξής πρόβλημα βελτιστοποίησης:

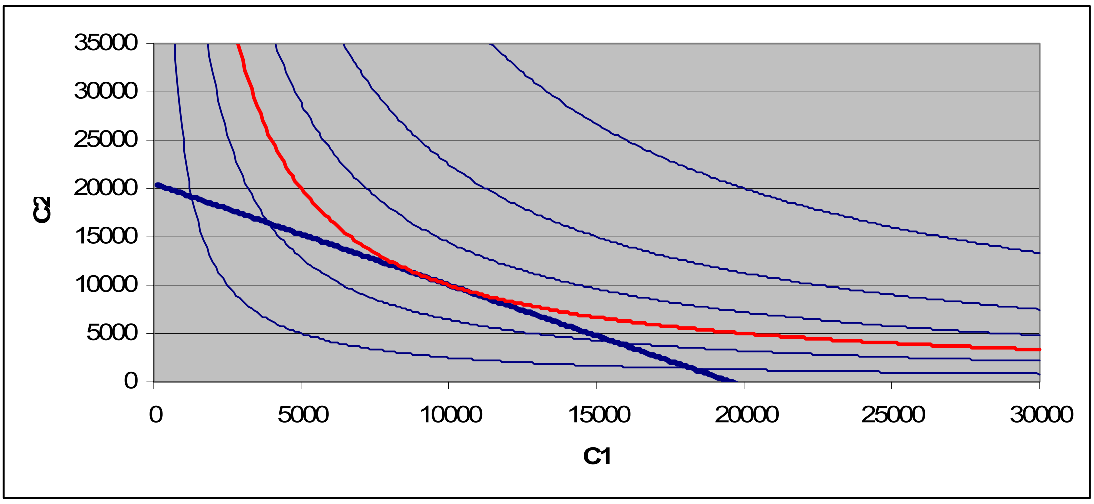
$\max u(\underline{x})$ ως προς $\underline{x}$

υπό τον περιορισμό

$\underline{p}\cdot\underline{x}\leq m$

Στο αρχικό παράδειγμα που είχαμε ας υποθέσουμε ότι οι προτιμήσεις του καταναλωτή περιγράφονται από μια συνάρτηση ωφελιμότητας Cobb-Douglas, δηλαδή $u(c_1,c_2)=c_1^{0,5}\cdot c_2^{0,5}$

Στο επόμενο διάγραμμα βλέπουμε το σύνολο εφικτών επιλογών του καταναλωτή μαζί με τις καμπύλες αδιαφορίας του για διάφορα επίπεδα ωφελιμότητας. Ο καταναλωτής με τη συγκεκριμένη συνάρτηση ωφελιμότητας θα επιλέξει να καταναλώσει στις δύο περιόδους σύμφωνα με το σημείο που ορίζεται από το σύνολο εφικτών επιλογών και από την εφαπτόμενη σε αυτό καμπύλη αδιαφορίας. Αυτό είναι το σημείο που λύνει το πρόβλημα μεγιστοποίησης της ωφελιμότητας του καταναλωτή με εφικτές επιλογές.



(<u>Άσκηση</u>: Λύστε το ίδο πρόβλημα θεωρώντας ότι ο καταναλωτής έχει συνάρτηση ωφελιμότητας Leontieff $u(C_1, C_2) = \min(C_1, C_2)$. Βρείτε την ακριβή απάντηση.)

Είδαμε μέχρι στιγμής ότι εάν ένας επενδυτής πρέπει να επιλέξει από ένα σύνολο διαφορετικών εναλλακτικών με βέβαιο αποτέλεσμα θα επιλέξει εκείνη την εναλλακτική που του μεγιστοποιεί τη συνάρτηση ωφελιμότητας. Τι γίνεται όμως όταν οι διάφορες εναλλακτικές έχουν αβέβαιο αποτέλεσμα?

5.2. Καθεστώς αβεβαιότητας

5.2.1. Εισαγωγικά

Έστω τώρα, σε συνέχεια του προηγούμενου παραδείγματος ότι ο καταναλωτής δεν έχει στη διάθεση του την τοποθέτηση στον Τραπεζικό λογαριασμό (η οποία απέδιδε ένα σίγουρο 5%), αλλά την εξής επιλογή επένδυσης με αβέβαιη έκβαση:

Απόδοση	Πιθανότητα	Κατάσταση Οικονομίας
10%	1/3	καλή
5%	1/3	μέτρια
0%	1/3	κακή

Τώρα ο καταναλωτής αντιμετωπίζει μια τυχαία μεταβλητή.
Έτσι αν για παράδειγμα (και χωρίς να μπούμε σε πολλές λεπτομέρειες) ο καταναλωτής καταναλώσει C_1 την πρώτη περίοδο και τοποθετήσει τα υπόλοιπα στην επένδυση, τότε την δεύτερη περίοδο δε γνωρίζει τι ακριβώς θα καταναλώσει, δηλαδή η κατανάλωση του για τη δεύτερη περίοδο είναι η τυχαία μεταβλητή

$$C_2 = \begin{cases} I_2 + (I_1 - C_1) \cdot (1 + 10\%) \text{ με πιθανότητα } 1/3 \\ I_2 + (I_1 - C_1) \cdot (1 + 5\%) \text{ με πιθανότητα } 1/3 \\ I_2 + (I_1 - C_1) \text{ με πιθανότητα } 1/3 \end{cases}$$

Ο καταναλωτής θα πρέπει να επιλέξει ανάμεσα σε όλα τα ζευγάρια (C_1, C_2) όπου όμως το δεύτερο μέλος είναι μια τυχαία μεταβλητή. Το πρόβλημα έχει ήδη γίνει περίπλοκο. Προφανώς το πρόβλημα γίνεται ακόμα πιό περίπλοκο αν ο επενδυτής κληθεί να επιλέξει ανάμεσα σε πολλές αβέβαιες επενδύσεις, η καθεμιά με τα δικά της χαρακτηριστικά αβεβαιότητας.

Θα διευρύνουμε το χώρο X των επιλογών του επενδυτή ώστε να περιλαμβάνει και επιλογές με αβέβαιη έκβαση. Έτσι θα μπορέσουμε να επεκτείνουμε τη συζήτηση της προηγούμενης παραγράφου προσπαθώντας να μελετήσουμε τις προτιμήσεις του επενδυτή.

Πριν προχωρήσουμε, θα κάνουμε κάποιες στοιχειώδεις υποθέσεις σχετικά με τις προτιμήσεις του επενδυτή απέναντι σε επιλογές αβέβαιης έκβασης (δηλ. απέναντι σε λοτταρίες ή στοιχήματα).

5.2.2. Λοτταρίες

5.2.2.1. Ορισμός

Μια (στοιχειώδης) λοτταρία συμβολίζεται με $p \circ x \oplus (1-p) \circ y$ και σημαίνει ότι : «ο επενδυτής λαμβάνει το βραβείο x με πιθανότητα p ή το βραβείο y με πιθανότητα $1-p$»

Τα βραβεία μπορεί να είναι χρήματα, αγαθά ή ακόμα και άλλες λοτταρίες.

5.2.2.2. Αξιώματα

Υιοθετούμε τα εξής αξιώματα σχετικά με τις προτιμήσεις του επενδυτή ως προς τις λοτταρίες:

(L1) $1 \circ x \oplus (1-1) \circ y \sim x$. Ο επενδυτής είναι αδιάφορος ανάμεσα στο να παίξει τη λοτταρία και να λάβει το βραβείο x με πιθανότητα 1 και στο να λάβει απευθείας το βραβείο

(L2) $p \circ x \oplus (1-p) \circ y \sim (1-p) \circ y \oplus p \circ x$

(L3) $q \circ (p \circ x \oplus (1-p) \circ y) \oplus (1-p) \circ y \sim (qp) \circ x \oplus (1-qp) \circ y$. Οι προτιμήσεις του επενδυτή για κάποια λοτταρία εξαρτώνται μόνο από τις πιθανότητες που συνοδεύουν το κάθε βραβείο.

(L4) Έστω x, y λοτταρίες με $x \succ y$ τότε $p \circ x \oplus (1-p) \circ y \succ q \circ x \oplus (1-q) \circ y \Leftrightarrow p > q$. Δηλαδή αν έχω δύο βραβεία,το ένα προτιμότερο από το άλλο, τότε μια λοτταρία με αυτά τα βραβεία είναι προτιμότερη από μια άλλη λοτταρία με τα ίδια βραβεία, επειδή δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσω το καλύτερο βραβείο.

5.2.3 Προτιμήσεις

Έστω λοιπόν X το σύνολο επιλογών ενός επενδυτή (το οποίο τώρα μορεί να περιλαμβάνει και λοτταρίες).
Κατά τα γνωστά υποθέτουμε ότι ο επενδυτής εκφράζει προτιμήσεις για τα στοιχεία του X (καθορίζοντας έτσι μια σχέση προτίμησης $\succ$ στο X), δηλαδή αν $x, y \in X$ τότε
$x \succ y$ $\Leftrightarrow$ [ο επενδυτής προτιμάει την x τουλάχιστον όσο και την y]
Επίσης υποθέτουμε ότι οι προτιμήσεις του επενδυτή είναι ορθολογικές και συνεχείς, δηλαδή ικανοποιούν
(i) πληρότητα: $\forall x, y \in X \Rightarrow x \succ y$ ή $y \succ x$ ή και τα δύο ($x \sim y$)
(ii) ανακλαστικότητα: $\forall x \in X \Rightarrow x \succ x$
(iii) μεταβατικότητα: $\forall x, y, z \in X$ με $x \succ y$ και $y \succ z \Rightarrow x \succ z$
(iv) συνέχεια: τα σύνολα $\Lambda_z^{+} = \{x \in X : x \succ z\}$ και $\Lambda_z^{-} = \{x \in X : x \prec z\}$ είναι κλειστά
Τότε, όπως έχουμε δεί, υπάρχει συνάρτηση ωφελιμότητας $u : X \to \mathbb{R}$ η οποία περιγράφει τις προτιμήσεις του επενδυτή μέσω της σχέσης $x \succ y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)\ \forall x, y \in X$

Ας σκεφτούμε τώρα για μια στιγμή ότι όταν ο επενδυτής εξετάζει μια αβέβαιη επένδυση, ουσιαστικά εξετάζει μια λοταρία ή ένα στοίχημα L, το οποίο π.χ. θα του αποφέρει ένα ποσό x με πιθανότητα p ή ένα ποσό y με πιθανότητα $1-p$. Ο επενδυτής έχει ωφελιμότητα $u(x)$ για το (βέβαιο) ποσό x, ωφελιμότητα $u(y)$ για το (βέβαιο) ποσό y και ωφελιμότητα $u(L)$ για το στοίχημα L. Αναρωτιέμαι μήπως θα μπορούσαμε να συσχετίσουμε με κάποιο τρόπο το $u(L)$ με τα πιο στοιχειώδη $u(x)$ και $u(y)$ λαμβανομένης υπόψη και της πιθανότητας p, δηλαδή μήπως θα μπορούσαμε να αναπαραστήσουμε την ωφελιμότητα από το αβέβαιο στοίχημα συναρτήσει των ωφελιμοτήτων των αποτελεσμάτων του στοιχήματος και των πιθανοτήτων τους? Μοιάζει ότι κάτι τέτοιο θα αποτελούσε μια πιο «βολική» αναπαράσταση των προτιμήσεων του επενδυτή. Και πράγματι, αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν υιοθετήσουμε ακόμα ένα αξίωμα σχετικά με τις προτιμήσεις του επενδυτή:

5.2.3.1. Αξίωμα ανεξαρτησίας

(v) Ανεξαρτησία: $\forall x, y, z \in X$ με $x \succ y \;\Rightarrow\; p \circ x \oplus (1-p) \circ z \succ p \circ y \oplus (1-p) \circ z$

5.2.3.2. Ορισμός (αναμενόμενης ωφελιμότητας)

Μια συνάρτηση ωφελιμότητας η οποία ικανοποιεί τη σχέση $u(p \circ x \oplus (1-p) \circ y) = p \cdot u(x) + (1-p) \cdot u(y)$ λέμε ότι έχει την ιδιότητα της αναμενόμενης ωφελιμότητας και ονομάζεται συνάρτηση αναμενόμενης ωφελιμότητας.

(Σημείωση: Δηλαδή για τις συναρτήσεις αναμενόμενης ωφελιμότητας έχουμε ότι η ωφελιμότητα μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι η αναμενόμενη τιμή της ωφελιμότητας των τιμών της τυχαίας μεταβλητής. Θα γράφουμε Eu(X) για να συμβολίζουμε την αναμενόμενη ωφελιμότητα της τυχαίας μεταβλητής X (για να μην δημιουργείται σύγχιση με την τυχαία μεταβλητή u(X) που έχει ως τιμές τις ωφελιμότητες των τιμών της X. Όπου καταστρατηγούμε αυτόν τον κανόνα θα είναι προφανές τι εννοούμε).

5.2.3.3. Θεώρημα (ύπαρξης αναμενόμενης ωφελιμότητας)
(Von Neumann & Morgenstern, 1944)

Εάν (X, $\succ$) ικανοποιεί τα αξιώματα **(i)-(v)** τότε υπάρχει μια συνάρτηση ωφελιμότητας $u : X \to \mathbb{R}$ που περιγράφει τη σχέση προτίμησης $\succ$ και επιπλέον: $u(p \circ x \oplus (1-p) \circ y) = p \cdot u(x) + (1-p) \cdot u(y)$, δηλαδή η u έχει την ιδιότητα της αναμενόμενης ωφελιμότητας.

*5.2.3.4. **Συμπέρασμα***

Οι επενδυτές που έχουν προτιμήσεις ορθολογικές, συνεχείς και ανεξάρτητες επιλέγουν με κριτήριο τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης ωφελιμοτητας τους

5.2.3.5. Παράδειγμα

Ένας παίκτης τυχερών παιχνιδιών καλείται να διαλέξει ένα από τα εξής δύο στοιχήματα:

A: κερδίζει 10 με πιθανότητα 1/2 ή 20 με πιθανότητα 3/8 ή 40 με πιθανότητα 1/8

B: κερδίζει 35 με πιθανότητα 1/2 ή 0 με πιθανότητα 1/2

Έστω επίσης ότι οι προτιμήσεις του καθορίζονται από μια συνάρτηση αναμενόμενης ωφελιμότητας $u(x) = x - \frac{x^2}{100}$.

Τότε ο παίκτης θα επιλέξει εκείνο το στοίχημα που του προσφέρει τη μεγαλύτερη αναμενόμενη ωφελιμότητα (προσέξτε ότι τα δύο στοιχήματα έχουν την ίδια μέση τιμή)

$$u(A) = u(\frac{1}{2} \circ 10 \oplus \frac{3}{8} \circ 20 \oplus \frac{1}{8} \circ 40) = \frac{1}{2} u(10) + \frac{3}{8} u(20) + \frac{1}{8} u(40) \Rightarrow$$

$$u(A) = \frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{3}{8} \cdot 16 + \frac{1}{8} \cdot 24 = 13,5$$

Παρόμοια

$$u(B)=u(\frac{1}{2}\circ 35\oplus\frac{1}{2}\circ 0)=\frac{1}{2}u(35)+\frac{1}{2}u(0)\Rightarrow$$

$$u(B)=\frac{1}{2}\cdot 22,75+\frac{1}{2}\cdot 0=11,375$$

Άρα ο παίκτης θα επιλέξει το στοίχημα Α αφού $u(A)>u(B)$

5.2.3.6. Παράδειγμα

Ένας επενδυτής με συνάρτηση ωφελιμότητας $u(W)=4\cdot W-\frac{W^2}{10}$, όπου W ο πλούτος του επενδυτή καλείται να επιλέξει μια από τις επόμενες επενδύσεις

Επένδυση Α		Επένδυση Β		Επένδυση Γ	
Αποτέλεσμα σε πλούτο	Πιθανότητα	Αποτέλεσμα σε πλούτο	Πιθανότητα	Αποτέλεσμα σε πλούτο	Πιθανότητα
20	3/15	19	1/5	18	1/4
18	5/15	10	2/5	16	1/4
14	4/15	5	2/5	12	1/4
10	2/15			8	1/4
6	1/15				

Θα υπολογίσει την αναμενόμενη ωφελιμότητα που του παρέχει κάθε μια από αυτές τις επενδύσεις

Επένδυση Α		Επένδυση Β		Επένδυση Γ	
Ωφελιμότητα αποτελέσματος	Πιθανότητα	Ωφελιμότητα αποτελέσματος	Πιθανότητα	Ωφελιμότητα αποτελέσματος	Πιθανότητα
40	3/15	39,9	1/5	39,6	1/4
39,6	5/15	30	2/5	38,4	1/4
36,4	4/15	17,5	2/5	33,6	1/4
30	2/15			25,6	1/4
20,4	1/15				

Άρα

Αναμενόμενη ωφελιμότητα		
Επένδυση Α	Επένδυση Β	Επένδυση Γ
36,3	26,98	34,4

Επομένως θα επιλέξει την επένδυση Α.

5.2.4. Αξιωματική προσέγγιση στην ύπαρξη συνάρτησης αναμενόμενης ωφελιμότητας

Σε αυτή την παράγραφο θα επιχειρήσουμε να δείξουμε ότι πράγματι ένας επενδυτής που έχει προτιμήσεις ορθολογικές, συνεχείς και ανεξάρτητες συμπεριφέρεται όπως κάποιος που επιλέγει με κριτήριο τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης ωφελιμοτητας του.

Ας ξαναδούμε τα αξιώματα μας (κάποια ελαφρά τροποποιημένα)

A1. Πληρότητα: Ένας επενδυτής εκφράζει προτίμηση ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε βέβαια στοιχεία
A2. Μεταβατικότητα: Ένας επενδυτής είναι συνεπής στη διάταξη των προτιμήσεων του
A3. Ανεξαρτησία: Έστω δύο βέβαια στοιχεία x, y ως προς τα οποία ο επενδυτής είναι αδιάφορος και έστω z ένα ακόμα βέβαιο στοιχείο. Τότε ο επενδυτής είναι αδιάφορος ανάμεσα στα εξής στοιχήματα: $p \circ x \oplus (1-p) \circ z$ και $p \circ y \oplus (1-p) \circ z$
A4. «Συνέχεια»

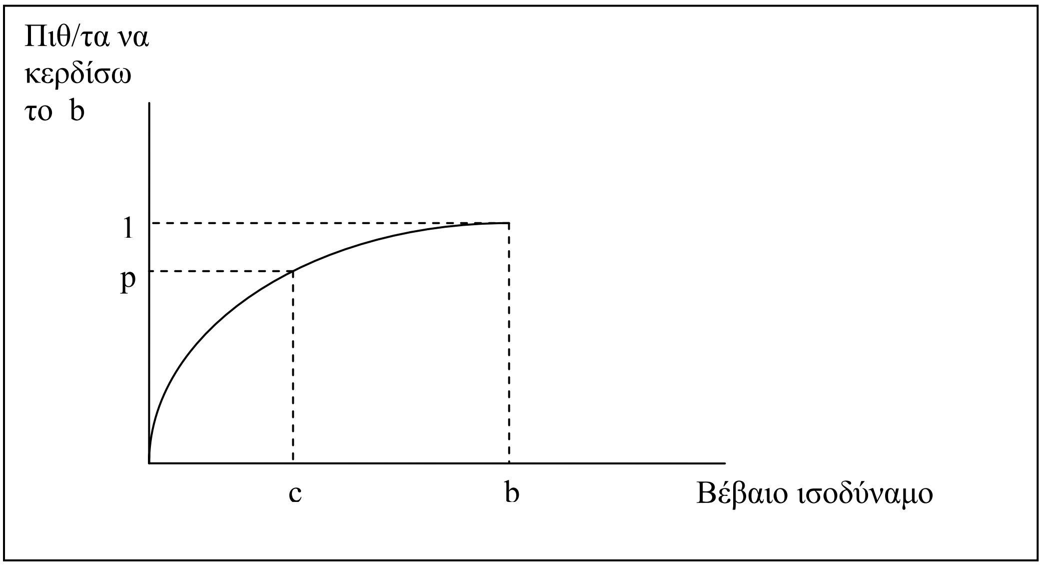
A4.1 Βέβαιο Ισοδύναμο: Για κάθε στοίχημα υπάρχει ένα βέβαιο στοιχείο (που το ονομάζουμε βέβαιο ισοδύναμο του στοιχήματος), τέτοιο ώστε ο επενδυτής να είναι αδιάφορος ανάμεσα στο να επιλέξει το στοίχημα ή το σίγουρο ποσό του βέβαιου ισοδύναμου

A4.2 Εάν $x \succ y$ τότε $p \circ x \oplus (1-p) \circ y \succ q \circ x \oplus (1-q) \circ y \Leftrightarrow p > q$ (δηλαδή αν υπάρχουν δύο βραβεία που το ένα είναι προτιμότερο από το άλλο, τότε ανάμεσα σε δύο λοτταρίες που αποτελούνται από αυτά τα βραβεία θα επιλέξω εκείνη που δίνει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσω το «καλό» βραβείο)

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια επένδυση G με δύο πιθανές εκβάσεις.

$$G = \begin{cases} b & \text{με πιθανότητα } p \\ 0 & \text{με πιθανότητα } 1-p \end{cases}$$

Έστω c το βέβαιο ισοδύναμο αυτής της επένδυσης (γνωρίζουμε ότι υπάρχει από το A4.1). Προφανώς το c εξαρτάται από την τιμή του p (βλέπε το επόμενο διάγραμμα).



Έστω τώρα μια επένδυση που παράγει τα εξής αποτελέσματα:

$$S_1 = \begin{cases} \mathrm{w}_1 & \text{με πιθανότητα } p_1 \\ \vdots & \\ \mathrm{w}_\mathrm{N} & \text{με πιθανότητα } 1-p_N \end{cases}$$

Κάθε ένα από τα w_i μπορεί να θεωρηθεί ως το βέβαιο ισοδύναμο κάποιου στοιχήματος της μορφής

$$G_i = \begin{cases} b & \text{με πιθανότητα } \mathrm{q}_i \\ 0 & \text{με πιθανότητα } 1-q_i \end{cases}$$

Επομένως η επένδυση S_1 είναι ισοδύναμη με την επένδυση

$$S_2 = \begin{cases} \begin{bmatrix} b & \text{με πιθανότητα } \mathrm{q}_1 \\ 0 & \text{με πιθανότητα } 1-q_1 \end{bmatrix} & \text{με πιθανότητα } p_1 \\ \vdots & \\ \begin{bmatrix} b & \text{με πιθανότητα } \mathrm{q}_N \\ 0 & \text{με πιθανότητα } 1-q_N \end{bmatrix} & \text{με πιθανότητα } p_N \end{cases}$$

Είναι σαφές όμως ότι η S_2 μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$S_2 = \begin{cases} b & \text{με πιθανότητα } \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot p_i \\ 0 & \text{με πιθανότητα } \sum_{i=1}^{N} (1-q_i) \cdot p_i \end{cases}$$

Αν είχα και μια άλλη επένδυση S_1' θα μπορούσα να τη φέρω και αυτ΄στην ισοδύναμη μορφή $S_2' = \begin{cases} b & \text{με πιθανότητα } H \\ 0 & \text{με πιθανότητα } 1-H \end{cases}$.

Αν λοιπόν $\sum_{i=1}^{N} q_i \cdot p_i > H$, τότε προφανώς θα προτιμήσω την S_1 από την S_1'. Αρα το $\sum_{i=1}^{N} q_i \cdot p_i$ αποτελεί το κριτήριο που επιλέγω ανάμεσα στις διάφορες επενδύσεις.

Ορίζω $u: \{w_1, \ldots, w_N\} \to [0,1]$ με $u(w_i) = q_i$

Τότε $\sum_{i=1}^{N} q_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{N} u(w_i) \cdot p_i = \mathrm{E}[u(w_1, \ldots, w_N)]$

Αν ονομάσω λοιπόν u την ωφελιμότητα τότε $\sum_{i=1}^{N} u(w_i) \cdot p_i$ είναι η αναμενόμενη ωφελιμότητα.

5.3. Οικονομικές ιδιότητες των συναρτήσεων ωφελιμότητας

Εξετάζουμε τις συναρτήσεις ωφελιμότητας σε όρους του τελικού πλούτου του επενδυτή.

5.3.1. Ιδιότητα Ι – Περισσότερος πλούτος είναι προτιμότερος από λιγότερο

Περισσότερος πλούτος είναι προτιμότερος από λιγότερο $\Leftrightarrow$

Η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι αύξουσα $\Leftrightarrow$

$u'(w) > 0$

5.3.2. Ιδιότητα ΙΙ - Προτιμήσεις του επενδυτή απέναντι στον κίνδυνο

Τρείς δυνατοί χαρακτήρες ορίζονται με βάση τις προτιμήσεις τους απέναντι σε ένα δίκαιο στοίχημα:

Π.χ. Ας φαντασθούμε έναν επενδυτή ο οποίος έχει 1\$. Του παρουσιάζουμε δύο επιλογές, η μία είναι να κρατήσει το 1\$ ενώ η άλλη είναι να το ανταλλάξει με ένα δίκαιο στοίχημα Σ. Ο τελικός του πλούτος λοιπόν θα είναι ανάλογα με την επιλογή του:

Β (βέβαιη επένδυση)		Σ (δίκαιο στοίχημα)	
Αποτέλεσμα	Πιθανότητα	Αποτέλεσμα	Πιθανότητα
1	1	2	1/2
		0	1/2

Το στοίχημα Σ είναι δίκαιο αφού έχει μέση τιμή ίση με 1, όσο το κόστος συμμετοχής του επενδυτή στο Σ. Για να αποφασίσει ο επενδυτής θα συγκρίνει τις αναμενόμενες ωφελιμότητες του τελικού του πλούτου από τις δύο εναλλακτικές Β και Σ.

Π.χ. ο επενδυτής απορρίπτει το δίκαιο στοίχημα $\Leftrightarrow$

$$B \succ A \Leftrightarrow u(B) > u(A) \Leftrightarrow u(1) > \frac{1}{2}\cdot u(2) + \frac{1}{2}\cdot u(0) \Leftrightarrow u(1) - u(0) > u(2) - u(1)$$

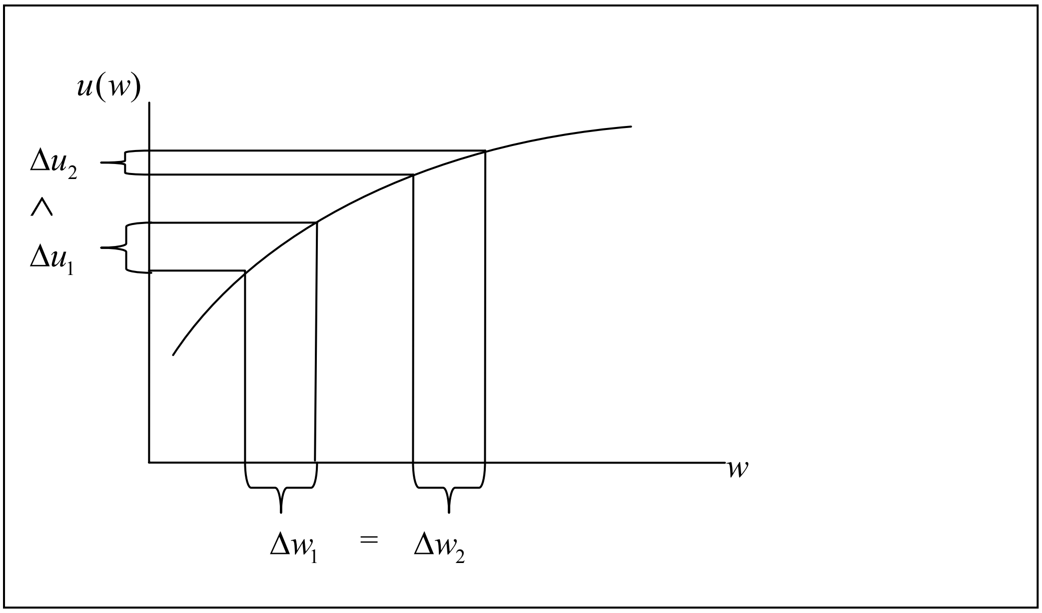
Δηλαδή παρατηρώ ότι η απόρριψη του δίκαιου στοιχήματος ισοδυναμεί με το ότι η μεταβολή της ωφελιμότητας του όταν ο πλούτος του αλλάζει από το 0 στο 1 είναι μεγαλύτερη από τη μεταβολή της ωφελιμότητας του όταν ο πλούτος του αλλάζει από το 1 στο 2.

5.3.2.1. Αποστροφή στον Κίνδυνο

Αποστροφή στον κίνδυνο $\Leftrightarrow$

Ο επενδυτής απορρίπτει πάντα ένα δίκαιο στοίχημα $\Leftrightarrow$

$u''(w) < 0$



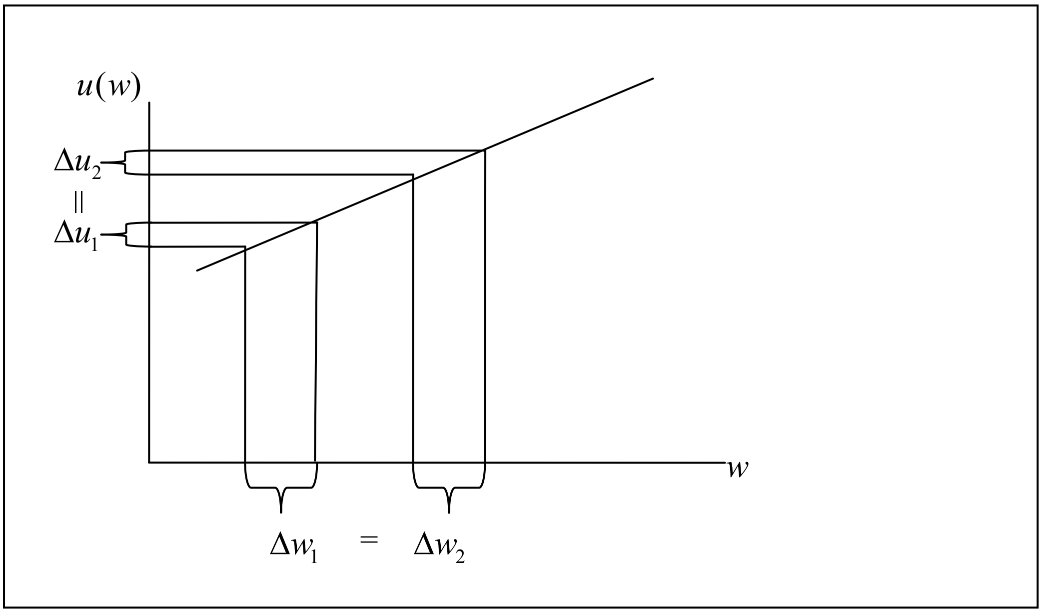
Παρατηρείστε ότι η $u(w)$ είναι αύξουσα αλλά με μειούμενο ρυθμό. Η ωφελιμότητα που αποκομίζει κανείς όταν ο πλούτος του είναι π.χ. 10\$ και αυξηθεί κατά 1\$ είναι πολύ μεγαλύτερη από την ωφελιμότητα που αποκομίζει αν ο πλούτος του είναι 10.000\$ και αυξηθεί κατά 1\$.

5.3.2.2. Ουδετερότητα στον Κίνδυνο

Ουδετερότητα στον κίνδυνο $\Leftrightarrow$

Ο επενδυτής είναι αδιάφορος απέναντι σε ένα δίκαιο στοίχημα $\Leftrightarrow$

$u''(w) = 0$

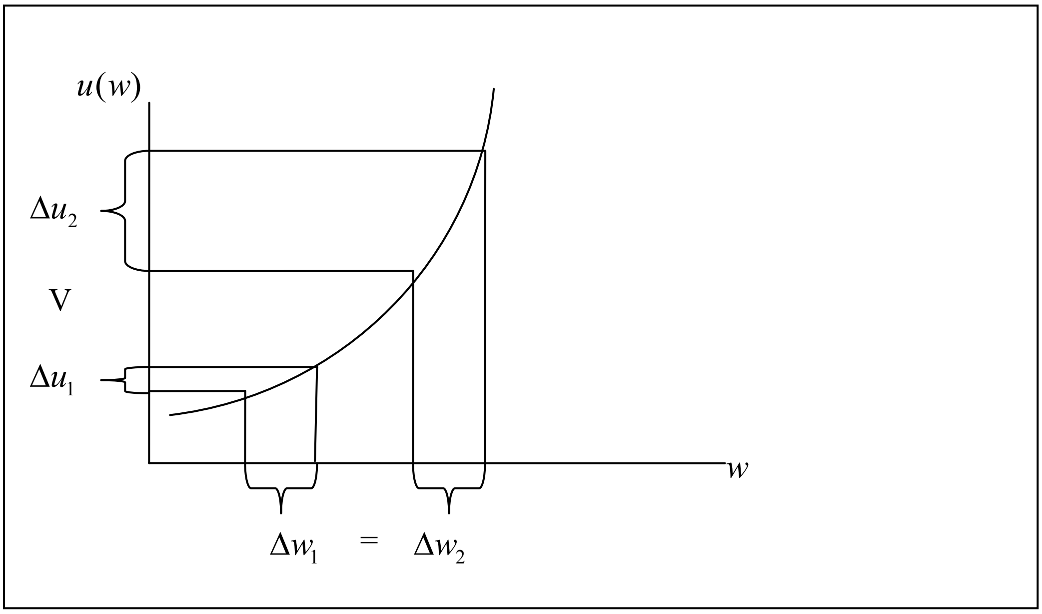


5.3.2.3. Προτίμηση στον κίνδυνο

Προτίμηση στον κίνδυνο $\Leftrightarrow$

Ο επενδυτής επιλέγει πάντα ένα δίκαιο στοίχημα $\Leftrightarrow$

$u''(w) > 0$



5.3.3. Ιδιότητα ΙΙΙ - Πως μεταβάλλονται οι προτιμήσεις του επενδυτή καθώς μεταβάλλεται ο πλούτος του?

Καθώς αυξάνεται ο πλούτος του επενδυτή αυτός θα τοποθετεί μεγαλύτερο η μικρότερο ποσό χρημάτων σε αβέβαια στοιχεία? Ισοδύναμα, πως εξαρτάται από το επίπεδο του πλούτου του, το ποσό που θα ήταν διατεθειμένος να πληρώσει για να ασφαλισθεί απέναντι σε δεδομένο κίνδυνο?

Παρόμοια μπορούμε να ρωτήσουμε, καθώς αυξάνεται ο πλούτος του επενδυτή, αυτός θα τοποθετεί μεγαλύτερο η μικρότερο ποσοστό του πλούτου του σε αβέβαια στοιχεία? Ισοδύναμα, πως εξαρτάται από το επίπεδο του πλούτου του, το ποσοστό του πλούτου του που θα ήταν διατεθειμένος να πληρώσει για να ασφαλισθεί απέναντι σε δεδομένο κίνδυνο?

5.3.3.1 Μέτρο Απόλυτης Αποστροφής στον Κίνδυνο

Έστω επενδυτής με πλούτο W και συνάρτηση ωφελιμότητας u. Ας θεωρήσουμε επίσης μια επένδυση με αβέβαιη έκβαση που αναπαρίσταται από μια τυχαία μεταβλητή Z. Ας υποθέσουμε επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η Z είναι δίκαιο στοίχημα με $E(Z)=0$ και έστω σ_Z^2 η διακύμανση της Z.

Έστω ότι ο επενδυτής έχει τον πλούτο W και έχει κάνει απίσης αι την επένδυση Z. Δηλαδή ο επενδυτής αντιμετωπίζει την τυχαία μεταβλητή $W+Z$

Έστω W_c το βέβαιο ισοδύναμο του $W+Z$. Αυτό σημαίνει ότι ο επενδυτής είναι αδιάφορος ανάμεσα στο να έχει βέβαιο πλούτο W_c και στο να έχει τον αβέβαιο πλούτο $W+Z$, δηλαδή το W_c είναι τέτοιο ώστε $W_c \sim W+Z$.

Η διαφορά ανάμεσα στα W και W_c είναι το μεγαλύτερο ποσό που θα ήταν διατεθιμένος να θυσιάσει ο επενδυτής προκειμένου να απαλλαγεί από τον κίνδυνο Z. Άρα αν ο επενδυτής ασφαλιζόταν απέναντι στον κίνδυνο Z, το μεγαλύτερο ασφάλιστρ που θα ήταν διατεθειμένος να πληρώσει θα ήταν $\pi = W - W_c$. Επομένως το π εκφράζει ένα μέτρο απόλυτης αποστροφής του επενδυτή αέναντι στον κίνδυνο.

Ας θεωρήσουμε το ανάπτυγμα Taylor του $u(W+Z)$ γύρω από το W.

$$u(W+Z) = u(W) + u'(W)\cdot(W+Z-W) + \frac{u''(W)}{2!}\cdot(W+Z-W)^2 + \dots$$

Λαμβάνοντας τη μέση τιμή έχουμε:

$$E[u(W+Z)] = E[u(W)] + E[u'(W)\cdot Z] + E[\frac{u''(W)}{2!}\cdot Z^2] + \dots \Rightarrow$$

$$E[u(W+Z)] = u(W) + u'(W)\cdot E[Z] + \frac{u''(W)}{2!}\cdot E[Z^2] + \dots \Rightarrow$$

$$E[u(W+Z)] = u(W) + \frac{u''(W)}{2!}\cdot E[(Z-E(Z))^2] + \dots \Rightarrow$$

$$E[u(W+Z)] \cong u(W) + \frac{u''(W)}{2!}\cdot \sigma_Z^2 \qquad (*)$$

Παρόμοια:

$$W_c = W - \pi \Rightarrow$$

$$u(W_c) = u(W-\pi) \Rightarrow$$

$$u(W_c) = u(W) + u'(W)\cdot(W-\pi-W) + \dots \Rightarrow$$

$$u(W_c) \cong u(W) + u'(W)\cdot(-\pi) \qquad (**)$$

Άρα,

$$W_c \sim W+Z \Leftrightarrow u(W_c) = E[u(W+Z)] \Leftrightarrow$$

$$u(W) + u'(W)\cdot(-\pi) = u(W) + \frac{u''(W)}{2!}\cdot\sigma_Z^2 \Leftrightarrow$$

$$\pi = \frac{1}{2}\cdot\sigma_Z^2\cdot\frac{-u''(W)}{u'(W)} \Leftrightarrow$$

$$\pi = \frac{1}{2}\cdot\sigma_Z^2\cdot A(W)$$

Όπου $A(W) = \dfrac{-u''(W)}{u'(W)}$

Προφανώς όσο μεγαλύτερο είναι το $A(W)$, τόσο μεγαλύτερο ποσό είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο επενδυτής σε ασφάλιστρο.

<u>Ορισμοί</u>

Η συνάρτηση $A(W) = \dfrac{-u''(W)}{u'(W)}$ ονομάζεται ***μέτρο απόλυτης αποστροφής*** στον κίνδυνο

Εάν η συνάρτηση $A(W)$ είναι αύξουσα ($A'(W)$>0), λέμε ότι ο επενδυτής έχει ***αύξουσα απόλυτη αποστροφή*** στον κίνδυνο. Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο πλούτος του τόσο μεγαλύτερο ασφάλιστρο είναι διατεθειμένος να πληρώσει για να ασφαλισθεί απέναντι σε δεδομένο κίνδυνο. Ισοδύναμα, καθώς μεγαλώνει ο πλούτος του επενδυτή αυτός τοποθετεί όλο και μικρότερο ποσό σε αβέβαιες επενδύσεις. Ένα παράδειγμα συνάρτησης ωφελιμότητας που αντανακλά αυτή τη συμπεριφορά δίδεται από την $u(W) = W^{-cW^2}$

Εάν η συνάρτηση $A(W)$ είναι σταθερή ($A'(W)$=0), λέμε ότι ο επενδυτής έχει ***σταθερή απόλυτη αποστροφή*** στον κίνδυνο. Αυτό σημαίνει ότι το ασφάλιστρο που είναι διατεθειμένος να πληρώσει για να ασφαλισθεί απέναντι σε δεδομένο κίνδυνο ο επενδυτής είναι ανεξάρτητο από το επίπεδο του πλούτου του. Ισοδύναμα, καθώς μεγαλώνει ο πλούτος του επενδυτή αυτός τοποθετεί το ίδιο ποσό σε αβέβαιες επενδύσεις. Ένα παράδειγμα συνάρτησης ωφελιμότητας που αντανακλά αυτή τη συμπεριφορά δίδεται από την $u(W) = -e^{-cW}$

Εάν η συνάρτηση $A(W)$ είναι φθίνουσα ($A'(W)$<0), λέμε ότι ο επενδυτής έχει ***φθίνουσα απόλυτη αποστροφή*** στον κίνδυνο. Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο πλούτος του τόσο μικρότερο ασφάλιστρο είναι διατεθειμένος να πληρώσει για να ασφαλισθεί απέναντι σε δεδομένο κίνδυνο. Ισοδύναμα, καθώς μεγαλώνει ο πλούτος του επενδυτή αυτός τοποθετεί όλο και μεγαλύτερο ποσό σε αβέβαιες επενδύσεις. Ένα παράδειγμα συνάρτησης ωφελιμότητας που αντανακλά αυτή τη συμπεριφορά δίδεται από την $u(W) = \ln(W)$

<u>*5.3.3.2. Μέτρο Σχετικής Αποστροφής στον Κίνδυνο*</u>

Σε συνέχεια της προηγούμενης παραγράφου, θα εισάγουμε ένα άλλο μέτρο αποστροφής στον κίνδυνο που εστιάζει στον κίνδυνο ως ποσοστό του πλούτου του επενδυτή. Συγκεκριμένα, έστω επενδυτής με πλούτο W και συνάρτηση ωφελιμότητας u. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι ο επενδυτής έχει τοποθετήσει τον πλούτο του σε μια επένδυση η απόδοση της οποίας είναι αβέβαιη και αναπαρίσταται από μια τυχαία μεταβλητή R. Ας υποθέσουμε επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η R είναι δίκαιο στοίχημα με $E(R) = 0$ και έστω σ_R^2 η διακύμανση της R.

Δηλαδή ο τελικός πλούτος του επενδυτή περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή $W + WR$

Αναρωτιόμαστε ποιο είναι το μεγαλύτερο ποσοστό ϖ του πλούτου του επενδυτή που θα ήταν διατεθειμένος να πληρώσει σε ασφάλιστρο προκειμενου να απαλλαγεί από τον κίνδυνο R.

Προφανώς το μεγαλύτερο τέτοιο ποσοστό ϖ που θα ήταν διατεθειμένος να πληρώσει είναι τέτοιο ώστε να είναι αδιάφορος ανάμεσα στο να κρατήσει την αβέβαιη επένδυση ή να απαλλαγεί από την αβεβαιότητα που αυτή εκφράζει, δηλαδή:

$W + WR \sim W - \varpi W$

Το αριστερό μέλος της προηγούμενης σχέσης εκφράζει τον τελικό του πλούτο αν δεν ασφαλισθεί απέναντι στον κίνδυνο R ενώ το δεξί μέλος εκφράζει τον τελικό του πλούτο εάν ασφαλισθεί έναντι ποσού ϖW

Η σχέση αυτή ισοδυναμεί με την

$Eu(W + WR) = u(W - \varpi W)$

Θεωρώντας το ανάπτυγμα Taylor στο $u(W + WR)$ γύρω από το W έχουμε:

$$u(W + WR) = u(W) + u'(W)(W + WR - W) + \frac{1}{2}u''(W)(W + WR - W)^2 + \ldots \Rightarrow$$

$$Eu(W + WR) = u(W) + u'(W)WE(R) + \frac{1}{2}u''(W)W^2E(R^2) + \ldots \Rightarrow$$

$Eu(W+WR)=u(W)+\frac{1}{2}u''(W)W^2\sigma_R^2+\ldots$

Αντίστοιχα, θεωρώντας το ανάπτυγμα Taylor στο $u(W-\varpi W)$ γύρω από το W έχουμε:

$u(W-\varpi W)=u(W)+u'(W)(-\varpi W)+\ldots$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει

$$\varpi=\frac{1}{2}\sigma_R^2\left(\frac{-u''(W)}{u'(W)}W\right)=\frac{1}{2}\sigma_R^2\left(A(W)W\right)$$

<u>Ορισμοί</u>

Η συνάρτηση $R(W)=A(W)W=\dfrac{-u''(W)}{u'(W)}W$ ονομάζεται ***μέτρο σχετικής αποστροφής*** στον κίνδυνο.

Εάν η συνάρτηση $R(W)$ είναι αύξουσα ($R'(W)$>0), λέμε ότι ο επενδυτής έχει ***αύξουσα σχετική αποστροφή*** στον κίνδυνο. Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο πλούτος του τόσο μεγαλύτερο ποσοστό του πλούτου του είναι διατεθειμένος να πληρώσει για να ασφαλισθεί απέναντι σε δεδομένο κίνδυνο. Ισοδύναμα, καθώς μεγαλώνει ο πλούτος του επενδυτή αυτός τοποθετεί όλο και μικρότερο ποσοστό του πλούτου του σε αβέβαιες επενδύσεις. Ένα παράδειγμα συνάρτησης ωφελιμότητας που αντανακλά αυτή τη συμπεριφορά δίδεται από την $u(W)=W-b\cdot W^2$

Εάν η συνάρτηση $R(W)$ είναι σταθερή ($R'(W)$=0), λέμε ότι ο επενδυτής έχει ***σταθερή σχετική αποστροφή*** στον κίνδυνο. Αυτό σημαίνει ότι το ποσοστό του πλούτου του που είναι διατεθειμένος να πληρώσει για να ασφαλισθεί απέναντι σε δεδομένο κίνδυνο είναι ανεξάρτητο από το επίπεδο του πλούτου του.. Ισοδύναμα, καθώς μεγαλώνει ο πλούτος του επενδυτή αυτός τοποθετεί το ίδιο ποσοστό του πλούτου του σε αβέβαιες επενδύσεις. Ένα παράδειγμα συνάρτησης ωφελιμότητας που αντανακλά αυτή τη συμπεριφορά δίδεται από την $u(W)=\ln(W)$

Εάν η συνάρτηση $R(W)$ είναι φθίνουσα ($R'(W)$<0), λέμε ότι ο επενδυτής έχει ***φθίνουσα σχετική αποστροφή*** στον κίνδυνο. Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο πλούτος του τόσο μικρότερο ποσοστό του πλούτου του είναι διατεθειμένος να πληρώσει για να ασφαλισθεί απέναντι σε δεδομένο κίνδυνο. Ισοδύναμα, καθώς μεγαλώνει ο πλούτος του επενδυτή αυτός τοποθετεί όλο και μεγαλύτερο ποσοστό του πλούτου του σε αβέβαιες επενδύσεις. Ένα παράδειγμα συνάρτησης ωφελιμότητας που αντανακλά αυτή τη συμπεριφορά δίδεται από την $u(W)=-e^{2\cdot W^{-1/2}}$

5.3.4. Συνοψίζοντας

Ι. Περισσότερος πλούτος είναι προτιμότερος από λιγότερο $\Leftrightarrow u'(w)>0$

ΙΙ. Προτιμήσεις ως προς τον κίνδυνο

Κριτήριο: $u''(w)$

Κατάσταση	Ορισμός	Ιδιότητα

Αποστροφή στον κίνδυνο	Απορρίπτει το δίκαιο στοίχημα	$u''(w) < 0$
Ουδετερότητα στον κίνδυνο	Αδιάφορος στο δίκαιο στοίχημα	$u''(w) = 0$
Προτίμηση στον κίνδυνο	Επιλέγει το δίκαιο στοίχημα	$u''(w) > 0$

III. Μέτρα αποστροφής στον κίνδυνο

Μέτρο απόλυτης αποστροφής $A(W) = \dfrac{-u''(W)}{u'(W)}$

Μέτρο σχετικής αποστροφής $R(W) = A(W)W = \dfrac{-u''(W)}{u'(W)}W$

IV. Απόλυτη Αποστροφή στον κίνδυνο Κριτήριο: $A'(W)$

Κατάσταση	Ορισμός	Ιδιότητα	παράδειγμα
Αύξουσα Απόλυτη Αποστροφή στον κίνδυνο	Καθώς ο πλούτος αυξάνεται τοποθετεί μικρότερο ποσό σε αβέβαιες επενδύσεις	$A'(w) > 0$	$u(W) = W^{-cW^2}$
Σταθερή Απόλυτη Αποστροφή στον κίνδυνο	Καθώς ο πλούτος αυξάνεται τοποθετεί το ίδιο ποσό σε αβέβαιες επενδύσεις	$A'(w) = 0$	$u(W) = -e^{-cW}$
Φθίνουσα Απόλυτη Αποστροφή στον κίνδυνο	Καθώς ο πλούτος αυξάνεται τοποθετεί μεγαλύτερο ποσό σε αβέβαιες επενδύσεις	$A'(w) < 0$	$u(W) = \ln(W)$

V. Σχετική Αποστροφή στον κίνδυνοΚριτήριο: $R'(W)$

Κατάσταση	Ορισμός	Ιδιότητα	παράδειγμα
Αύξουσα Σχετική Αποστροφή στον κίνδυνο	Καθώς ο πλούτος αυξάνεται τοποθετεί μικρότερο ποσοστό σε αβέβαιες επενδύσεις	$R'(w) > 0$	$u(W) = W - b \cdot W^2$
Σταθερή Σχετική Αποστροφή στον κίνδυνο	Καθώς ο πλούτος αυξάνεται τοποθετεί το ίδιο ποσοστό σε αβέβαιες επενδύσεις	$R'(w) = 0$	$u(W) = \ln(W)$
Φθίνουσα Σχετική Αποστροφή στον κίνδυνο	Καθώς ο πλούτος αυξάνεται τοποθετεί μεγαλύτερο ποσοστό σε αβέβαιες επενδύσεις	$R'(w) < 0$	$u(W) = -e^{2 \cdot W^{-1/2}}$

5.4. Παραδείγματα

5.4.1. Παράδειγμα 1

Έστω ότι ο υπάλληλος μιας Τράπεζας πρέπει να αποφασίσει για την έγκριση δανείου σε κάποιο πελάτη. Αντιμετωπίζει λοιπόν τα εξής ενδεχόμενα:
E1: Εγκρίνει το δάνειο και ο πελάτης αποδεικνύεται αξιόπιστος
E2: Δεν εγκρίνει το δάνειο και ο πελάτης αποδεικνύεται αξιόπιστος
E3: Εγκρίνει το δάνειο και ο πελάτης αποδεικνύεται αναξιόπιστος
E4: Δεν εγκρίνει το δάνειο και ο πελάτης αποδεικνύεται αναξιόπιστος
Έστω ότι το ενδεχόμενο E_i μπορί να συμβεί με πιθανότητα p_i. Δηλαδή ο υπάλληλος αντιμετωπίζει τη λοτταρία $p_1 \circ E_1 \oplus p_2 \circ E_2 \oplus p_3 \circ E_3 \oplus p_4 \circ E_4$ με $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Έστω επίσης ότι στα ενδεχόμενα E_i αντιστοιχούν χρηματικά ποσά X_i (π.χ. κέρσος ή ζημιά της Τράπεζας εάν συμβεί το ενδεχόμενο X_i). Τότε έχυμε μετατρέψει την προηγούμενη λοτταρία σε μια χρηματική λοτταρία $p_1 \circ X_1 \oplus p_2 \circ X_2 \oplus p_3 \circ X_3 \oplus p_4 \circ X_4$

5.4.2. Παράδειγμα 2 (Σύνθετη λοτταρία)

Υποθέτω το πείραμα ρίψης ενός νομίσματος με πιθανά αποτελέσματα Κ για κορώνα και Γ για γράμματα. Έστω επίσης ότι η πιθανότητα να έλθει Κ είναι p ενώ ηπιθανότητα να έλθει Γ είναι $1-p$. Μπορώ να ανπαραστήσω τη ρίψη του νομίσματος με μια λοτταρία $p \circ \mathrm{K} \oplus (1-p) \circ \Gamma$
Έστω ότι όταν έρχεται Κ το βραβείο είναι X_K ενώ όταν έρχεται Γ το βραβείο είναι X_Γ. Τότε έχω τη χρηματική λοτταρία $p \circ \mathrm{X}_\mathrm{K} \oplus (1-p) \circ \mathrm{X}_\Gamma$
Έστω τώρα ότι το κέρμα του παιχνιδιού το προμηθεύει κάποιος ο οποίος με πιθανότητα q_1 μας φέρνει ένα νόμισμα που έχει πιθανότητα p_1 για Κ (και $(1-p_1)$ για Γ, με πιθανότητα q_2 μας φέρνει ένα νόμισμα που έχει πιθανότητα p_2 για Κ (και $(1-p_2)$ για Γ και με πιθανότητα q_3 μας φέρνει ένα νόμισμα που έχει πιθανότητα p_3 για Κ (και $(1-p_3)$ για Γ.
Τότε αντιμετωπίζουμε την εξής σύνθετη λοτταρία:
$$q_1 \circ [p_1 \circ \mathrm{X}_\mathrm{K} \oplus (1-p_1) \circ \mathrm{X}_\Gamma] \oplus q_2 \circ [p_2 \circ \mathrm{X}_\mathrm{K} \oplus (1-p_2) \circ \mathrm{X}_\Gamma] \oplus q_3 \circ [p_3 \circ \mathrm{X}_\mathrm{K} \oplus (1-p_3) \circ \mathrm{X}_\Gamma]$$
Προφανώς η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος το βραβείο X_K είναι $q_1 \cdot p_1 + q_2 \cdot p_2 + q_3 \cdot p_3$ ενώ η πιθανότητα για το βραβείο X_Γ είναι $q_1 \cdot (1-p_1) + q_2 \cdot (1-p_2) + q_3 \cdot (1-p_3)$.
Δηλαδή αυτή η σύνθετη λοτταρία είναι ισοδύναμη με την εξής απλή
$$[q_1 \cdot p_1 + q_2 \cdot p_2 + q_3 \cdot p_3] \circ \mathrm{X}_\mathrm{K} \oplus [q_1 \cdot (1-p_1) + q_2 \cdot (1-p_2) + q_3 \cdot (1-p_3)] \circ \mathrm{X}_\Gamma$$

5.4.3. Παράδειγμα 3 (Το παράδοξο του St Petersbourg)

Θεωρείστε το εξής παιχνίδι. Ρίχνω ένα (δίκαιο) κέρμα μέχρι να φέρει κορώνα (Κ). Αν έλθει Κ για πρώτη φορά στη n-στη ρίψη του νομίσματος ο παίκτης λαμβάνει 2^{n-1} αλλιώς 0. Παρατηρώ ότι η πιθανότητα να έλθει Κ για πρώτη φορά στη n-στη ρίψη του νομίσματος είναι $p_n = \frac{1}{2^n}$ οπότε σε αυτή την περίπτωση λαμβάνεται το βραβείο $X_n = 2^{n-1}$
Η μέση τιμή αυτού του παιχνιδιού είναι :

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2^2}\cdot 2+\frac{1}{2^3}\cdot 2^2+\ldots+\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)=\infty$$

(Προφανώς αυτό το παιχνίδι αναπαρίσταται από τη λοτταρία

$\frac{1}{2}\circ X_1+\frac{1}{2^2}\circ X_2+\frac{1}{2^3}\cdot X_3+\ldots+\frac{1}{2^n}\circ X_n+\ldots$ δηλαδή την

$\frac{1}{2}\circ 1+\frac{1}{2^2}\circ 2+\frac{1}{2^3}\cdot 2^2+\ldots+\frac{1}{2^n}\circ 2^{n-1}+\ldots$)

Μάλλον δεν θα ήταν διατεθειμένος να πληρώσει κάποιος τη δίκαιη τιμή για να παίξει αυτό το παιχνίδι!

Έστω όμως ότι κάποιος παίκτης έχει συνάρτηση ωφελιμότητας $u(X)=\ln(X)$

Τότε η αναμενόμενη ωφελιμότητα του από αυτό το παιχνίδι είναι

$$\mathrm{E}[u(X)]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cdot u(X_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cdot\ln(2^{n-1})\right)=0,6931<\infty$$

Επομένως αυτός ο παίκτης αναρωτιέται ποιο είναι εκείνο το ποσό που του δίνει την ίδια ωφελιμότητα. Δηλαδή $u(\pi)=0,6931\Leftrightarrow\ln(\pi)=0,6931\Leftrightarrow\pi=\mathrm{e}^{0,6931}\Leftrightarrow\pi\cong 2$

Άρα το μεγαλύτερο ποσόπου είναι διατεθειμένος να πληρώσει αυτός ο παίκτης για να παίξει αυτό το παιχνίδι είναι το βέβαιο ισοδύναμο (βάσει της συνάρτησης ωφελιμότητας του) δηλαδή 2.

5.4.4. Παράδειγμα 4

Έστω ότι ο Α έχει ένα λαχείο που περιγράφεται από τη λοτταρία $p\circ X_1\oplus(1-p)\circ X_2$.

Σε ποια τιμή θα ήταν διατεθειμένος να πουλεήσει αυτό το λαχείο?

Έστω W ο πλούτος του Α. Κρατώντας το λαχείο αντιμετωπίζει την εξής λοτταρία σχετικά με τον τελικό του πλούτο.

L: $p\circ(W+X_1)\oplus(1-p)\circ(W+X_2)$

Πουλώντας το λαχνο για ποσό π θα έχει ένα βέβαιο τελικό πλούτο $W+\pi$

Θέλει λοιπόν να επιλέξει για ποιο ποσό π θα ήταν αδιάφορος ανάμεσα στο $W+\pi$ και στη λοτταρία L. Δηλαδή για ποιο π ισχύει $W+\pi\ \square\ p\circ(W+X_1)\oplus(1-p)\circ(W+X_2)$

Αν $u(X)$ είναι η συνάρτηση ωφελιμότητας του Α τότε η προηγούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$u(W+\pi)=p\cdot u(W+X_1)+(1-p)\cdot u(W+X_2)$

Οπότε αν γνωρίζω τη συνάρτηση ωφελιμότητας λύνω ως προς π

5.4.5. Παράδειγμα 5 (Ζήτηση για ασφάλεια)

Έστω άτομο με αρχικό πλούτο W. Έστω ότι με πιθανότητα p μπορεί να χάσει ένα ποσό K. Μπορεί να αγοράσει ασφάλεια ώστε αν συμβεί η απώλεια να εισπράξει αποζημίωση Q. Έστω π το ασφάλιστρο ανά μονάδα κάλυψης (οπότε προκειμένου να εισπράξει αποζημίωση Q, θα πρέπει να πληρώσει ασφάλιστρα $\pi\cdot Q$). Πόση κάλυψη θα αγοράσει αυτό το άτομο?

Έστω u η συνάρτηση ωφελιμότητας του ατόμου. Το άτομο αντιμετωπίζει τις εξής επιλογές (λοτταρίες) καθώς το Q μεταβάλλεται:

$L(Q)$: $p\circ[W-K-\pi\cdot Q+Q]\oplus(1-p)\circ[W-\pi\cdot Q]$

Η αναμενόμενη ωφελιμότητα μιας τέτοιας επιλογής είναι:

EU(Q)=$p\cdot u[W-K-\pi\cdot Q+Q]+(1-p)\cdot u[W-\pi\cdot Q]$

Θέλει να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη ωφελιμότητα ως προς Q

Δηλαδή θέλει η παράγωγος του EU(Q) ως προς Q να ισούται με μηδέν.

Επομένως έχουμε

$EU(Q)'=0 \Leftrightarrow$

$$p \cdot u'[W-K-\pi \cdot Q+Q]+(1-p) \cdot u'[W-\pi \cdot Q]=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{u'[W-K-\pi \cdot Q+Q]}{u'[W-\pi \cdot Q]}=\frac{(1-p) \cdot \pi}{(1-\pi) \cdot p} \qquad (*)$$

Από την πλευρά της εταιρείας:

Η εταιρεία θα λάβει $\pi \cdot Q-Q$ με πιθανότητα p (αν η απώλεια συμβεί), ενώ θα λάβει $\pi \cdot Q$ με πιθανότητα $1-p$ (αν η απώλεια δε συμβεί).

Το αναμενόμενο κέρδος της εταιρείας είναι:

$E(G)=p \cdot(\pi \cdot Q-Q)+(1-p) \cdot(\pi \cdot Q)=[p \cdot(\pi-1)+(1-p) \cdot \pi] \cdot Q$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το αναμενόμενο κέρδος της εταιρείας είναι 0 (π.χ. λόγω ανταγωνισμού ή προσφορών). Τότε η τελευταία σχέση ισοδυναμεί με $p=\pi$. Τότε όμως η σχέση (*) ισοδυναμεί με την $u'[W-K-\pi \cdot Q+Q]=u'[W-\pi \cdot Q]$

Ας υποθέσουμε ότι ο ασφαλιζόμενος αποστρέφεται αυστηρά τον κίνδυνο. Αυτό όμως σημαίνει ότι $u''<0 \Rightarrow u' \downarrow \Rightarrow W-K-\pi \cdot Q+Q=W-\pi \cdot Q \Rightarrow K=Q$

Άρα ένα άτομο που αποστρέφεται αυστηρά τον κίνδυνο θα ασφαλίσει πλήρως τον εαυτό του απέναντι στον κίνδυνο που αναμένει.

5.5. Ασκήσεις

1) Έχετε έσοδα 20.000$ σε κάθε μία από 2 περιόδους. Επίσης έχετε τη δυνατότητα να δανείσετε ή να δανεισθείτε με επιτόκιο 10% ετήσια ανατοκιζόμενο. Έστω ότι η διάρκεια κάθε περιόδου είναι ένα έτος και ο αρχικός σας πλούτος είναι 50.000$. Προσδιορίστε το σύνολο εφικτών επιλογών κατανάλωσης.

2) Έχετε έσοδα 5.000$ σε κάθε μία από 2 περιόδους. Επίσης έχετε τη δυνατότητα να δανείσετε με επιτόκιο 10% και να δανεισθείτε με επιτόκιο 20% ετήσια ανατοκιζόμενα. Έστω ότι η διάρκεια κάθε περιόδου είναι ένα έτος. Προσδιορίστε το σύνολο εφικτών επιλογών κατανάλωσης.

3) Έστω ότι έχετε μια συνάρτηση προτίμησης $p = C_1 + C_2 + C_1 \cdot C_2$ όπου C_1, C_2 η κατανάλωση της πρώτης και της δεύτερης περιόδου αντίστοιχα,. Να βρείτε όλα τα ζευγάρια (C_1, C_2) για (i) p=50 και (ii) p=100. Τι είναι αυτά τα σύνολα που βρήκατε?

4) Έστω ότι έχετε τη δυνατότητα να δανείσετε και να δανεισθείτε με επιτόκιο 10% ετήσια ανατοκιζόμενο. Επίσης έχετε έσοδα 5.000$ σε κάθε περίοδο όπου η κάθε περίοδος είναι ένα έτος. Εάν η συνάρτηση προτίμησης σας είναι αυτή της προηγούμενης άσκησης να βρεθεί η προτιμώμενη εφικτή επιλογή κατανάλωσης.

5) Έστω ότι έχετε έσοδα 10.000$ σε κάθε μια από 2 ετήσιες περιόδους. Επίσης κληρονομείτε 10.000$ τη δεύτερη περίοδο. Έστω ότι τα επιτόκια στα οποία μπορείτε να δανείσετε ή να δανεισθείτε είναι 20% το χρονο ετήσια ανατοκιζόμενα. Ποιο είναι το μέγιστο ποσό που μπορεί να καταναλωθεί την πρώτη περίοδο? Την δεύτερη περίοδο? (σημείωση: δεν γνωρίζετε από την πρώτη περίοδο ότι θα έχετε την κληρονομιά τη δεύτερη περίοδο)

6) Για ποιες συναρτήσεις ωφελιμότητας είναι σταθερό το (i) μέτρο απόλυτης αποστροφής στον κίνδυνο, (ii) μέτρο σχετικής αποστροφής στον κίνδυνο

7) Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ωφελιμότητας δεν αντιστοιχούν σε επενδυτή που αποστρέφεται τον κίνδυνο? (i) $u(W) = \ln(W)$ (ii) $u(W) = W^{\gamma}$ (iii) $u(W) = e^{-r \cdot W}$, (με $r > 0$). Να κάνετε και τις γραφικές τους παραστάσεις.

8) Έστω $u(W)$ μια συνάρτηση ωφελιμότητας και $V(W) = a + b \cdot u(W)$ μια άλλη συνάρτηση ωφελιμότητας. Να δειχθεί ότι (i) οι $u(W)$ και $V(W)$ οδηγούν τον επενδυτή στις ίδιες επιλογές (ii) οι $u(W)$ και $V(W)$ οδηγούν στον ίδιο συντελεστή αποστροφής στον κίνδυνο (δηλ. $A_u(W) = A_V(W)$)

9) Ποια είναι η προτιμότερη από τις παρακάτω τρείς επενδύσεις εάν $u(W) = W - \dfrac{W^2}{2}$

Επένδυση Α		Επένδυση Β		Επένδυση Γ	
Αποτέλεσμα	Πιθανότητα	Αποτέλεσμα	Πιθανότητα	Αποτέλεσμα	Πιθανότητα

σε πλούτο		σε πλούτο		σε πλούτο	
5	1/3	4	¼	1	1/5
6	1/3	7	½	9	3/5
9	1/3	10	¼	8	1/5

10) Έστω $u(W) = -W^{-1/2}$. Ποια είναι η προτιμόμενη επένδυση στην προηγούμενη άσκηση?

11) Έστω

Επένδυση Α		Επένδυση Β	
Αποτέλεσμα σε πλούτο	Πιθανότητα	Αποτέλεσμα σε πλούτο	Πιθανότητα
7	2/5	5	1/2
10	1/5	12	1/4
14	2/5	20	1/4

Ποια είναι η προτιμόμενη επένδυση εάν $u(W) = 2 \cdot W - 0,04 \cdot W^2$

12) Έστω η Β επιλογή της προηγούμενης άσκησης. Η πιθανότητα για αποτέλεσμα 5 είναι ½ και για 12 είναι ¼. Πόσο πρέπει να αλλάξουν αυτές οι πιθανότητες ώστε ο επενδυτής να είναι αδιάφορος ανάμεσα στις επιλογές Α και Β?

13) Έστω $u(W) = -W^{-1/2}$. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά αυτής της συνάρτησης ως προς την απόλυτη και τη σχετική αποστροφή?

14) Έστω $u(W) = a \cdot e^{-b \cdot W}$ με a, b σταθερές. Ποια πρέπει να είναι τα πρόσημα των a, b ώστε ο επενδυτής να προτιμά περισσότερα από λιγότερα και να αποστρέφεται τον κίνδυνο?

15) Έστω $u(W) = a + b \cdot e^{c \cdot W}$. Αν προτιμά περισσότερα από λιγότερα και αποστρέφεται τον κίνδυο, τι μπορώ να πω για τα πρόσημα των a, b, c?Τι ιδιότητες έχει η συνάρτηση ως προς την απόλυτη και τη σχετική αποστροφή?

16) Θεωρείστε

Επένδυση Α		Επένδυση Β	
Αποτέλεσμα σε πλούτο	Πιθανότητα	Αποτέλεσμα σε πλούτο	Πιθανότητα
5	0,2	6	0,3
7	0,5	8	0,6
10	0,3	9	0,9

Έστω $u(W) = W - 0,05 \cdot W^2$. Ποιά από τις Α και Β είναι προτιμότερη. Ποιο είναι το ελάχιστο ποσό που πρέπει να μεταβληθεί το αποτέλεσμα 5 ώστε ο επενδυτής να είναι αδιάφορος ανάμεσα στις Α και Β?

17) Έστω ότι ο Α έχει ένα λαχείο που περιγράφεται από τη λοτταρία $p \circ X_1 \oplus (1-p) \circ X_2$. Σε ποια τιμή θα ήταν διατεθειμένος να πουλεήσει αυτό το λαχείο αν έχει συνάρτηση ωφελιμότητας $u(X) = \ln(X)$. Σε τι τιμήθα ήαν διατεθειμένος να αγοράσει αυτό το λαχείο ο Β αν έχει την ίδια συνάρτηση ωφελιμότητας?

18) Ένα άτομο έχει συνάρτηση ωφελιμότητας της μορφής $u(W) = -\frac{1}{W}$. Του προσφέρεται ένα στοίχημα που του δίνει πλούτο ίσο με W_1 με πιθανότητα p και πλούτο W_2 με πιθανότητα $1-p$. Τι πλούτο θα πρέπει να έχει τώρα ώστε να είναι αδιάφορος ανάμεσα στο να κρατήσει τον τρέχοντα πλούτο του ή να δεχτεί το στοίχημα.

19) Ένα άτομο με πλούτο Χ έχει την ευκαιρία να στοιχηματίσει στο αν θα συμβεί κάποιο γεγονός. Ξέρει ότι η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός είναι p. Αν στοιχηματίσει ποσό w και κερδίσει θα εισπράξει $2 \cdot w$, αλλιώς δεν θα εισπράξει τίποτα. Η συνάρτηση ωφελιμότητας αυτού του ατόμου είναι $u(X) = e^{-r \cdot X}$ με $r > 0$. Ποιό είναι το βέλτιστο ποσό w που θα πρέπει να στοιχηματίσει?

20) Υποθέστε ότι ένας φίλος σας έχει 10.000$ στο λογαριασμό του και ένα αυτοκίνητο το οποίο αξίζει 2.100$. Το αυτοκίνητο έχει πιθανότητα 10% να κλαπεί. Έστω $u(X) = X^{1/2}$ η συνάρτηση ωφελιμότητας του πλούτου του.

a. Ποια η μέση τιμή του πλούτου του?
b. Ποια η αναμενόμενη ωφελιμότητα του πλούτου του?
c. Αποστρέφεται τον κίνδυνο ή τον προτιμά?
d. Μια ασφαλιστική εταιρεία προσφέρει ασφάλεια για κλοπή αυτοκινήτου με αποζημίωση C=2.100$. Ποιο θα ήταν το ποσό που θα ήταν πρόθυμος να πληρώσει για μια τέτοια ασφάλιση?
e. Θα συνέφερε μια ασφαλιστική ετιαρεία να προσφέρει ένα τέτοιο συμβόλαιο?

21) Ένα άτομο έχει συνάρτηση ωφελιμότητας της μορφής $u(X) = X^{1/2}$ και αρχικά έχει πλούτο 4$. ¨εχει στην κατοχή του ένα λαχείο το οποίο όταν κληρώσει θα αξίζει 12 $ με πιθανότητα 1/2 και 0$ με πιθανότητα 1/2.

a. Ποια η αναμενόμενη ωφελιμότητα του πλούτου του?
b. Ποια είναι η χαμηλότερη τιμή στην οποία θα ήταν διατεθειμένος να πουλήσει το λαχείο?

22) Έστω $u(w)$ συνάρτηση ωφελιμότητας και $A(w)$ το σχετικό μέτρο απόλυτης αποστροφής στον κίνδυνο. Αν το μέτρο $A(w)$ είναι σταθερό και ίσο με K τότε η συνάρτηση ωφελιμότητας έχει τη μορφή $u(w) = a \cdot e^{-K \cdot x} + b$. Αντίστροφα, αν η συνάρτηση ωφελιμότητας έχει τη μορφή $u(w) = a \cdot e^{-K \cdot x} + b$ τότε μέτρο $A(w)$ είναι σταθερό και ίσο με K

23) Έστω $u(w)$ συνάρτηση ωφελιμότητας και $A(w)$ το σχετικό μέτρο απόλυτης αποστροφής στον κίνδυνο. Αν το μέτρο $A(w)$ είναι σταθερό και ίσο με K τότε η συνάρτηση ωφελιμότητας έχει τη μορφή $u(w) = a \cdot e^{-K \cdot x} + b$.

Αντίστροφα, αν η συνάρτηση ωφελιμότητας έχει τη μορφή $u(w) = a \cdot e^{-K \cdot x} + b$ τότε μέτρο $A(w)$ είναι σταθερό και ίσο με K

24) Διατυπώστε και λύστε ανάλογη με την ποηγούμενη άσκηση αλλά για σταθερό μέτρο σχετικής αποστροφής στον κίνδυνο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Διάφορα

6.1. Διάφορες Εφαρμογές

6.1.1.

Έστω επενδυτής με αρχικό κεφάλαιο W ο οποίος καλείται να τοποθετήσει χρήματα σε μια επένδυση. Ο επενδυτής έχει τη δυνατότητα να τοποθετήσει οποιοδήποτε ποσό x επιθυμεί από 0 έως W. Το ποσό που θα επενδύσει είτε θα διπλασιαστεί με πιθανότητα p είτε θα χαθεί τελείως με πιθανότητα $1-p$. Αν υποθέσουμε ότι $p>1/2$ πόσο θα πρέπει να επενδύσει ο επενδυτής δεδομένου ότι εκφράζει τις προτιμήσεις του τελικού του πλούτου με λογαριθμική συνάρτηση ωφελιμότητας?

Απάντηση

Έστω $\pi \in [0,1]$, το ποσοστό του πλούτου W το οποίο τοποθετεί ο επενδυτής στην επένδυση. Δηλαδή ο επεδυτής τοποθετεί ποσό $\pi \cdot W$ στην επένδυση. Τότε ο τελικός του πλούτος θα είναι είτε $W+\pi \cdot W$ με πιθανότητα p είτε $W-\pi \cdot W$ με πιθανότητα $1-p$.

Επομένως η αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού του πλούτου θα είναι:

$p \cdot \ln[(1+\pi)\cdot W]+(1-p)\cdot \ln[(1-\pi)\cdot W]=$

$p \cdot \ln(1+\pi)+p\cdot \ln(W)+(1-p)\cdot \ln(1-\pi)+(1-p)\cdot \ln(W)=$

$\ln(W)+p\cdot \ln(1+\pi)+(1-p)\cdot \ln(1-\pi)$

Για να βρούμε για ποιο π μεγιστοποιείται η αναμενόμενη ωφελιμότητα του επενδυτή, θα βρούμε για ποιο π μηδενίζεται η παράγωγος της τελευταίας παράστασης ως προς π

Έχουμε $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\pi}(\ln(W)+p\cdot \ln(1+\pi)+(1-p)\cdot \ln(1-\pi))=\dfrac{p}{1+\pi}-\dfrac{1-p}{1-\pi}$

και εξισώνοντας με το μηδέν, έχουμε ότι $\pi = 2p-1$

Άρα, αυτός ο επενδυτής θα πρέπει να τοποθετήσει ποσοστό $(2p-1)$ του πλούτου του στην επένδυση ή ισοδύναμα ποσό ίσο με $(2p-1)\cdot W$

Για παράδειγμα, εάν η πιθανότητα κέρδους είναι 60% τότε θα πρέπει να τοποθετήσει το 20% του πλούτου του. Εάν η πιθανότητα κέρδους είναι 70% θα πρέπει να επενδύσει το 40% του πλούτου του κλπ.

(Άσκηση: Δείξτε στο προηγούμενο παράδειγμα, ότι εάν $p \le 1/2$ τότε το βέλτιστο ποσό που θα πρέπει να επενδύσει ο επενδυτής είναι 0)

6.1.1.

Ας υποθέσουμε στο προηγούμενο παράδειγμα ότι, ενώ το προς επένδυση ποσό $\pi \cdot W$ πρέπει να πληρωθεί άμεσα, η πληρωμή $2\cdot \pi \cdot W$ (εφόσον η επένδυση αποβεί κερδοφόρα) θα λάβει χώρα ένα έτος αργότερα. Ας υποθέσουμε επίσης ότι το ποσό που δε θα τοποθετηθεί στην επένδυση μπορεί να τοποθετηθεί στην Τράπεζα και να κερδίζει ετήσιο απλό επιτόκιο r. Με αυτές τις υποθέσεις τι ποσό θα πρέπει να επενδύσει ο επενδυτής?

Απάντηση

Έστω $\pi \in [0,1]$, το ποσοστό του πλούτου W το οποίο τοποθετεί ο επενδυτής στην επένδυση. Δηλαδή ο επεδυτής τοποθετεί ποσό $\pi \cdot W$ στην επένδυση και $(1-\pi)\cdot W$ στην Τράπεζα. Ένα έτος αργότερα ο επενδυτής θα έχει

$(1+r)\cdot(1-\pi)\cdot W$ στην Τράπεζα ενώ η επένδυση του θα αξίζει είτε $2\cdot\pi\cdot W$ (με πιθανότητα p) είτε 0 (με πιθανότητα $(1-p)$). Άρα ο επενδυτής αντιμετωπίζει τη λοτταρία $p\circ[(1+r)\cdot(1-\pi)\cdot W+2\cdot\pi\cdot W]\oplus(1-p)\circ[(1+r)\cdot(1-\pi)\cdot W+0]$. Η αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού του πλούτου είναι

$$p\cdot\ln[(1+r)\cdot(1-\pi)\cdot W+2\cdot\pi\cdot W]+(1-p)\ln[(1+r)\cdot(1-\pi)\cdot W]=$$
$$\ln(W)+p\cdot\ln(1+r+\pi-\pi\cdot r)+(1-p)\cdot\ln(1+r)+(1-p)\cdot\ln(1-\pi)$$

Η πρώτη παράγωγος ως προς π της αναμενόμενης ωφελιμότητας του τελικού πλούτου ισούται με

$$\frac{p\cdot(1-r)}{1+r+\pi-\pi\cdot r}-\frac{1-p}{1-\pi}$$

οπότε θέτοντας την ίση με το μηδέν και λύνοντας ως προς π έχουμε τη βέλτιστη τιμή

$$\pi=\frac{2\cdot p-1-r}{1-r}$$

Για παράδειγμα, εάν η πιθανότητα κέρδους είναι 60% και το Τραπεζικό επιτόκιο 5% τότε θα πρέπει να τοποθετήσει περίπου το 15,8% του πλούτου του στην επένδυση και τα υπόλοιπα στην Τράπεζα.

6.2. Το πρόβλημα της επιλογής χαρτοφυλακίου

6.2.1. Εισαγωγικά

‘Εστω ότι ένας επενδυτής έχει πλούτο W τον οποίο μοιράζει σε n το πλήθος αξιόγραφα $A_1,...,A_n$. Συγκεκριμένα έστω w_i το ποσοστό του πλούτου του που τοποθετεί στο αξιόγραφο A_i, i=1,...,n . Προφανώς $w_1+...+w_n=1$. Δηλαδή ο επενδυτής έχει τοποθετήσει ποσό $w_i\cdot W$ σε κάθε αξιόγραφο A_i, i=1,...,n .

Το διάνυσμα $\Pi=(w_1,...,w_{\mathrm{n}})$ ονομάζεται χαρτοφυλάκιο του επενδυτή.

Έστω επίσης R_i η τυχαία μετβλητή που περιγράφει την απόδοση του αξιογράφου A_i, i=1,...,n .

Τότε η απόδοση του χαρτοφυλακίου περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή

$$R_\Pi=w_1\cdot R_1+...+w_n\cdot R_n=\sum_{i=1}^{n}w_i\cdot R_i$$

Ο τελικός πλούτος του επενδυτή περιγράφεται επομένως από την τυχαία μεταβλητή

$$W^*=w_1\cdot W\cdot(1+R_1)+...+w_n\cdot W\cdot(1+R_n)=W\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}w_i\cdot(1+R_i)\right]=W\cdot\left[1+\left(\sum_{i=1}^{n}w_i\cdot R_i\right)\right]$$

Προφανώς ο επενδυτής θέλει να επιλέξει εκείνο το χαρτοφυλάκιο $\Pi=(w_1,...,w_{\mathrm{n}})$ που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού του πλούτου W^*. Δηλαδή, αν η συνάρτηση ωφελιμότητας τελικού πλούτου του επενδυτή είναι U, τότε ο επενδυτής θέλει να λύσει το εξής πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\max_{w_1,\ldots,w_n} E\left[U(W^*)\right]$$

έτσι ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \text{ και } w_i \geq 0 \ \forall i = 1,\ldots,n$$

Ας υποθέσουμε τώρα επιπλέον ότι ο τελικός πλούτος W^* του επενδυτή είναι κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή (η υπόθεση αυτή είναι αρκετά αληθοφανής βάσει του κεντρικού οριακού θεωρήματος, αν υποθέσουμε ότι ο επενδυτής επενδύει σε πολλά αξιόγραφα οι αποδόσεις των οποίων δεν έχουν υψηλό βαθμό συσχέτισης).

Για να κάνουμε το πρόβλημα πιο συγκεκριμένο ας θεωρήσουμε ότι ο επενδυτής έχει εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας $U(x) = 1 - e^{-bx}$, με $b > 0$ (άρα ο επενδυτής προτιμάει περισσότερα από λιγότερα και αποστρέφεται τον κίνδυνο).

[7]Αφού η $-bW^*$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέσο $-b \cdot E(W^*)$ και διακύμανση $b^2 \cdot Var(W^*)$ έπεται ότι

$$E\left[U(W^*)\right] = 1 - E\left[e^{-bW^*}\right] = 1 - \exp\left[-b \cdot E(W^*) + b^2 \cdot Var(W^*)/2\right]$$

Επομένως η αναμενόμενη ωφελιμότητα θα μεγιστοποιείται για εκείνο το χαρτοφυλάκιο που μεγιστοποιεί την διαφορά

$$E(W^*) - b \cdot Var(W^*)/2$$

Από την τελευταία σχέση έπεται άμεσα ότι εάν ο επενδυτής μας έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο χαρτοφυλάκια που το πρώτο παρέχει μέσο τελικό πλούτο μεγαλύτερο από το μέσο τελικό πλούτο που παρέχει το δεύτερο και η διακύμανση του τελικού πλούτου του πρώτου είναι μικρότερη από τη διακύμανση του τελικού πλούτου του δεύτερου, τότε ο επενδυτής θα επιλέξει το πρώτο (δηλαδή αυτό με τη μεγαλύτερη αναμενόμενη τιμή και τη μικρότερη αβεβαιότητα (διακύμανση)). [Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει για όλους τους επενδυτές που προτιμούν περισσότερα από λιγότερα και αποστρέφονται τον κίνδυνο].

Ας υπολογίσουμε τώρα τη μέση τιμή και τη διακύμανση τουτελικού πλύτου του επενδυτή:

Αφού $W^* = W \cdot \left[1 + \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot R_i\right]$ έπεται ότι

$$E\left[W^*\right] = W \cdot \left[1 + \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot E(R_i)\right]$$

Και

[7] Υπενθυμίζουμε ότι εάν Z είναι κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή τότε η e^Z ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή και $E(e^Z) = \exp\left[E(Z) + Var(Z)/2\right]$

$$Var\left[W^*\right] = W^2 \cdot Var\left[1+\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot R_i\right] = W^2 \cdot Var\left[\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot R_i\right] \Leftrightarrow$$

$$Var\left[W^*\right] = W^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov\left[w_i \cdot R_i, w_j \cdot R_j\right] \Leftrightarrow$$

$$Var\left[W^*\right] = W^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left[w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{i,j}\right] \Leftrightarrow$$

$$Var\left[W^*\right] = W^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{i,j} \Leftrightarrow$$

$$Var\left[W^*\right] = W^2 \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} w_i \cdot w_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{i,j}\right]$$

όπου $\sigma_i = \sqrt{Var(R_i)}$ η τυπική απόκλιση της απόδοσης του αξιόγραφου A_i, $\sigma_{i,j} = Cov(R_i, R_j)$ η συνδιακύμανση των αποδόσεων των αξιόγραφων A_i και A_j και $\rho_{i,j} = \dfrac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$ ο συντελεστής συχέτισης των αποδόσεων των αξιόγραφων A_i και A_j.

6.2.2. Παράδειγμα

Έστω ότι ένας επενδυτής έχει πλούτο W=100.000 και θέλει να τον μοιράσει σε δύο επενδύσεις A και B. Η απόδοση της επένδυσης A έχει αναμενόμενη τιμή 15% και τυπική απόκλιση 20%. Η απόδοση της επένδυσης B έχει αναμενόμενη τιμή 18% και τυπική απόκλιση 25%. Ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων των A και B είναι -40% και η συνάρτηση ωφελιμότητας του επενδυτή είναι $U(x) = 1 - e^{-0,005\cdot x}$. Να βρεθεί το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο για αυτόν τον επενδυτή.

<u>Απάντηση</u>

Έστω (w_1, w_2) το χαρτοφυλάκιο του επενδυτή (δηλαδή τα ποσοστά του πλούτου του που τοποθετεί στις επενδύσεις A και B αντίστοιχα). Τότε $w_2 = 1 - w_1$ οπότε αν συμβολίσουμε με W^* τον τελικό πλούτο του επενδυτή, έπεται ότι:

$$E\left[W^*\right] = 100.000 \cdot \left[1 + w_1 \cdot 15\% + (1-w_1)\cdot 18\%\right] \Leftrightarrow$$

$$E\left[W^*\right] = 100.000 \cdot \left[1,18 - w_1 \cdot 0,03\right]$$

Επίσης,

$$Var\left[W^*\right] = 100.000^2 \cdot \left[w_1^2 \cdot 0,2^2 + (1-w_1)^2 \cdot 0,25^2 + 2 \cdot w_1 \cdot (1-w_1) \cdot 0,2 \cdot 0,25 \cdot (-0,4)\right] \Leftrightarrow$$

$$Var\left[W^*\right] = 100.000^2 \cdot \left[0,1425 \cdot w_1^2 - 0,165 \cdot w_1 + 0,0625\right]$$

Επομένως πρέπει να επιλέξουμε το w_1 έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η διαφορά

$E(W^*) - 0,005 \cdot Var(W^*)/2$

δηλαδή η διαφορά

$$100.000 \cdot \left[1,18 - w_1 \cdot 0,03\right] - 0,005 \cdot \frac{100.000^2 \cdot \left[0,1425 \cdot w_1^2 - 0,165 \cdot w_1 + 0,0625\right]}{2}$$

ισοδύναμα η διαφορά

$4.122.000 \cdot w_1 - 3.562.500 \cdot w_1^2$

Παραγωγίζοντας ως προς w_1 και εξισώνοντας με μηδέν βρίσκουμε

$w_1 = 57,85\%$

Άρα ο επενδυτής θα τοποθετήσει 57.850 στην επένδυση Α και 42.150 στην επένδυση Β.

(Άσκηση: Επαναλάβετε την ίδια άσκηση με αρχικό πλούτο 100. Παρατηρείστε πόσο πολύ αλλάζει το w_1. Τι είδους σχετική αποστροφή στον κίνδυνο έχει ο επενδυτής?)

6.2.3. Παράδειγμα

Έστω ότι ένας επενδυτής με αρχικό πλούτο W, ενδιαφέρεται να επενδύσει σε δύο συγκεκριμένα αξιόγραφα τα οποία έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση. Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής προτιμά περισσότερα από λιγότερα και αποστρέφεται τον κίνδυνο (δηλαδή η συνάρτηση ωφελιμότητας του επενδυτή είναι κοίλη). Αφού κάθε χαρτοφυλάκιο που μπορεί να σχηματίσει ο επενδυτής από αυτές τις δύο επενδύσεις έχει την ίδια αναμενόμενη απόδοση, τότε όπως έχουμε δεί θα επιλέξει εκείνο το χαρτοφυλάκιο η απόδοση του οποίου έχει τη μικρότερη διακύμανση (δηλαδή τη μικρότερη αβεβαιότητα).

Έστω λοιπόν ότι ο επενδυτής τοποθετεί ποσοστό w_1 του πλούτου του στην πρώτη επένδυση και $(1-w_1)$ στη δεύτερη. Τότε η διακύμανση του τελικού του πλούτου δίνεται από

$$Var(W^*) = W^2 \cdot \left[w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-w_1)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot w_1 \cdot (1-w_1) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{1,2} \right] \Leftrightarrow$$

$$Var(W^*) = W^2 \cdot \left[w_1^2 \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{1,2}) + w_1 \cdot 2 \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{1,2} - \sigma_2^2) + \sigma_2^2 \right]$$

Παραγωγίζοντας ως προς w_1 και θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν βρίσκουμε το βέλτιστο ποσοστό πλούτου που πρέπει να επενδυθεί στο πρώτο αξιόγραφο.

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{1,2}}$$

[Άσκηση: Κάντε το ίδιο παράδειγμα για τρία αξιόγραφα και μετά για n αξιόγραφα]

Σε συνέχεια αυτού του παραδείγματος, εάν οι αποδόσεις των δύο αξιογράφων είναι ανεξάρτητες, τότε $\rho_{1,2} = 0$ και άρα σε αυτή την περίπτωση το βέλτιστο ποσοστό πλούτου που πρέπει να επενδυθεί στο πρώτο αξιόγραφο δίδεται ως:

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{\frac{1}{\sigma_1^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}$$

[Άσκηση: Αποδείξτε ότι το αποτέλεσμα αυτό ισχύει και γενικότερα, δηλαδή εάν κάποιος επενδύει σε n το πλήθος αξιόγραφα που όλα έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση και οι αποδόσεις τους είναι ασυσχέτιστες τότε το βέλτιστο ποσοστό του πλούτου που πρέπει να τοποθετηθεί στο αξιόγραφο i είναι:

$$w_1 = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \ldots + \frac{1}{\sigma_n^2}} \text{ .]}$$

[Άσκηση: Αποδείξτε ότι εάν ένας επενδυτής τοποθετήσει βέλτιστα τον πλούτο του σε n αξιόγραφα που οι αποδόσεις τους είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες τότε θα μοιράσει τον πλούτο του ισόποσα σε αυτά τα αξιόγραφα]

6.2.4. Θεώρημα Διαχωρισμού Χαρτοφυλακίων

Για κάθε αναμενόμενη τιμή τελικού πλούτου, τα χαρτοφυλάκια που ελαχιστοποιούν τη διακύμανση του τελικού πλούτου που παράγουν είναι πολλαπλάσια ενός συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου. Η ονομασία του θεωρήματος οφείλεται στο γεγονός ότι με αυτή την οπτική ανάλυσης μέσου-διακύμανσης, μπορούμε να διαχωρίσουμε το πρόβλημα της επιλογής χαρτοφυλακίου (i) στον καθορισμό των ποσοστών που πρέπει να τοποθετηθούν σε κάθε διαθέσιμο αξιόγραφο ώστε να σχηματισθεί το προαναφερθέν συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο και (ii) στην επιλογή του παράγοντα με τον οποίο θα πολλαπλασιάσουμε το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο ώστε να επιτευχθεί ο κίνδυνος τον οποίο είμαστε διατεθειμένοι να αναλάβουμε (ισοδύναμα ο αναμενόμενος τελικός πλούτος)

Έστω ότι υπάρχουν n το πλήθος αξιόγραφα $A_1,\ldots,A_n$ με αποδόσεις που περιγράφονται από τις τυχαίες μεταβλητές $R_1,\ldots,R_n$ και ένας Τραπεζικός λογαριασμός με επιτόκιο απλό ετήσιο επιτόκιο r.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι επενδυτές μπορούν είτε να αγοράσουν είτε να πουλήσουν οποιοδήποτε από τα αξιόγραφα και επιπλέον όλες οι αγοραπωλησίες χρηματοδοτούνται μέσω του Τραπεζικού λογαριασμού. Αν για παράδειγμα αγοράσουν ένα αξιόγραφο δανείζονται το αντίστοιχο ποσό από τον Τραπεζικό λογαριασμό ενώ αν πουλήσουν κάποιο αξιόγραφο καταθέτουν το αντίστοιχο ποσό στον Τραπεζικό λογαριασμό.
Έστω ότι ένας επενδυτής τοποθετεί τα ποσά $x_1,\ldots,x_n$ στα αξιόγραφα $A_1,\ldots,A_n$ αντίστοιχα. Για τους σκοπούς αυτής της παραγράφου το διάνυσμα $\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ ονομάζεται χαρτοφυλάκιο του επενδυτή. Εάν ο επενδυτής έχει αγοράσει το αξιόγραφο A_i τότε το x_i είναι θετικός αριθμός ενώ εάν έχει πουλήσει το αξιόγραφο A_i τότε το x_i είναι αρνητικός αριθμός. Δηλαδή τα πρόσημα στο χαρτοφυλάκιο $\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ υποδηλώνουν εάν ο επενδυτής έχει long θέση (θετικό πρόσημο) ή short θέση (αρνητικό πρόσημο) στο αντίστοιχο αξιόγραφο.

Άρα ο τελικός πλούτος ενός επενδυτή με χαρτοφυλάκιο $\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ θα περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή

$$W^*(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot(1+R_i)-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot(1+r)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot(R_i-r)$$

Παρατηρείστε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό k έχουμε ότι:

$$E\left[W^*(k\cdot\overline{x})\right]=k\cdot E\left[W^*(\overline{x})\right]$$

Και

$$Var\left[W^*(k\cdot\overline{x})\right]=k^2\cdot Var\left[W^*(\overline{x})\right]$$

όπου $k\cdot\overline{x}=(k\cdot x_1,\ldots,k\cdot x_n)$.

Έστω τώρα $\bar{\bar{x}}$ εκείνο το χαρτοφυλάκιο για το οποίο

$$E\left[W^*(\bar{\bar{x}})\right]=1$$

Και
$$Var\left[W^*(\bar{x})\right] = \min_{\substack{\bar{x} \\ E\left[W^*(\bar{x})\right]=1}} Var\left[W^*(\bar{x})\right]$$
Έστω $b>0$. Θα δείξουμε τώρα ότι ανάμεσα σε όλα τα χαρτοφυλάκια που έχουν αναμενόμενο τελικό πλούτο b, εκείνο που έχει τη μικρότερη διακύμανση του τελικού πλούτου είναι το χαρτοφυλάκιο $b \cdot \bar{x}$.
Πράγματι, έστω χαρτοφυλάκιο $\bar{y}$ με αναμενόμενο τελικό πλούτο b, δηλαδή $E\left[W^*(\bar{y})\right]=b$. Τότε όμως $E\left[W^*(\frac{1}{b}\cdot\bar{y})\right]=\frac{1}{b}\cdot E\left[W^*(\bar{y})\right]=\frac{1}{b}\cdot b=1$ και άρα
$$Var\left[W^*(b\cdot\bar{x})\right]=b^2\cdot Var\left[W^*(\bar{x})\right]\le b^2\cdot Var\left[W^*(\frac{1}{b}\cdot\bar{y})\right]=b^2\cdot\frac{1}{b^2}\cdot Var\left[W^*(\bar{y})\right]$$
Άρα το χαρτοφυλάκιο $b\cdot\bar{x}$ έχει αναμενόμενη τιμή του τελικού πλούτου ίση με $E\left[W^*(b\cdot\bar{x})\right]=b$ και διακύμανση $Var\left[W^*(b\cdot\bar{x})\right]\le Var\left[W^*(\bar{y})\right]$, δηλ. μικρότερη ή ίση από τη διακύμανση του τελικού πλούτου οποιουδήποτε άλλου χαρτοφυλακίου έχει αναμενόμενο τελικό πλούτο b

6.3. Ανάλυση μέσου-διακύμανσης

6.3.1. Εισαγωγικό παράδειγμα

Είδαμε στην παράγραφο 6.2.1. ότι ένας επενδυτής που επιδιώκει να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού του πλούτου δίνει τελικά σημασία στη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης τιμής του τελικού του πλούτου και στην ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση της διακύμανσης του τελικού του πλούτου. Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε ουσιαστικά το ίδιο πρόβλημα αλλά θα εστιάσουμε στις αποδόσεις των επενδύσεων. Ας ξεκινήσουμε απλά πριν γενικεύσουμε:
Έστω δύο επενδύσεις A_1, A_2 με αβέβαιες αποδόσεις που περιγράφονται από τις τυχαίες μεταβλητές R_1, R_2 αντίστοιχα. Έστω $E(R_1), E(R_2)$ οι αναμενόμενες τιμές των αποδόσεων, σ_1^2, σ_2^2 οι διακυμάνσεις τους, σ_{12} η συνδιακύμανση τους και ρ_{12} ο συντελεστής συσχέτισης τους. Ένας επενδυτής σχηματίζει ένα χαρτοφυλάκιο $\Pi=(w_1,w_2)$ από αυτές τις δύο επενδύσεις, όπου $w_1, w_2=1-w_1$ τα αντίστοιχα ποσοστά συμμετοχής των επενδύσεων A_1, A_2 στο χαρτοφυλάκιο.
Τότε, η απόδοση του χαρτοφυλακίου περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή:
$$R_\Pi = w_1\cdot R_1 + w_2\cdot R_2 = w_1\cdot R_1 + (1-w_1)\cdot R_2$$
Άρα, η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι:
$$E[R_\Pi]=w_1\cdot E[R_1]+w_2\cdot E[R_2]=w_1\cdot E[R_1]+(1-w_1)\cdot E[R_2]$$
Και η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι:
$$\sigma_\Pi^2 = w_1^2\cdot\sigma_1^2 + w_2^2\cdot\sigma_2^2 + 2\cdot w_1\cdot w_2\cdot\sigma_{12} \Leftrightarrow$$
$$\sigma_\Pi^2 = w_1^2\cdot\sigma_1^2 + (1-w_1)^2\cdot\sigma_2^2 + 2\cdot w_1\cdot(1-w_1)\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\rho_{12}$$
Παρατηρούμε ότι η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου δεν εξαρτάται αποκλεστικά από τις διακυμάνσεις των αποδόσεων των στοιχείων που το απαρτίζουν αλλά και από το συντελεστή συσχέτισης μεταξύ αυτών των αποδόσεων. Ας μελετήσουμε κάποιες επιμέρους περιπτώσεις για να αποκτήσουμε καλύτερη αίσθηση της κατάστασης:

6.3.1.1. Παράδειγμα (συσχέτιση αποδόσεων ίση με 1)

Έστω $\rho_{12} = 1$

Τότε

$$E[R_\Pi] = w_1 \cdot E[R_1] + (1-w_1) \cdot E[R_2] \qquad (1)$$

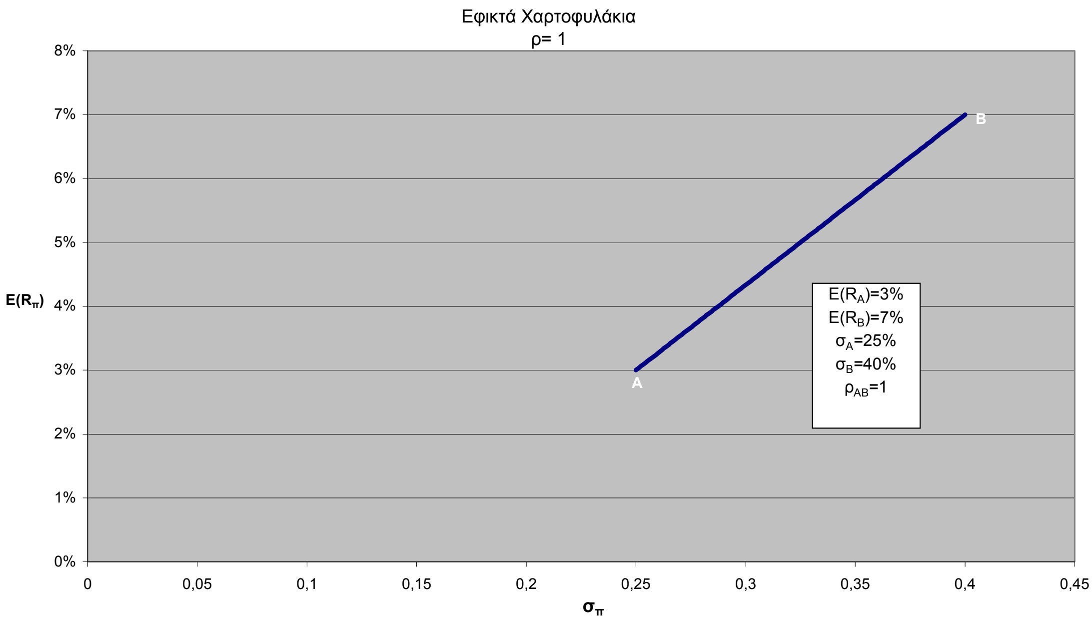
και

$$\begin{aligned} \sigma_\Pi^2 &= w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-w_1)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot w_1 \cdot (1-w_1) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \Leftrightarrow \\ \sigma_\Pi^2 &= \left(w_1 \cdot \sigma_1 + (1-w_1) \cdot \sigma_2\right)^2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Λύνοντας την (2) ως προς w_1 και αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε ότι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου και η τυπική απόκλιση της απόδοσης έχουν μια γραμμική σχέση:

$$E[R_\Pi] = \left[\frac{E[R_1] - E[R_2]}{\sigma_1 - \sigma_2}\right] \cdot \sigma_\Pi + \left[E[R_2] - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \cdot \left(E[R_1] - E[R_2]\right)\right]$$

Αν παραστήσουμε αυτή τη σχέση σε ένα διάγραμμα όπου ο οριζόντιος άξονας παριστάνει την τυπική απόκλιση (δηλαδή την αβεβαιότητα ή τον κίνδυνο) της απόδοσης του χαρτοφυλακίου ενώ ο κάθετος άξονας παριστάνει την αναμενόμενη απόδοση (μέση τιμή της απόδοσης) του χαρτοφυλακίου, θα έχουμε ένα διάγραμμα κινδύνου-απόδοσης για όλα τα χαρτοφυλάκια που μπορούμε να σχηματίσουμε από αυτές τις δύο επενδύσεις. Στο επόμενο διάγραμμα δίνουμε ένα τέτοιο συγκεκριμένο παράδειγμα. Προσέξτε ότι το σημείο Α στο διάγραμμα αντιστοιχεί σε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται εξ ολοκλήρου από την επένδυση Α και το σημείο Β αντιστοιχεί σε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται εξ ολοκλήρου από την επένδυση Β. Οποιοδήποτε άλλο σημείο του ευθυγράμμου τμήματος αντιστοιχεί σε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται κατά κάποιο ποσοστό από την επένδυση Α και κατά κάποιο ποσοστό από την επένδυση Β.



6.3.1.2. Παράδειγμα (συσχέτιση αποδόσεων ίση με -1)

$\rho_{12} = -1$

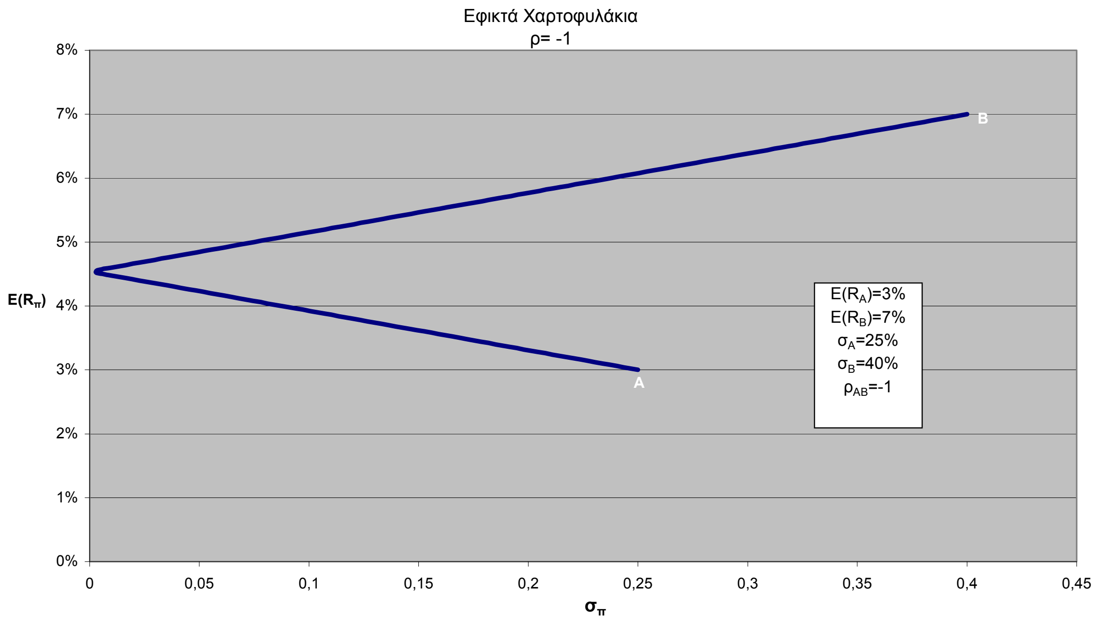
Τότε

$$E[R_{\Pi}] = w_1 \cdot E[R_1] + (1-w_1)\cdot E[R_2] \qquad (1)$$

και

$$\sigma_{\Pi}^2 = w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-w_1)^2 \cdot \sigma_2^2 - 2\cdot w_1 \cdot (1-w_1)\cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \Leftrightarrow$$
$$\sigma_{\Pi}^2 = \left(w_1 \cdot \sigma_1 - (1-w_1)\cdot \sigma_2\right)^2 \qquad (2)$$

Λύνοντας την (1) ως προς w_1 και αντικαθιστώντας στη (2) βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την αναμενόμενη απόδοση (μέση απόδοση) του χαρτοφυλακίου και την τυπική απόκλιση (τον κίνδυνο) της απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Η απεικόνιση αυτής της σχέσης σε ένα διάγραμμα κινδύνου απόδοσης δείχνει όλα τα χαρτοφυλάκια που μπορούμε να σχηματίσουμε με αυτές τις δύο επενδύσεις. Στο επόμενο διάγραμμα δίνουμε το ίδιο παράδειγμα όπως και προηγουμένως αλλά τώρα ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων των δύο επενδύσεων είναι ίσος με -1. Παρατηρείστε ότι σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο έχει μηδενικό κίνδυνο και η απόδοση του είναι καλύτερη από την αναμενόμενη απόδοση της επένδυσης που συμβολίζεται με Α.



6.3.1.3. Παράδειγμα (συσχέτιση αποδόσεων ίση με 0)

$\rho_{12} = 0$

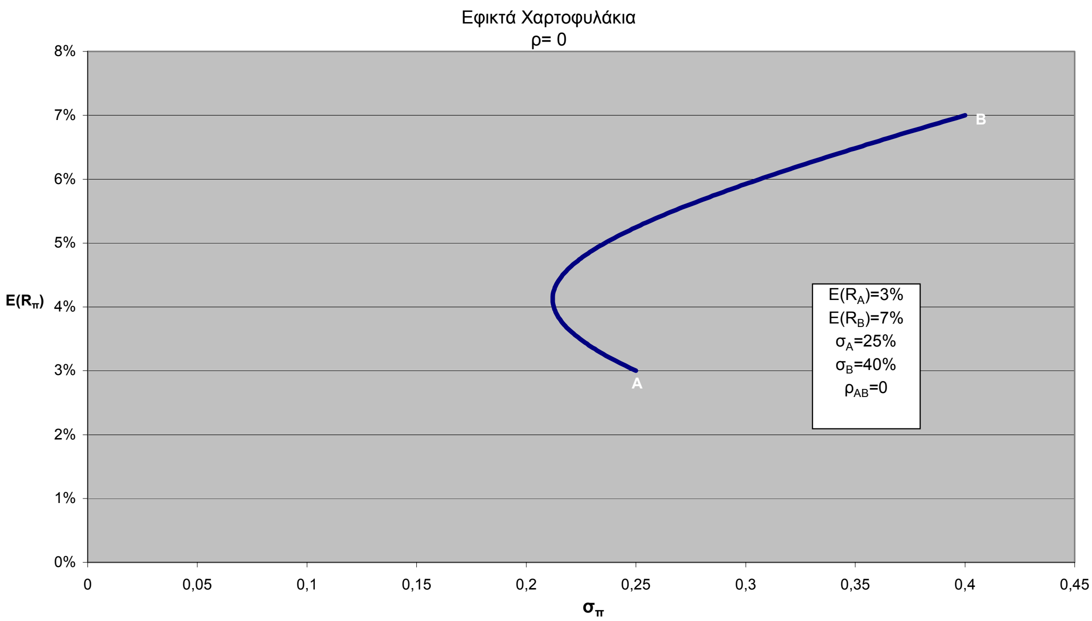
Τότε

$$E[R_{\Pi}] = w_1 \cdot E[R_1] + (1-w_1)\cdot E[R_2] \qquad (1)$$

και

$$\sigma_{\Pi}^2 = w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-w_1)^2 \cdot \sigma_2^2 \qquad (2)$$

Λύνοντας την (1) ως προς w_1 και αντικαθιστώντας στη (2) βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την αναμενόμενη απόδοση (μέση απόδοση) του χαρτοφυλακίου και την τυπική απόκλιση (τον κίνδυνο) της απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Η απεικόνιση αυτής της σχέσης σε ένα διάγραμμα κινδύνου απόδοσης δείχνει όλα τα χαρτοφυλάκια που μπορούμε να σχηματίσουμε με αυτές τις δύο επενδύσεις. Στο επόμενο διάγραμμα δίνουμε το ίδιο παράδειγμα όπως και προηγουμένως αλλά τώρα ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων των δύο επενδύσεων είναι ίσος με 0. Παρατηρείστε ότι σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ένα μοναδικό χαρτοφυλάκιο που μπορεί να σχηματισθεί από τις επενδύσεις A και B και έχει το μικρότερο κίνδυνο από όλα τα χαρτοφυλάκια που μπορούν να σχηματισθούν από αυτές τις δύο επενδύσεις (είναι αυτό το χαρτοφυλάκιο που αντιστοιχεί στη «μύτη» της καμπύλης και ονομάζεται χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου ή χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης). Προσέξτε ότι αυτό το χαρτοφυλάκιο έχει καλύτερη αναμενόμενη απόδοση από την αναμενόμενη απόδοση της επένδυσης A (και φυσικά λιγότερο κίνδυνο). Τα χαρτοφυλάκια που αντιστοιχούν στο τμήμα της καμπύλης που βρίσκεται ανάμεσα στο χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου και στο B ονομάζονται αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια. Καθώς κινούμαστε σε αυτό το τμήμα της καμπύλης από το χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου προς το B αυξάνεται μεν ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου αλλά αυξάνεται και η αναμενόμενη απόδοση. Ένας επενδυτής που αποστρέφεται τον κίνδυνο και έχει τη δυνατότητα επένδυσης *μόνο* σε αυτές τις δύο επενδύσεις θα επιλέξει ένα από τα αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια. Προσέξτε ότι τα χαρτοφυλάκια που αντιστοιχούν στο τμήμα της καμπύλης που βρίσκεται ανάμεσα στο χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου και στο A δεν είναι επιθυμητά αφού για οποιοδήποτε τέτοιο χαρτοφυλάκιο μπορούμε να βρούμε (ακριβώς από πάνω του) ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο το οποίο θα έχει τον ίδιο κίνδυνο και μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση.



6.3.2. Γενικά

Έστω n το πλήθος επενδύσεις $A_1,\ldots,A_n$ με αποδόσεις που περιγράφονται από τις τυχαίες μεταβλητές $R_1,\ldots,R_n$ αντίστοιχα. Έστω ότι η απόδοση R_i της επένδυσης A_i έχει αναμενόμενη τιμή $E[R_i]$ και διακύμανση σ_i^2. Επίσης έστω σ_{ij} η συνδιακύμανση και ρ_{ij} ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων R_i και R_j. Ο πίνακας $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$ ονομάζεται πίνακας συνδιακυμάνσεων ενώ ο πίνακας $\rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ονομάζεται πίνακας συντελεστών συσχέτισης των αποδόσεων.

Έστω ότι ένας επενδυτής σχηματίζει ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από αυτές τις επενδύσεις, τοποθετώντας ποσοστό w_i του πλούτου του στην επένδυση A_i, i=1,...,n . Έτσι ο επενδυτης έχει σηματίσει τα χαρτοφυλάκιο $\Pi = (w_1,...,w_\mathrm{n})$.

Προφανώς $w_1 + ... + w_n = 1$.

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή

$$R_\Pi = w_1 \cdot R_1 + ... + w_n \cdot R_n = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot R_i$$

Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι

$$E[R_\Pi] = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot E[R_i]$$

Η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι

$$\sigma_{\Pi}^2 = Var\left[R_{\Pi}\right] = Var\left[\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot R_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov\left[w_i \cdot R_i, w_j \cdot R_j\right] \Leftrightarrow$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{i,j}\right] = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{i,j} \Leftrightarrow$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} w_i \cdot w_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{i,j}\right] \Leftrightarrow$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j< i}}^{n} w_i \cdot w_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{i,j}\right] \Leftrightarrow$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = (w_1, \dots w_n) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = (w_1, \dots w_n) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $w_1 = w_2 = \dots = w_n = \frac{1}{n}$. Τότε $R_{\Pi} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} R_i$ οπότε

$E[R_{\Pi}] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E[R_i]$ και

$$\sigma_{\Pi}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \cdot \sigma_i^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{n^2} \cdot \sigma_{jk} \Leftrightarrow$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \sigma_i^2 + \frac{n-1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sigma_{jk} \Leftrightarrow$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = \frac{1}{n} \cdot average(\sigma_i^2) + \frac{n-1}{n} \cdot average(\sigma_{jk})$$

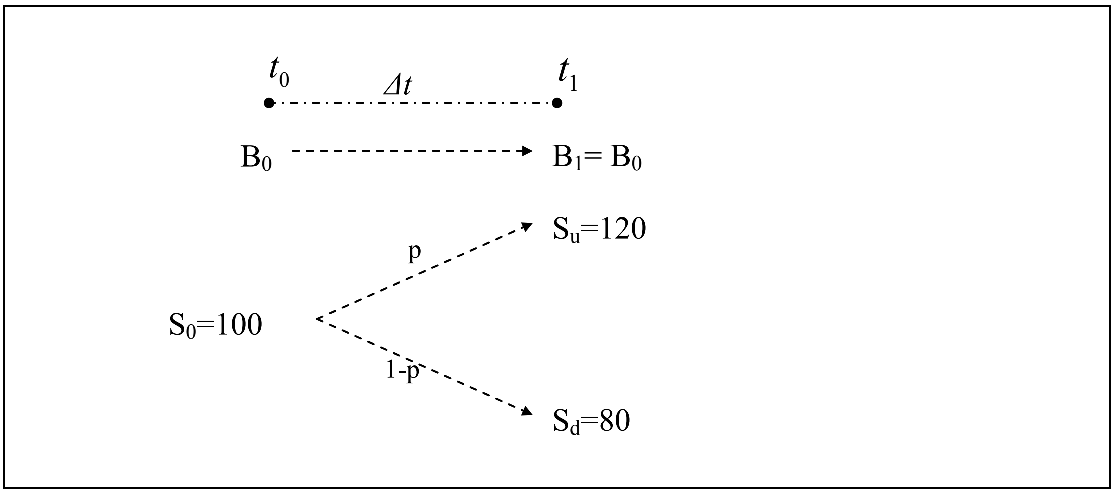
Καθώς $n \to \infty$ έχουμε ότι $\sigma_{\Pi}^2 \to average(\sigma_{jk})$

Άρα σε πολύ μεγάλα (ως προς το πλήθος των στοιχείων που περιλαμβάνουν) χαρτοφυλάκια η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου δεν εξαρτάται από τις διακυμάνσεις των αποδόσεων των στοιχείων που το απαρτίζουν και τείνει προς το μέσο όρο των συνδιακυμάνσεων των αποδόσεων των στοιχείων που το απαρτίζουν.

6.4. Μια εφαρμογή που συνδέει ανάλυση ωφελιμότητας και τιμές παραγώγων.

Έστω επενδυτής με αρχικό πλούτο W του οποίου οι προτιμήσεις σχετικά με τον τελικό του πλούτο εκφράζονται από μια εκθετική συνάρτηση αναμενόμενης ωφελιμότητας της μορφής $u(x) = 1 - \exp(-\lambda \cdot x)$ όπου λ εκφράζει την αποστροφή του επενδυτή στον κίνδυνο.

Έστω ότι έχουμε την παρακάτω αγορά μιας περιόδου με μια αβέβαιη επένδυση S και ένα Τραπεζικό λογαριασμό B (έστω για απλότητα στις πράξεις που θα ακολουθήσουν ότι το επιτόκιο του Τραπεζικού λογαριασμού είναι ίσο με το μηδέν). Η πιθανότητα p παριστάνει την «πραγματική» (ή αυτή που πιστεύει κάποιος επενδυτής) πιθανότητα ανόδου της αβέβαιης πένδυσης



<u>Ερώτημα 1</u>

Ποιος είναι ο βέλτιστος τρόπος που θα τοποθετούσε ο επενδυτής τον πλούτο του σε αυτή την αγορά?

Ο επενδυτής θα μοιράσει τον αρχικό του πλούτο W στον Τραπεζικό λογαριασμό B και στην επένδυση S με τέτοιο τρόπο ώστε να μεγιστοποιείται η αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού του πλούτου. Έστω λοιπόν π το ποσοστό του πλούτου W το οποίο τοποθετεί στην επένδυση S, οπότε τοποθετεί ποσοστό $1-\pi$ του πλούτου του στον Τραπεζικό λογαριασμό. Τότε ο τελικός πλούτος του επενδυτή περιγράφεται από τη λοτταρία:

$$p \circ \left[\frac{\pi \cdot W}{100} \cdot 120 + (1-\pi) \cdot W \right] \oplus (1-p) \circ \left[\frac{\pi \cdot W}{100} \cdot 80 + (1-\pi) \cdot W \right]$$

Άρα, η αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού του πλούτου θα είναι:

$$EU\left(W^*\right) = p \cdot u \left[\frac{\pi \cdot W}{100} \cdot 120 + (1-\pi) \cdot W \right] + (1-p) \cdot u \left[\frac{\pi \cdot W}{100} \cdot 80 + (1-\pi) \cdot W \right] \Rightarrow \cdots$$

$$EU\left(W^*\right) = p \cdot \left[1 - \exp\left(-\lambda \cdot W \cdot (1 + 0,2 \cdot \pi)\right) \right] + (1-p) \cdot \left[1 - \exp\left(-\lambda \cdot W \cdot (1 - 0,2 \cdot \pi)\right) \right]$$

Παραγωγίζοντας ως προς π και εξισώνοντας με το μηδέν βρίσκουμε το ποσοστό π του αρχικού του πλούτου που θα πρέπει να τοποθετήσει στην επένδυση S ώστε να μεγιστοποιείται η αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού του πλούτου:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\pi}EU\left(W^*\right)=0\Leftrightarrow\cdots$$

$$\pi_{\max}=\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\cdot\frac{2,5}{\lambda\cdot W}$$

Αντικαθιστώντας αυτό το ποσοστό στην αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού του πλούτου βρίσκουμε τη μέγιστη αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού του πλούτου:

$$EU\left(W^*\right)_{\max}=1-p\cdot\exp\left(-\lambda\cdot W\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right)-\left(1-p\right)\cdot\exp\left(-\lambda\cdot W\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right)$$

Ερώτημα 2

Έστω τώρα ένα call δικαίωμα C επί της επένδυσης S, με τιμή εξάσκησης K=100 το οποίο λήγει την t_1. Άρα, η αξία του δικαιώματος στη λήξη θα είναι είτε 20 (εάν η S έχει πάει στο 120) είτε 0 (εάν η S έχει πάει στο 80).

Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής σκέφτεται να αγοράσει στην τιμή ένα (μόνο ένα) τέτοιο δικαίωμα στην τιμή P. Ποιος είναι τωρα ο βέλτιστος τρόπος που θα πρέπει να μοιράσει ο επενδυτής τον εναπομείναντα πλούτο του $W-P$ στον Τραπεζικό λογαριασμό και στην επένδυση S?

Ο επενδυτής θα μοιράσει τον πλούτο του $W-P$ στον Τραπεζικό λογαριασμό B και στην επένδυση S με τέτοιο τρόπο ώστε να μεγιστοποιείται η αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού του πλούτου. Έστω λοιπόν π το ποσοστό του πλούτου $W-P$ το οποίο τοποθετεί στην επένδυση S, οπότε τοποθετεί ποσοστό $1-\pi$ του πλούτου του στον Τραπεζικό λογαριασμό. Τότε ο τελικός πλούτος του επενδυτή περιγράφεται από τη λοτταρία:

$$p\circ\left[\frac{\pi\cdot(W-P)}{100}\cdot 120+\left(1-\pi\right)\cdot(W-P)+20\right]\oplus\left(1-p\right)\circ\left[\frac{\pi\cdot(W-P)}{100}\cdot 80+\left(1-\pi\right)\cdot(W-P)+0\right]$$

Άρα, η αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού του πλούτου δίνεται ως

$$EU\left(W^*\right)=p\cdot u\left[\frac{\pi\cdot(W-P)}{100}\cdot 120+\left(1-\pi\right)\cdot(W-P)+20\right]+\left(1-p\right)\cdot u\left[\frac{\pi\cdot(W-P)}{100}\cdot 80+\left(1-\pi\right)\cdot(W-P)\right]$$

Που μετά από τις σχετικές πράξεις δίνει:

$$EU\left(W^*\right)=1-p\cdot\exp\left(-\lambda\cdot(W-P)\cdot(1+0,2\cdot\pi)-20\cdot\lambda\right)-\left(1-p\right)\cdot\exp\left(-\lambda\cdot(W-P)\cdot(1-0,2\cdot\pi)\right)$$

Παραγωγίζοντας ως προς π και εξισώνοντας με το μηδέν βρίσκουμε το ποσοστό π του αρχικού του πλούτου που θα πρέπει να τοποθετήσει στην επένδυση S ώστε να μεγιστοποιείται η αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού του πλούτου:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\pi}EU\left(W^*\right)=0\Leftrightarrow\cdots$$

$$\pi_{\max}=\frac{\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\cdot 2,5-50\cdot\lambda}{\lambda\cdot(W-P)}$$

Αντικαθιστώντας αυτό το ποσοστό στην αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού του πλούτου βρίσκουμε τη μέγιστη αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού του πλούτου ως συνάρτηση της τιμής P του παραγώγου:

$$EU\left(W^*\right)_{\max}(P)=$$

$$1-p\cdot\exp\left(-\lambda\cdot(W-P)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)-10\cdot\lambda\right)-\left(1-p\right)\cdot\exp\left(-\lambda\cdot(W-P)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)-10\cdot\lambda\right)$$

<u>Ερώτημα 3</u>

Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή P στην οποία θα ήταν διατεθειμένος ο επενδυτής να αγοράσει το δικαίωμα call?

Ο επενδυτής σκέφτεται:

Εάν δεν αγοράσω το call τότε η μέγιστη αναμενόμενη ωφελιμότητα τελικού πλούτου που μπορώ να πετύχω είναι σύμφωνα με το αποτέλεσμα του ερωτήματος 1 ίση με

$$EU\left(W^*\right)_{\max}=1-p\cdot\exp\left(-\lambda\cdot W\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right)-\left(1-p\right)\cdot\exp\left(-\lambda\cdot W\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right)$$

Εάν αγοράσω το call σε κάποια τιμή P, τότε η μέγιστη αναμενόμενη ωφελιμότητα τελικού πλούτου που μπορώ να πετύχω (ως συνάρτηση του P) είναι σύμφωνα με το αποτέλεσμα του ερωτήματος 2 ίση με

$$EU\left(W^*\right)_{\max}(P)=$$

$$1-p\cdot\exp\left(-\lambda\cdot(W-P)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)-10\cdot\lambda\right)-\left(1-p\right)\cdot\exp\left(-\lambda\cdot(W-P)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)-10\cdot\lambda\right)$$

Αρα, για ποια τιμή P είμαι αδιάφορος ανάμεσα σε αυτές τις δύο επιλογές, δηλαδή για ποια τιμή P είτε αγοράσω είτε δεν αγοράσω το call θα έχω την ίδια μέγιστη αναμενόμενη ωφελιμότητα? Θα πρέπει δηλαδή να λύσει ως προς P την εξίσωση:

$$EU\left(W^*\right)_{\max}=EU\left(W^*\right)_{\max}(P)$$

Η οποία μετά από αρκετές απλοποιήσεις δίνει $P=10$ (η τιμή αυτή είναι ανεξάρτητη από την πιθανότητα p). Μα αυτή είναι η non-arbitrage τιμή του call option!!!.

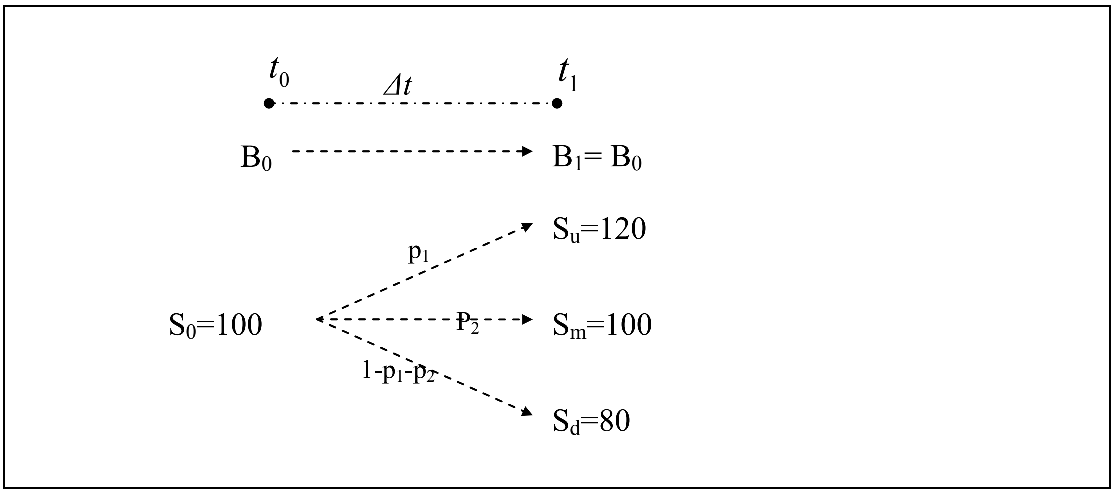
<u>Ερώτημα 4</u>

Αναπτύξτε το ανάλογο σκεπτικό στην περίπτωση που ήθελε να πουλήσει το call option. Κάντε όλες τις πράξεις. (Και σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να βρείτε P=10).

<u>Ερώτημα 5 (έχει πολλές πράξεις)</u>

Έστω, όπως και πριν, ένας επενδυτής με αρχικό πλούτο W του οποίου οι προτιμήσεις σχετικά με τον τελικό του πλούτο εκφράζονται από μια εκθετική συνάρτηση αναμενόμενης ωφελιμότητας της μορφής $u(x)=1-\exp(-\lambda\cdot x)$ όπου λ εκφράζει την αποστροφή του επενδυτή στον κίνδυνο.

Έστω επίσης ότι έχουμε την παρακάτω αγορά μιας περιόδου με μια αβέβαιη επένδυση S και ένα Τραπεζικό λογαριασμό B (έστω για απλότητα στις πράξεις που θα ακολουθήσουν ότι το επιτόκιο του Τραπεζικού λογαριασμού είναι ίσο με το μηδέν). Η πιθανότητες p1, p2, παριστάνουν τις «πραγματικές» (ή αυτές που πιστεύει κάποιος επενδυτής) πιθανότητες για την αντίστοιχη εξέλιξη της αξίας της επένδυσης.



Έστω επίσης ένα call δικαίωμα C επί της επένδυσης S, με τιμή εξάσκησης K=100 το οποίο λήγει την t_1. Άρα, η αξία του δικαιώματος στη λήξη θα είναι είτε 20 (εάν η S έχει πάει στο 120) είτε 0 (εάν η S έχει πάει στο 100 ή στο 80).

Αναπτύξτε παρόμοιο σκεπτικό με αυτό που αναπτύξαμε στα προηγούμενα ερωτήματα για να βρείτε σε ποια τιμή θα ήταν διατεθειμένος ένας επενδυτής να αγοράσει μια μονάδα από αυτό το call option και σε ποια τιμή θα ήταν διατεθειμένος να πουλήσει μια μονάδα από αυτό το call option.