Κεφάλαιο 4ο: Γραμμική Άλγεβρα

ΌpwV xέroum¶ έnaV pίnakaV ¶isάg¶tai ¶ίt¶ m¶ ta stoic¶ίa tou ¶ίt¶ m¶ crήsh thV Table ¶ίt¶ m¶ crήsh thV Array.

```
a = 881, 3, 2<, 84, 0, −1<<
b = Table@i ^ j, 8i, 3<, 8j, −1, 2<D
c = Array@#1 ^ #2 &, 83, 4<D

881, 3, 2<, 84, 0, −1<<
```

```
981, 1, 1, 1<, 9 1/2 , 1, 2, 4=, 9 1/3 , 1, 3, 9==
```

```
881, 1, 1, 1<, 82, 4, 8, 16<, 83, 9, 27, 81<<
```

To Array[#1^#2&,{3,4}] parάg¶i 3 grammέV m¶ 4 stήl¶V kai stoic¶ία a@i, jD = i^j. Gia na parάgoum¶ akribώV to b qά prέp¶i na grάyoum¶

```
Clear@cD
c = Array@#1 ^ #2 &, 83, 4<, 81, −1<D

981, 1, 1, 1<, 9 1/2 , 1, 2, 4=, 9 1/3 , 1, 3, 9==
```

To {1,-1} sta dexiά shmaίn¶i όti h prώth sunt¶tagmέnh x¶kinά¶i m¶ to 1 kai h d¶ύt¶rh m¶ to -1. P.c

```
Clear@cD
c = Array@d, 83, 4<, 81, −1<D

88d@1, −1D, d@1, 0D, d@1, 1D, d@1, 2D<,
 8d@2, −1D, d@2, 0D, d@2, 1D, d@2, 2D<,
 8d@3, −1D, d@3, 0D, d@3, 1D, d@3, 2D<<
```

Fusikά, antί thV Array mporoύm¶ na crhsimopoiήsoum¶ thn Table s¶ kάq¶ p¶rίptwsh.

4.1 Baqmída dianusmátwn kai baqmída (táxh) pínaka

Baqmída twn dianusmátwn $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **onomázoume thn diástash tou grammikoú cẃrou pou parágetai apo touV grammikoúV sunduasmoúV twn dianusmátwn autẃn. Gia na broúm¶ thn baqmída kápoiwn dianusmátwn ¶kt¶loúm¶ stoic¶iẃd¶iV grammopráx¶iV ston pínaka me grammèV ta dianúsmata autá**(**metáqesh**, **prósqesh** ή**ajaíresh kápoiaV grammήV se mia állh** k.o.k) **étsi ẃst¶ oi t¶l¶utaí¶V grammèV na gínoun mhd¶nikéV kai káqe mh mhdenikή grammή na xekináei me monáda- thn monáda odhgó. Oi grammopráx¶iV ¶kt¶loúntai m¶ thn sunárthsh** RowReduce. **To plήqoV twn mh mhdenikẃn grammẃn pou prokúptoun eínai h zhtoúmenh baqmída**.

```
RowReduce@aD
RowReduce@bD

991, 0, - 1/4 =, 90, 1,  3/4 ==
```

```
881, 0, 0, 6<, 80, 1, 0, -11<, 80, 0, 1, 6<<
```

Den emjanízontai mhdenikéV grammèV. H baqmída touV eínai ísh me 3. Ara **kai stiV dúo p¶riptẃs¶iV écoum¶ an¶xárthta dianúsmata stiV grammèV twn** a,b. **An prosqésoum¶ sthn** a **to diánusma** {2,6,4} **tót¶ cán¶tai h gram. an¶xarthsía**:

```
d = Append@a, 82, 6, 4<D
d êê MatrixForm
RowReduce@dD

881, 3, 2<, 84, 0, -1<, 82, 6, 4<<
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

```
991, 0, - 1/4 =, 90, 1,  3/4 =, 80, 0, 0<=
```

H mhdenikή grammή deícnei thn grmmikή exárthsh twn grammẃn tou pínaka d (**h tríth grammή eínai** 2 **jorèV thn** 1**h**)

H táxh enóV pínaka d **¶ínai ísh m¶ to plήqoV twn mh mhd¶nikẃn grammẃn tou** RowReduce[d]. **Sthn p¶ríptwsh maV loipón ¶ínai ísh m¶** 2. Ara **móno duo ap'autéV tiV gramm¶V ¶ínai gr. an¶xárthtV**.

Parád¶igma: **Dín¶tai énaV** 5X5 **pínakaV** a **m¶ grammèV**

```
x = 81, 2, −1, 0, 1<; y = 82, 1, 0, 1, 3<; z = 80, 3, −2, −1, −1<;
t = 82, 4, −2, 0, 2<; s = 84, 5, −2, 1, 5<;
```

Diapistώs¶t¶ όti oi grammέV ¶ίnai gr. ¶xarthmέn¶V kai sthn sunέc¶ia na br¶q¶ί έnaV mh mhdenikόV grammikόV sunduasmόV touV pou na maV dίn¶i to mhd¶nikό diάnusma.

Lύsh: Qa crhsimopoiήsoum¶ thn RowReduce gia na doύm¶ όti ¶ίnai gr. ¶xarthmέna kai sthn sunέc¶ia thn Reduce ή thn LinearSolve gia na lύsoum¶ to sύsthma a.w=={0,0,0,0,0}. H Reduce[¶xisώs,m¶tabl] aplopoi¶ί tiV ¶xisώs(oi ¶xisώs mpor¶ί na p¶rilambάnoun kai anisώs¶iV) wV proV tiV m¶tabl. Oi ¶xisώs¶iV pou prokύptoun ¶ίnai isodύnam¶V m¶ tiV arcikέV. H Reduce[¶xisώs,m¶tabl,p¶dίo] p¶riorίz¶i thn aplopoίhsh sto p¶dίo(p.c p¶dίo=Integers)

```
Clear@aD; a = 8x, y, z, t, s<; RowReduce@aD
```

$$\left\{\left\{1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right\}, \left\{0, 1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\right\}$$

Άra ¶ίnai gr. ¶xarthmέneV kai h tάxh tou pίnaka a ¶ίnai ίsh m¶ 2

```
Reduce@w0 x + w1 y + w2 z + w3 t + w4 s « 0, 8w0, w1, w2, w3, w4<D

w0 == −2 Hw2 + w3 + w4L && w1 == w2 − w4
```

Όmoia m¶ thn crήsh thV LinearSolve

```
LinearSolve@a, 80, 0, 0, 0, 0<D

80, 0, 0, 0, 0<
```

Parathroύm¶ thn diajorά. H LinearSolve maV έdws¶ mόno mίa lύsh, thn mhdenikή!

4.2 Grammikά sustήmata

Έstw όti έcoum¶ έna grammikό sύsthma thV morjήV A.C=B όpou A ¶ίnai έnaV mXn pίnakaV kai B ¶ίnai έnaV mX1 pίnakaV. To m eίnai to plήqoV twn exisώsewn kai to n twn agnώstwn. Gia na έc¶i lύsh qa prέp¶i h tάxh tou A na ¶ίnai ίsh m¶ thn tάxh tou ¶pauxhmέnou pίnaka (A|B).
p.c gia to sύsthma -2x+y+z=1, x-2y+z=-2, x+y-2z=4 έcoum¶:

```
A = 88-2, 1, 1<,
    81, -2, 1<,
  81, 1, -2<<; B = 81, -2, 4<;
epayx = 88-2, 1, 1, 1<,   81, -2, 1, -2<, 81, 1, -2, 4<<
RowReduce@AD
RowReduce@epayxD
```

```
88-2, 1, 1, 1<, 81, -2, 1, -2<, 81, 1, -2, 4<<
```

```
881, 0, -1<, 80, 1, -1<, 80, 0, 0<<
```

```
881, 0, -1, 0<, 80, 1, -1, 0<, 80, 0, 0, 1<<
```

Parathroúm¶ óti oi dúo pínak¶V d¶n écoun thn ídia baqmída(táxh) ára to sústhma ¶ínai adúnaton.

Autó mproroúm¶ na ton diapistώsoum¶ kai m¶ állo trópo: ZhtώntaV m¶ thn LinearSolve **na lúsei to sústhma:**

```
LinearSolve@A, BD
```

```
LinearSolve::nosol : Linear equation encountered which has no solution.
```

```
LinearSolve@88-2, 1, 1<, 81, -2, 1<, 81, 1, -2<<, 81, -2, 4<D
```

Eidiká sthn p¶ríptwsh pou o A ¶ínai énaV t¶tragwnikóV pínakV tót¶ upárc¶i h p¶ríptwsh miaV kai monadikήV lúshV. Autó qa sumb¶í ótan o A kai o ¶pauxhménoV écoun táxh akribώV ish m¶ thn diástash tou A dhl. m¶ to plήqoV grammώn tou. Bébaia gia t¶tragwnikoúV A upárc¶i kai to kritήrio thV ourízousaV: Άn h det[A] **¶ínai mh mhd¶nikήtót¶ káq¶ grammikó sústhma A.C=B éc¶i ópwV xéroum¶ mia monadikή lúsh thn C = A^{-1} B. P.c o pínakaV** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 11 & -12 \end{pmatrix}$ **d¶n ¶ínai antistréyimoV:**

```
Clear@AD
A = (  2  -1   3
       1   3  -2
      -1  11 -12 ); Det@AD
```

```
0
```

opót¶ éna opoiodήpot¶ sústhma m¶ pínaka sunt¶l¶stώn ton A p.c A.X= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ **d¶n éc¶i monadikή lúsh:**

```
Clear@x, y, zD
Reduce@A.8x, y, z< « 81, 2, 4<, 8x, y, z<D
```

$x == \frac{1}{7}(5 - 7z)\ \&\&\ y == \frac{1}{7}(3 + 7z)$

```
Solve@A.8x, y, z< « 81, 2, 4<, 8x, y, z<D
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$\{\{x \to \frac{5}{7} - z,\ y \to \frac{3}{7} + z\}\}$

H Solve kai h Reduce eínai scetikéV. H Reduce geniká uperpereí dióti bríksei óleV tiV dunatéV lúseiV.

Áskhsh: Na jtiacteí mia sunárthsh epayxhmenosMatrix[m_List,k_list] ópou m kai k eínai dúo pínakeV kai pou qa epistréjei ton epauxhméno pínaka touV dhl. ton pínaka m ston opoío écoume episunáyei sta dexía twn sthlón tou, tiV sthleV tou k. Upódeixh. Crhsimopoieíste katállhla thn sunárthsh Append.

4.3 Oi IdiotiméV kai ta idioduanúsmata ¶nóV pínaka

Gia na broúm¶ ta idioduanúsmata ¶nóV t¶tragwnikoú pínaka A qa prép¶i prώta na broúm¶ tiV idiotiméV tou dhl. tiV ríz¶V tou carathristikoú poluwnúmou tou A. X¶kinám¶ m¶ éna parád¶igma. Éstw A= $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Tót¶ to carakthristikó poluώnumo tou ¶ínai íso m¶ Det[A-x IdentityMatrix[3]] ópou to IdentityMatrix[3]] ¶ínai o tautotikóV pínakaV 3X3

```
Clear@AD
A = (3  -2  0
     -2  3  0
     0   0  5)
charPoly = Det@A - x IdentityMatrix@3DD
idiotimes = Solve@charPoly « 0, xD
```

883, -2, 0<, 8-2, 3, 0<, 80, 0, 5<<

$25 - 35x + 11x^2 - x^3$

88x → 1<, 8x → 5<, 8x → 5<<

M¶ ά**lla l**ó**gia** έ**coum¶ d**ú**o idiotim**έ**V thn** r_1 **=** 5**kai thn** r_2 **=** 1**pollapl**ó**thtaV** 2 **kai** 1 **ant**í**stoica**.
Έ**naV pio ¶**ú**kolоV tr**ó**poV na br**í**skoum¶ tiV idiotim**έ**V ¶**í**nai m¶ thn cr**ή**sh thV** Eigenvalues:

```
Eigenvalues@AD

81, 5, 5<
```

Gia na broú**m¶ mia l**í**sta m¶ ta ant**í**stoica idioduan**ú**smata qa crhsimopoi**ή**soum¶ thn** Eigenvectors:

```
Eigenvectors@AD

881, 1, 0<, 80, 0, 1<, 8-1, 1, 0<<
```

To pró**blhma m¶ thn** Eigenvector **¶**í**nai** ó**ti d¶n mporo**ú**m¶ na ¶ntop**í**soum¶ apo thn ap**ά**nthsh poi**ά **idioduan**ú**smata antistoico**ú**n s¶ mia idiotim**ή. **Gia aut**ó **to l**ó**go qa crhsimopoi**ή**soum¶ thn** NullSpace. **H** NullSpace[m] **maV d**í**n¶i thn b**ά**sh tou c**ώ**rou twn l**ú**s¶wn tou omog¶no**ú**V sust**ή**matoV** m.X=**0**. **Op**ó**t¶ m¶** NullSpace[A-**l**IdentityMatrix[n]] (ó**pou** n **h di**ά**stash tou A**) **pa**í**rnoum¶ mia b**ά**sh gia ta idion**ú**smata pou antistoico**ú**n sthn idiotim**ή **l p.c**.

```
bashldioxwroy@5D = NullSpace@A - 5 IdentityMatrix@3DD
bashldioxwroy@1D = NullSpace@A - 1 IdentityMatrix@3DD

880, 0, 1<, 8-1, 1, 0<<
```

```
881, 1, 0<<
```

Dhl. **mia b**ά**sh tou idoc**ώ**rou** (**tou c**ώ**rou twn idiodianusm**ά**twn**)**pou antistoic¶**í **sthn l**=5 **¶**í**nai h** {{0, 0, 1}, {-1, 1, 0}} **kai mia b**ά**sh tou idoc**ώ**rou pou antistoic¶**í **sthn l**=1 **¶**í**nai h** {{1,1,0}}. **T¶l¶i**ώ**noum¶ thn ¶n**ó**thta m¶ to anaj**έ**roum¶** ó**ti m¶ thn sun**ά**rthsh** CharacteristcPolynomial **mporo**ú**m¶ cwr**í**V k**ó**po na bro**ú**m¶ to carakthristik**ó **polu**ώ**numo**:

```
Clear@tD
CharacteristicPolynomial@A, tD

25 - 35 t + 11 t^2 - t^3
```

4.4 H diagwnopoíhsh ¶nóV t¶tragwnikoú pínaka

H diagwnopoíhsh ¶nóV pínaka A éc¶i scésh m¶ tiV idiotiméV tou kai m¶ touV antístoicouV idiócwrouV. Eínai gnwstó apo thn q¶wría óti o A diagwnopoi¶ítai (dhl. upárcei énaV antistréyimoV pínakaV P **kai énaV diagώnioV** D **étsi ώste** D=Invrse[P].A.P) **ann h pollaplóthta thV opoiasdήpote idiotimήV l tou A sumpípt¶i m¶ thn diástash tou antístoicou idiocώrou thV.** Άn **káti tétoio iscú¶i tót¶** o **A diagwnopoi¶ítai kai o** D **éc¶i sthn diagώnio tiV idiotiméV kai o** P **écei stiV stήleV tou ta antístoica idioduanúsmata p.c**

```
P1 = Eigenvectors@AD
P = Transpose@P1D
Inverse@PD
diagwnios = Inverse@PD.A.P êê MatrixForm

881, 1, 0<, 80, 0, 1<, 8−1, 1, 0<<
```

```
881, 0, −1<, 81, 0, 1<, 80, 1, 0<<
```

```
99 1/2, 1/2, 0=, 80, 0, 1<, 9− 1/2, 1/2, 0==
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

M¶ thn ¶ukairía na anajéroum¶ óti h DiagonalMatrix[d]**dín¶i éna diagώnio pínaka m¶ diagώnio** d. **p.c**

```
DiagonalMatrix@Eigenvalues@ADD êê MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

O antistréyimoV pínakaV P **me thn idióthta** P.diagwnios.Inverse[P]=A **den upárcei pánta** για κάθε πίνακα A. **Autó pou eínai gnwstó apo thn Grammikή'Algebra eínai óti upárcoun dúo pínakeV** R **kai** Q **kai énaV diagώnioV** D =Diagonal[m] **étsi ώste**:
A=Transpose[R].D.Q. **Oi pínakeV autoí mporoúme na touV broúme me thn sunárthsh** SingularValues[A]. H SingularValues[A] **epistréjei éna pínaka me stoiceía** {R,m,Q}. **Gia na crhsimopoiήsoume thn** SingularValues[A] **prépei ta stoiceía tou A na dínontai me upodiastolή! Parádeigma**:

```
N@AD
b = SingularValues@N@ADD

883., -2., 0.<, 8-2., 3., 0.<, 80., 0., 5.<<
```

```
888-0.707107, 0.707107, 0.<,
  80., 0., 1.<, 8-0.707107, -0.707107, 0.<<,
 85., 5., 1.<, 88-0.707107, 0.707107, 0.<,
  80., 0., 1.<, 8-0.707107, -0.707107, 0.<<<
```

```
N@AD « Transpose@b@@1DDD.DiagonalMatrix@b@@2DDD.b@@3DD
b@@1DD êê MatrixForm
DiagonalMatrix@b@@2DDD êê MatrixForm
b@@3DD êê MatrixForm

True
```

```
¡ -0.707107  0.707107  0. ¥
¢    0.         0.     1. ¦
k -0.707107 -0.707107  0. {
```

```
¡ 5.  0   0  ¥
¢ 0   5.  0  ¦
k 0   0   1. {
```

```
¡ -0.707107  0.707107  0. ¥
¢    0.         0.     1. ¦
k -0.707107 -0.707107  0. {
```

Parathroúme óti sthn períptwsh pou énaV pínakaV A diagwnopoieítai tóte o Transpose[R] **kai o** Q **pou dínei h** SingularValues **sumpíptoun**!

4.5 Εύρεση δυνάμεων πινάκων

Η διαγωνοποίηση είναι χρήσιμη για την γρήγορη εύρεση δυνάμεων τετραγωνικών πινάκων. Για παράδειγμα στο παραπάνω παράδειγμα υψώνοντας τις ιδιοτιμές στην διαγώνιο εις την 10η μπορούμε να βρούμε την 10η δύναμα του A: A^{10} = P.DiagonalMatrix@8$1^{10}$, 5^{10}, 5^{10}<D.Inverse@PD

```
P.DiagonalMatrix@81^10, 5^10, 5^10<D.Inverse@PD êê MatrixForm

i  4882813  -4882812     0     y
j -4882812   4882813     0     z
k    0          0     9765625  {
```

Με την ευκαιρία να αναφέρουμε ότι με `A^10`παίρνουμε

```
A^10

8859049, 1024, 0<, 81024, 59049, 0<, 80, 0, 9765625<<
```

δηλ. αποτέλεσμα διαφορετικό απο αυτό που βρήκαμε πριν. Αυτό δεν σημαίνει ότι έχουμε κάνει λάθος παραπάνω. Οφείλεται στο γεγονός ότι στο *Mathematica* ο πολλαπλασιασμός A*A δεν είναι ο γνωστός μας πολλαπλασιασμός πινάκων. Ο γνωστός μας πολλαπλασιαμός πινάκων γίνεται με το Dot[A,B] που συμβολίζεται απλά με A.B Γενικά την n-ιοστή δύναμη του πίνακα A μπορούμε να την ορισουμε αναδρομικά ή αλλιώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση Nest π.χ

```
pollaplasiasmos@a_D := A.a
Nest@pollaplasiasmos, A, 9D

884882813, -4882812, 0<, 8-4882812, 4882813, 0<, 80, 0, 9765625<<
```

```
?Nest

Nest@f, expr, nD gives an
  expression with f applied n times to expr.
```

Δηλαδή η Nest επιστρέφει το f(f(...f(expr))...))) όπου το f έχει εφαρμοστεί n φορές στην expr. Στην προηγούμενη χρήση του Nest εφαρμόσαμε 9 φορές το pollaplasiasmos διότι ήδη μέσα στο pollaplasiasmos υπάρχει ήδη 1 εφαρμογή του πολλαπλασιασμού με τον A.

4.6 Allagή thV bάshV tou Ñ^n

Έstw όti maV dίnoun duo bάs¶iV tou Ñ^n. Tόt¶ to pιrasma apo thn mία bάsh sthn άllh p¶rigrάj¶tai m¶ ιna antistrιyimo pίnaka P pou lιg¶tai pίnakaV m¶tάbashV.AV doύm¶ ιna parάd¶igma. Dίn¶tai mia bάsh B$_1$ tou Ñ^4 kai o pίnakaV metάbashV apo thn sunήqh bάsh sthn B$_1$ eίnai o $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Na breqoύn oi suntetagmιneV tou dianύsmatoV {1,2,3,4} sthn paliά(sunήqh) bάsh. Apάnthsh: Oi suntetagmιneV eίnai to ginόmeno P.{1,2,3,4}. ΆV doύme tiV prάxeiV

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
881, 1, 0, −1<, 8−1, 2, 1, 0<, 82, −1, 1, −2<, 8−2, −2, 0, 3<<
```

```
P.81, 2, 3, 4<
```

```
8−1, 6, −5, 6<
```

Oi suntetagménew tou {1,0,0,0} **(dhl. tou prώtou basikoύ dianύsmatoV thV B**$_1$ **Lsth sunήqh básh einai**:

```
P.81, 0, 0, 0<
```

```
81, −1, 2, −2<
```

Autή eίnai h prώth stήlh tou P. **Όmoia diapistώnoume óti oi stήleV tou** P **eίnai oi suntetagménew twn dianusmátwn thV néaV báshV wV proV thn sunήqh βásh. AVdoύme to antrίstrojo próblhma : Dίnetai éna diánusma me suntetagménew** 8 - 1, 6, - 5, 6< **wV proV thn sunήqh básh. PoiéV eίnai oi suntetagménew tou sthn néa básh**;

Skej tómaste wV exήV epeidή 8−1, 6, −5, 6< = *P*.8*x*$_1$, *x*$_2$, *x*$_3$, *x*$_4$<

qa prépei P^{-1}.8 - 1, 6, - 5, 6< = 8x$_1$, x$_2$, x$_3$, x$_4$<.

```
Inverse@PD.8−1, 6, −5, 6<
```

```
81, 2, 3, 4<
```

dhl. autό pou perimέname. Genikά qa prέpei o pίnakaV metάbashV P **apό mia bάsh se mia άllh na eίnai έnaV antistrέyimoV pίnakaV. AV doύme άllo έna parάdeigma: Dίnetai h bάsh B_2 pou oi suntetagmέneV twn basikώn dianusmάtwn eίnai oi stήleV tou pίnaka Q =**

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

. Ajoύ deίxete όti prάgmati apoteloύn bάsh na breίte ton pίnaka metάbashV apo thn B_1 sth B_2.

Apάnthsh: Kat' arcήn qa elέgxoume thn orίzousa tou Q. **An eίnai mh mhdenikή tόte oi stήleV eίnai grammikώV anexάrthteV kai άra apoteloύn mia bάsh. Gia na broύme ton pίnaka metάbashV apo thn B_1 sth B_2 brίskoume prώta ton pίnaka metάbashV apo thn B_1 sthn sunήqh HautόV eίnai o** Inverse@PDL **kai apo thn sunήqh sthn B_2 HmέswtouQL. Telikά o zhtoύmenoV eίnai o** Inverse@PD.Q

```
Q = ( -2  0  -2   1
      -1  1   0  -2
       1  2  -1  -1
      -2  2   1  -2 )

88-2, 0, -2, 1<, 8-1, 1, 0, -2<, 81, 2, -1, -1<, 8-2, 2, 1, -2<<
```

```
Det@QD

25
```

```
Inverse@PD

99 13/6, -1/6, 1/6, 5/6=, 9 5/6, 1/6, -1/6, 1/6=,
  9 1/2, 1/2, 1/2, 1/2=, 82, 0, 0, 1<=
```

```
MatrixForm@Inverse@PD.QD

( -17/3  11/6  -11/3   2/3
   -7/3   1/6   -4/3   1/3
   -2     5/2   -1    -2
   -6     2     -3     0  )
```

Genikά mporoύme na jtiάxoume mia sunάrthsh me eίsodo duo doqeίseV bάseiV V_1, V_2(**ήna to poύme kalύtera me eίsodo tiV suntetagmέneV twn basikώn dianusmάtwn twn** V_1, V_2 **ώV proV thn sunήqh bάsh)kai qa maV epistrέjei ton pίnaka metάbashV apo thn mia sthn άllh.**

```
changeBasis@V1_List, V2_ListD :=
 If@Det@V1D != 0, Inverse@Transpose@V1DD.Transpose@V2D,
  "η αλλαγήβάσεως δεν είναι δυνατή"D
```

```
changeBasisA
  1  -1   2  -2      -2  -1   1  -2
  1   2  -1  -2   ,   0   1   2   2   E
  0   1   1   0      -2   0  -1   1
 -1   0  -2   3       1  -2  -1  -2

99-17/3, 11/6, -11/3, 2/3=, 9-7/3, 1/6, -4/3, 1/3=,
 9-2, 5/2, -1, -2=, 8-6, 2, -3, 0<=
```

Άskhsh: O prosarthménoV pínakaV(adjoint) enóV tetragwnikoú pínaka A sumbolízetai me adj[A] kai écei stoiceía ta $b@i, jD = H-1L^{i+j} D_{j,i}$ ópou me $D_{j,i}$ sumbolízoume thn orízousa tou A ótan apo ton A ajaireqeí h j grammήkai h i stήlh. Kataskeuásete mia sunárthsh minorMatrix[m_List,i_Integer/;-Positive[i],j_Integer/;Positive[j]] pou me eísodo ta m, i,j qa epistréjei ton elLásona pínaka tou m cwríV thn i grammήkai thn j stήlh. Sthn sunéceia kataskeuásete thn sunárthsh adjointMatrix[m] pou qa epistréjei ton prosarthméno pínaka tou m kai dokimáste(gia éna sugkekriméno m)an iscúei h isóthta:

m.adjointMatrix[m] ==Det[m].IdentityMatrix[Length[m]]==adjointMatrix[m].m Upódeixh: Gia thn kataskeuήthV minorMatrix mporeíte na crhsimopoiήsete tiV sunartήseiV Drop kai Part pou eídame se prohgoúmeno máqhma.

4.7 GrammikéV sunartήseiV kai pínakeV

Se autήn thn enóthta qa meletήsoume touV pínakeV apo mia állh skopiá. Káqe pínakaV A diastásewn mXn orízei mia grammikήsunárthsh $f : Ñ^n$ -> $Ñ^m$ me orismó $f@e$]=A.$\{x_1, .. x_n\}$. (me $\{x_1, .. x_n\}$ ennooúme tiV suntetagméneV tou dianúsmatoV e tou $Ñ^n$ wV proV thn sunήqh bász tou $Ñ^n$. Akóma me f[e] den ennooúme kápoio diánusma e_1 tou $Ñ^m$ allá tiV suntetagméneV tou e_1 wV proV thn sunήqh bász tou $Ñ^m$). Antístroja káqe grammikή $f : Ñ^n$ -> $Ñ^m$ antistoiceí se éna pínaka A. AV doúme éna parádeigma:

```
     2   3  -1
A =  3  -1   2
     1   2   3

882, 3, -1<, 83, -1, 2<, 81, 2, 3<<
```

tóte h sunárthsh matrixToFunction pou orízetai parakátw ton metatrépei se grammikήsunárthsh:

```
matrixToFunction@m_ListD := m.Table@xi, 8i, Length@First@mDD<D
f = matrixToFunction@AD

82 x1 + 3 x2 - x3, 3 x1 - x2 + 2 x3, x1 + 2 x2 + 3 x3<
```

To Length[First[m]] **eínai íso me to plήqoV twn sthlών tou** m. **Gia to antístrojo próblhma prέpei na jtiáxoume mia sunárthsh** functionToMatrix **pou na maV epistrέjei ton pínaka pou krúbetai písw apo mia grammikήsunárthsh** f. **Gia ton skopó autó qa creiastoúme thn** Variables[f] **pou epistrέjei tiV metablhtέV thV** f **kai thn** Coefficient[g,**lísta**] **pou dínei touV suntelestέV twn metablhtών**(**ή twn dunámewn metablhtών**) **thV lísta sthn sunárthsh** g. **P.c**

```
Coefficient@2 x + 5 y^2, 8x<D
Coefficient@2 x + 5 y^2, 8x, y<D
Coefficient@2 x + 5 y y, 8x, y^2<D

82<
```

```
82, 0<
```

```
82, 5<
```

Parathreíste óti sto poluώnumo 2 x +5 y^2 **o** Coefficient **tou** y **eínai** 0(**kai óci** 5 y) **enώ tou** y^2**eínai** 5! H functionToMatrix **orízetai wV ex'hV**:

```
functionToMatrix@f_ListD :=
 Table@Coefficient@f@@iDD, Variables@fDD, 8i, Length@fD<D
functionToMatrix@fD

882, 3, -1<, 83, -1, 2<, 81, 2, 3<<
```

Άskhsh: **Dínetai h grammikήsunárthsh** f(e)={x+2y, y-x,2x} **ópou** x, y, z **eínai oi suntegmέneV tou** e **wV proV thn sunήqh básh**. **Breíte ton túpo thV** f **ótan allázoume thn sunήqh básh tou** $Ñ^2$**sthn básh** B **=** 8v_1, v_2< **ópou** v_1={1,1} **kai** v_2 **=** 81, 2< **kai thn básh tou** $Ñ^3$(**tou pedíou timών thV** f) **sthn** B^* **=** 8u_1, u_2, u_3<**ópou** u_1 **=** 81, 1, 1<, u_2 **=** 81, 1, 0<, u_3 **=** 81, 0, 0<.

Upódeixh: Έ**stw ena tucaío diánusma** q **grammέno wV proV thn básh B**. **Oi suntetagmέneV tou wV proV thn sunήqh básh eínai** e^* **=**8x^*, y^*, z^*<=Transpose[B].q Ό**póte me** fHe^*L **brískome tiV suntetagmέneV thV eikónoV(wV proV thn sunήqh básh) kai me** Inverse@Transpose@B^*DD.fHe^*L **brískoume tiV zhtoúmeneV suntetagmέneV wV proV thn básh** B^*.

Ά**lloV trópoV**: έ**stw A o pínakaV thV** f **wV proV tiV sunήqeiV báseiV kai** έ**stw** P = transpose[B]**o pínakaV metábashV apo thn sunήqh básh tou** $Ñ^2$**sthn** B **kai** έ**stw** Q **=** Transpose@B^*Do **pínakaV metábashV apo thn sunήqh básh tou** $Ñ^3$**sthn** B^*. **Tóte eínai gnwstó apo thn qewría óti o pínakaV thV** f **wV proV tiV báseiV B sthn** B^***eínai ísoV me** A^* **=** $Q^{-1}.A.P$. **Apo edώ mporoúme eúkola na broúme ton nέo túpo thV** f **me έna apló pollaplasiasmó** f^*HqL **=** $A^*.q$