

Κεφάλαιο 7ο: Παραγωγή και ολοκλήρωση.

7.1 Παραγωγή και ολοκλήρωση

Ο πρώτος τρόπος να πάρουμε παράγωγο $f[x]$ είναι από τον τύπο $\text{Limit}\left[\frac{f[x+h]-f[x]}{h}, h \rightarrow 0\right]$ παράδειγμα:

```
Remove@fD
f[x_]:=3 x - 2 x^2
Limit[(f[x+h]-f[x])/h, h->0]
3 + 2/x
```

Φυσικά υπάρχει και η συνάρτηση $D[f[x], \{x, n\}]$ που επιστρέφει απευθείας την n -οστή παράγωγο w $\text{proV } x$. Ειδικά εάν $n=1$ (πρώτη παράγωγο) τότε μπορούμε να γράψουμε απλά $D[f[x], x]$ ή πιο απλά $\text{D}[f[x], x]$. Με $f''[x]$ επιστρέφει την 2η παράγωγο w $\text{proV } x$ κ.ο.κ. Αν θέλουμε να βρούμε την n -οστή παράγωγο απευθείας έρεε το όνομα της μεταβλητής που παραγωγίζουμε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την

$\text{Derivative}[n][f]$. Στην Derivative υποφέουμε ότι η f έχει νόημα μεταβλητή (την #1) και w proV αυτή και νόμο παραγωγίζουμε. Το αποτέλεσμα θα περιέχει αυτήν την ανώνυμη μεταβλητή.

```

D@f@xD, 8x, 1<D
D@f@xD, xD
f '@xD
Derivative@1D@fD

3 +  $\frac{d^2}{dx^2}$ 
    
```

```

3 +  $\frac{d^2}{dx^2}$ 
    
```

```

3 +  $\frac{d^2}{dx^2}$ 
    
```

```

3 +  $\frac{d^2}{dx^2}$  &
#1
    
```

Gia thn paragwigh sunartíshwn ne parapánwaponia netabl htéV h diadikasía éinaí parónoia. Gia parádeigma ne $D[f[x,y],\{x,m\},\{y,n\}]$ epistréjetai h nekikí parágwgh $f \in x^m y^n$ ópou próta paragwizounw próv y(n-íostí parágwgh) kai netá w próv x(m-íostí parágwgh thV prókoptous av sunártshw). H $D[f,x,y]$ éinaí sunonograjía thV $D[f[x,y],\{x,1\},\{y,1\}]$ dh. thV $_{x,y}f$. Apo ta parakótw paradégnata éinaí j aneró óti den prépei na prospopóne na paragwghsoune nia sunártshh pou éci If(dh, o orisnóV thV cwρίζetai se periptóséV). Enj arízetai to ídio próbl hna pou écanekai ne thn Limit!

```

Remove@gD
g@x_, y_D := If@y 0, x sin@1 ê yD, 0D
D@g@x, yD, 8x, 2<, 8y, 1<D

If@y 0, 0, 0D
    
```


7.2 Εύρεση τοπικών ακρότατων με χρήση των ηρικών παραγώγων

Έστω ηδη αναζήτηση την συνάρτηση FindMinimum για την εύρεση κάποιων ακροτάτων μιας συνάρτησης f . Όμως εδώ θα προσπαθήσουμε να βρούμε τα τοπικά ακρότατα ή τουλάχιστον τα "πιθανά" τοπικά ακρότατα της f λύνοντας την εξίσωση $f'[x]=0$ αν η f έχει μόνο μία μεταβλητή ή ένα σύστημα εξισώσεων αν έχει παραπάνω (π.χ. $x f' = y f' = 0$ αν η f έχει δύο μεταβλητές). Για την λύση των συστημάτων αυτών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Solve. Αν οι παράγωγοι δεν είναι πολυώνυμα τότε προτιμάμε να πάρουμε αριθμητικές λύσεις με την NSolve ή την FindRoot. Εδώ θα μιλήσουμε ότι η FindRoot έχει την μορφή $\text{FindRoot}[eqn_1, eqn_2, \dots, \{x, x_0\}, \{y, y_0\}, \dots]$ όπου eqn_1, eqn_2, \dots είναι το σύστημα των εξισώσεων και x_0, y_0, \dots είναι κάποιοι αριθμοί "κοντά" σε κάποια πραγματική λύση του συστήματος. Αυτό είναι και το μεγάλο πρόβλημα με την FindRoot: πρέπει να γράψουμε κοντά αλλιώς μπορεί να μην βρει κανμία λύση! Παραδείγματα: Αν προσπαθήσουμε να βρούμε τα τοπικά ακρότατα της $x \sin[1/y]$ με την NSolve και την FindRoot και για $x=0.05$

```
g[x_, y_]:=x Sin[1/y]
g1[x_, y_]:=D@g Sin[1/y], x
g2[x_, y_]:=D@g Sin[1/y], y
g2[x, y]
z = NSolve@g2@0.05, y ~ 0, y
0.05 Sin[1/y] == z
```

$$- \frac{x \cos\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}$$

```
Solve::ifun :
Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.
```

```
8y -0.63662<, 8y 0.63662<<
```

```
8-0.05, 0.05<
```

```
FindRoot@g2@0.05, y ~ 0, 8y, 0.1, -1, 1<D
```

```
General::ivar : 0.1` is not a valid variable.
```

```
General::ivar : 0.1` is not a valid variable.
```

```
FindRoot::frnum :
Function 8 0.1H-0.0272011< is not a length 1 list of numbers at 8y< = 80.1<.
```

```
FindRoot@g2@0.05, y == 0, 8y, 0.1, -1, 1<D
```

Na exhghsoun eoti h NSolve ebgal epd u eokd a ena topiko akrotato sto shneio $y=0.63662$ (kai al l o ena sto $y=0.63662$) . Einai naghsto dioti sto prhgouneno ke j al aio ecame kanei kai thn graj ikh parastash thV $g2[0.05,y]$. DustucwW den ta brhke ol a. Me thn FindRoot nparoono na broone kai al l a! To probl hna einai pw dial egoune to arciko naV $y0$ gia na xekinhsei to yaxino. Oa prepei na kanoune diaj oreV dokinhV sto $y0$ kai gia diaj ora diasthna. Al l o ena nikrotero probl hna: prepei na grayoune ton tipo thV $g2$ apeupiaV (cwriV crhsh tou orisnoo tou) al l iow bgainoun perierga ntnonata opw to FindRoot::frnum : Function $g_{0.1}[0.0272011]$ is not a length 1 list of numbers at $\{y\} = \{0.1\}$.

```
Remove@g2D
```

```
g2@x_, y_D := -  $\frac{x \cos \frac{1}{y}}{y^2}$ 
```

```
ymin = -1
```

```
ymax = 1
```

```
z = FindRoot@g2@0.05, yD == 0, {y, 0.1, -1, 1}<D
```

```
g@0.05, yD ê. z
```

```
-1
```

```
1
```

```
{y 0.0909457<
```

```
-0.05
```

Epanal antanoune xana thn genikh archi: otan orizoune sunartihseV na ntn crhsin opoioune al l ev h dh kataskuas naneV al l a na tiv orizoune "kateupian". Etsi den qa htan kal o gia paradeigna, na orizane $g[x,y]:=x*\sin[1/y]$ kai sthn sunecia $g2[x_,y_]:=D[g[x,y],y]$ al l a qa htan protinotero na orizane kat'eupeian $g2[x,y]:=-\frac{x \cos \frac{1}{y}}{y^2}$. An qil oune perissotereV l us eV ne negal uter h akribia qa prepei na al l axoune thn arcikh timi tou $y0$ na qesoune nikrotera diasthna ymin, ymax kai na bal oune pipl eon orisnata nasa sthn FindRoot p.c

```
z = FindRoot@g2@0.05, yD == 0, {y, 0.01, 0.001, 0.09<,
```

```
AccuracyGoal 24, WorkingPrecision 34,
```

```
MaxIterations 50D
```

```
g@0.05, yD ê. z
```

```
{y 0.01010507575186637052500849291254059<
```

```
-0.05
```

Askhsh: Dinetai h sunárthsh $f[x,y]:=x^2+x*y+y^2-2*x-6*y$. Na bréteta kritiká shnéia thV dhl. ta shnéia pou nnderizontai di nērikév parágwgoi. Sthn sunéceia crhsinopoióntaV thn FindMinimum prospaqísete na apantήsete an ta akrótata pou brήkate éinai topiká nēgista h topiká éúcista. Tél oV crhsinopoiéste thn ContourPlot gia thn f kai gia katállhla diastήnata $\{x_{min},x_{max}\}$ kai $\{y_{min},y_{max}\}$ stouV áxonēV Ox kai Oy antístoica (pou na períecoun to h ta shnéia pou brήkate) étsi óste na dáte an prágnati h graj ikή parástash pou paírnetai sunjwné na ta apoté ésnata pou bgálate (Proscóh prin kal ésetai thn ContourPlot[x^2+x*y+y^2-2*x--6*y,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]] na gráyete <<Graphics`Graphics3D` dōti kápe sunárthsh gia graj ikév parastásēV écé to dikó thV pakéto ektóV apó nērikév pou den creázetai na kal éscune to pakéto touV sióti j ortónetai nól iv anóscune to *Mathematica*). Me to Help prospaqísete na náqete perissótera gia thn ContourPlot óste na kánete to gráj hna saV el kustikó. (p.c dōste cróna bázontaV nása sthn ContourPlot to ColorFunction Hue. Sto ídio pakéto anήké kai h ShadowPlot3D epishV ne pd ú vraía apoté ésnata). H Plot3D (autή den creázetai kanéra idaítero pakéto) sthn períptwsh naV den bohá pd ú, ektóV kai an alláxete lígo ton crwnatísmó thV epj áneiaV pou prókéte ne to epipl éoncarakthristikó `ColorFunction Hue` nása sthn Plot3D.

7.3 Aórista d dkl hrónata

H basiké entd h gia na broúne to aóristo d dkl h rwna wV proV x éinai h $\text{Integrate}[f[x],x]$. p.c

```
Integrate@f '@xD, xD
D@Integrate@f '@xD, xD, xD

f '@xD
```

```
f '@xD
```

Dhl adh to d dkl h rwna thV parágwgu thV f wV proV x éinai h ídia h f! Kai h parágwgoV tou d dkl hrónatoV thV f wV proV x éinai pól i h f. Me ál la l ógia h d dkl h rws h ne thn parágwgi sh éinai antístroj el sunartήsēV AV káscune kai ál la paradégnata:

```
Integrate@Log@xD, xD
Integrate@x^2 Cos@n xD, xD

† x^n Bx

Integrate@Log@x yD, x, yD
Integrate@Cos@Sin@xD, xD

† E-x2 Bx

-x + x Log@xD
```

$$\frac{2 x \operatorname{Cos}[n x]}{n^2} + \frac{(-2 + n^2 x^2) \operatorname{Sin}[n x]}{n^3}$$

$$\frac{x^{1+n}}{1+n}$$

$$-2 x y + x y \operatorname{Log}[x y]$$

$$\int \operatorname{Cos}[\operatorname{Sin}[x]] dx$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Erfi}[x]$$

AVarcísoune na károune parathrís éV.

- 1)Stoaóristod dkl ήrwna paral épetai hstagrá stotél dV.
- 2)Mporóne na d dkl hrós oune akóna kai an h sunérthsh naV écé nia ή parápnw parántrouV (pc thn).
- 3) Ta aórista d dkl hrónata upd ogízontai ne thn sivphrή upóqesh óti oi crhsinopcióneév paránetroi émai tétciév óste óso h dkl hrwtéa sunérthsh óso kai to apotél es na na écoune émcia. Etsi, gia parádéigma, to d dkl ήrwna $\int x^n dx$ pou epistréj é to Mathematica gia thn d dkl ήrwsh $\int x^n dx$ xéroune óti émai al hqéV, upó thn proupóqesh óti to n émai diá cretikó tou -1, aj óó, wW gnwstó, $\int x^{-1} dx = \ln|x|$.
- 4)To súntd o thV dkl ήrwshV $\int f(x) dx$, Ñmporóne na to broúne apo tiv pal étév 3BasicInput. ÉnaV ál l dV trópoV cwriV pal étév émai na patής oune diáj orouV sundas nóoV pl ήktrwn pc gia na gráyoune to orisnro $\int_0^7 f(x) dx$ qa prépei na patής oune **A** int **A**, **I** 0, **I** 7, **I** f[x] **A** dd **A** x (ta [kai] den ta ktupóne! to, **I** gia parádéigma shmaíni óti patáne nazi to, kai to + enó to, **I** émai to , nazi ne to SPACE pl ήktrw).
- 5)Mporóne na écoune kai dipl á (al l á kai pol l apl á d dkl hrónata) ópww gia parádéigma to Integrate[Log[x y],x,y] pou is coune ne $\int dx \int dy \operatorname{Log}[x, y]$. próta d dkl hrónoune wW proV y kai to apotél es na net á wW proV x.
- 6) Upárcei éna negál o pl hqoV d dkl hrwnótwn, ta opóia upd ogízetai ne thn crήsh édikón

sunartísewn ópww oi Erf, EulerGamma, Fresnel, Hypergeometric, Elliptic kai állel. Mporétai na brétepl hrgj oríeVstohelp.

7) Upárcoun d okl hrónata ta opoía den nporeí na upologisé to Mathematica. Se nia tétoia períptwsh epistréj etai to ídio to d okl h́rwna p.c sto $\int_0^{\pi/3} \cos(\sin(x)) dx$. Fusiká án αντί aóristo écoune orisnáo d okl h́rwna tóte nporoúne na pároune nia arithmítkí timí tou nethn crísh thV N h́ thV NIntegrate ópww qa dóne parakótw p.c

```

olok1 = NIntegrate[Cos@Sin@x]DD, {x, 0, Pi} & 3<D
0.89975
    
```

7.4 Orisnáo d okl hrónata

H basiké entd h́ gia ta orisnáo d okl hrónata érai ópww kai sta aórista nethn éisagwgh́ twv oríwv p.c to orisnáo d okl h́rwna $\int_0^{\pi/3} \sin(x)^2 \cos(x)^3 dx$, x apl á qa to gráyoune

```

Integrate[Sin@x]^2 Cos@x]^3, {x, 0, Pi} & 3<D
11 3
-----
160
    
```

Mporóne j usiká na crhsinopóiseúne thn BasicInput pal éta h́ patóntaV pl h́ktra. Mporóne j usiká na bál oune kai to úpairo se éra h́ kai sta dío ákra

```

Integrate[Sin@x]^2 Cos@x]^3, {x, 0, <D
Integrate::idiv : Integral of Cos@x]^3 Sin@x]^2 does not converge on 80, <.
† Cos@x]^3 Sin@x]^2 Bx
0
    
```

Se autí h́n thn períptwsh to d okl h́rwna den upárcé! Se ál h́ h períptwsh ómw upárcé p.c

```

Integrate[A E^-x^2, {x, 0, <E
è !!!
ttttttt
2
    
```

EpíshV se ál h́ l eV períptwsh éV to Mathematica nporeí na naVapantíseí ne to If p.c

```

Integrate@x^n, {x, 0, 1<D
If[Re@nD > -1, 1/(1+n), † x^n BxE
1
1+n
    
```

Autó shnaíní óti éin to pragmatikó nároV thV paranátrou n (díóti nporeí kápoioV na dóseí kai nigadikí timí sto n) érai > tou -1 tóte to d okl h́rwna éra íso ne $\frac{1}{1+n}$ all íóV den nporeí na dóseí apánthsh! P.c aV bál oune n=2


```
% ê . n 2


$$\frac{1}{3}$$

```

Γενικά αν επιθυμούμε να φέρσουμε κάποιους περιορισμούς στον υπολογισμό του ορισμένου διόκληρονάτου θα πρέπει να τους εισάγουμε με την εντολή `Assumptions->` οι περιορισμοί π.χ αν θέλουμε να δηλώσουμε ότι για παράμετρον m παίρνει πραγματικές τιμές (και όχι μιγαδικές) θα μπορούσαμε να το δηλώσουμε λέγοντας ότι το $\text{Im}[m]=0$ π.χ

```
Integrate[Sin[x] D[x, 8x, 0, Infinity], Assumptions -> Im[m] == 0]


$$\frac{1}{2} \text{Sign}[m]$$

```

Αν δεν θέλουμε τον περιορισμό αυτό θα παίρνουμε

```
Integrate[Sin[x] D[x, 8x, 0, Infinity]

If[Im[m] == 0,  $\frac{1}{2} \text{Sign}[m]$ ,  $\int_0^{\infty} \frac{\sin[x]}{x} \beta x E$ 
```

Η εντολή `NIntegrate[f[x], {x,a,b}]` επιστρέφει μία αριθμητική προσέγγιση του ορισμένου διόκληρονάτου $\int_a^b f(x) dx$, ενώ υπάρχουν και χρήσιμα επιπλέον χαρακτηριστικά που μπορούμε να προσφέρουμε όπως για παράδειγμα `AccuracyGoal->20` για να βελτιώσουμε την ακρίβεια των υπολογισμών π.χ

```
NIntegrate[Sin[x]^2 Cos[x]^3, {x, 0, Pi}, AccuracyGoal -> 20, WorkingPrecision -> 30]

0.11907849302036031393
```

Η συνάρτηση `NIntegrate` είναι χρήσιμη όταν η `Integrate` δεν μπορεί να βγάλει ένα αποτέλεσμα. Η `Integrate` κάνει συμβολικούς υπολογισμούς ενώ η `NIntegrate` χρησιμοποιεί προσεγγιστικές αριθμητικές μεθόδους π.χ

```
H Integrate[Abs[x - Log[x] + 1.5], {x, 1, 3}]
NIntegrate[Abs[x - Log[x] + 1.5], {x, 1, 3}]

5.70416
```

Βάλανε σε σκόλια το πρώτο διότι ήρwana διότι σε ναV to *Mathematica* δεν ηπόεσε να βγάλεί κάποιο αποτέλεσμα παρόλου που περηνάνανε αρκετή ώρα! Όμως πολύ γρήγορα η NIntegrate υπολόγισε το διότι ήρwana!



7.5 Πολι απλά διότι ήρwnata

Μεθνη το ή Integrate ηποροόνη να υπολόγισουνη και διπλά αλλιά και τριπλά κοκ διότι ήρwnata αρκεί να διανηρώς ουνη κατάλληλα τα όρια D του διότι ήρwnatoV. AV δόνη η η κέV περιπτώσειV

1) Η περιοχή D αποτελείται από κάποια διαστήματα π.χ. $D = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\}$. Τότε υπολόγισουνη τα διότι ήρwnata ήτontaV τα κατάλληλα όρια $\{x, a, b\}, \{y, c, d\}$ π.χ.

```
Integrate[x^2 z^3, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, {z, 0, 2}]
```

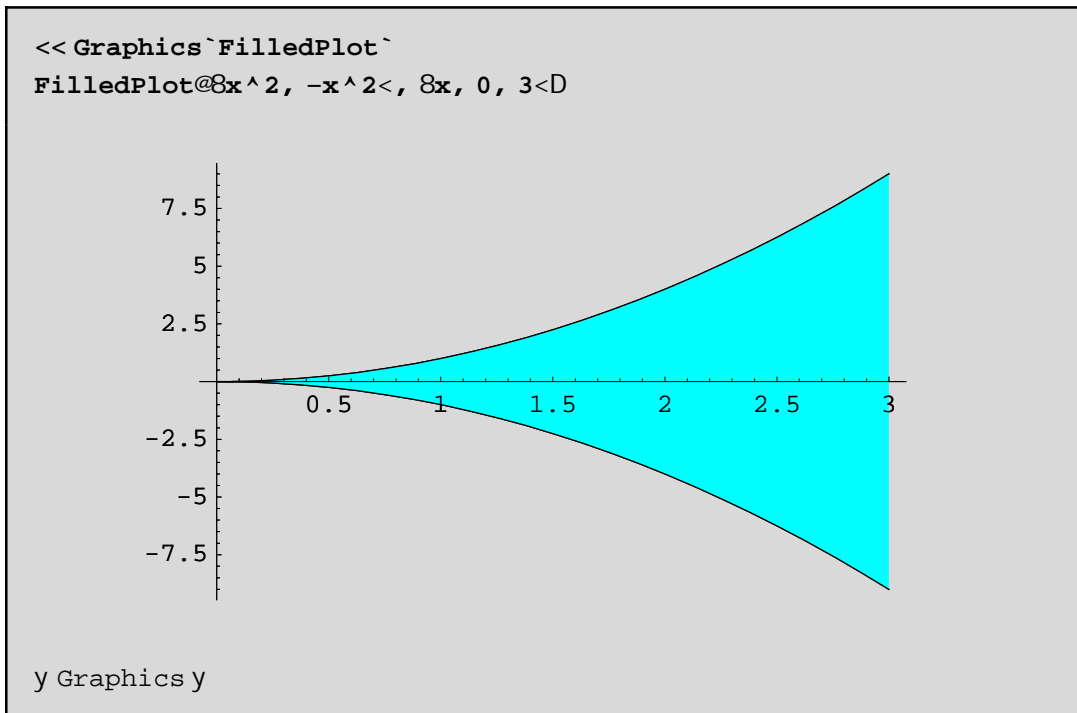
$$\frac{2}{3}$$

Se αυτήνη την περίπτωση δεν πάζει ρόλο η σειρά διότι ήρwnshV.

```
Integrate[x^2 z^3, {z, 0, 2}, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]
```

$$\frac{2}{3}$$

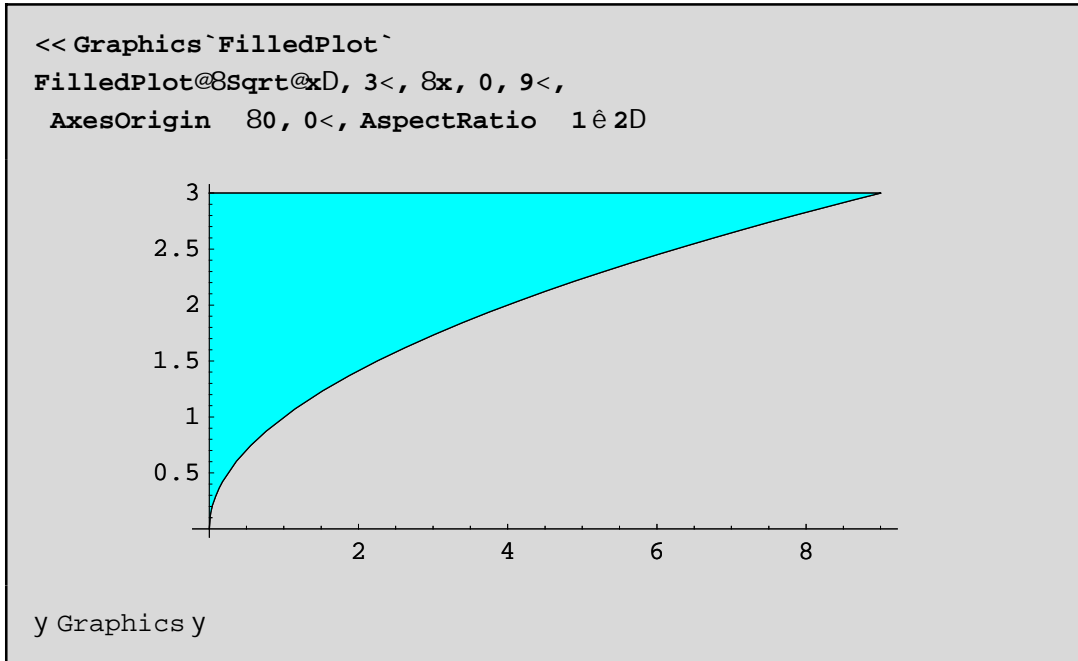
2) Η περιοχή D είναι μια περιοχή του διδιάστατου χώρου που περιλαμβάνεται από κάποιες καμπύλες ή μια περιοχή του τριδιάστατου χώρου που περιλαμβάνεται από κάποιες επιφάνειες κοκ τότε ή πρέπει να προσέχουνη την σειρά που διότι ήρwnουνη (δηλ. ηV προV ποιά ηηταβλητή ή διότι ήρwnουνη πρώτα, ηητά ποια ακολούθη κοκ). Ακολούθως ηηικά παραδείγματα D και συναρτήσεων f και η σειρά που διότι ήρwnουνη. Για να γίνουνη και πιο παραστατικά ή κάνουνη πρώτα την γραφική παράσταση των κυρίων D. Στην διδιάστατη περίπτωση των D ή χρειάζεται να κάουνη το πακέτο Graphics`Filled-Plot`



εδώ $D = \{x, y \mid 0 \leq x \leq 3, -x^2 \leq y \leq 8x^2\}$ και διότι η ροή είναι $f(x, y) = 2x - 3y^2$ πρώτα $\int_{-x^2}^{8x^2} (2x - 3y^2) dy$ και μετά \int_0^3 .

```
Integrate@2 x - 3 y^2, 8x, 0, 3<, 8y, -x^2, x^2<D
- 3807/7
```

Πρέπει να προσέχουμε ότι το διότι η ροή που πρέπει να υπολογιστεί πρώτα, σημαίνει πάντοτε το τέλος του Integrate! Αλλιώς παράδειγμα:



εδώ $D = \{t, y \mid 0 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq y^2\}$ και διόκλ ηρώουε πρώτα w/prov_x και μετά w/prov_y δι.

```
Integrate@2 x - 3 y^2, 8y, 0, 3<, 8x, 0, y^2<D
- 486
 5
```

Γενικά να έcoune στο νόό ότι διόκλ ηρώουε tel eutaía se diásthma pou écei staqra ákra δι. énaí thVnorj ήV του kl éstoú diastήnatoV [a,b]. p.c an écoune thn $f[x,y,z]:=x y^2 z^3$ και qél oune na broúne to tripló diόκλ ήrwna sto cwrio $D = \{t, y, z \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq x*y\}$ pou perikl éetai apo ta épípeda $x+y=1$ και $z=0$, και thn epij ánia (upper bd ikó parabol oúdeV) $z=x*y$. L ógw thVnorj ήV του D diόκλ ηρώουε πρώτα w/prov_z μετά w/prov_y και tél oVw/prov_x.

```
Integrate@x y^2 z^3, 8x, 0, 1<, 8y, 0, 1-x<, 8z, 0, x y<D
1
288288
```

Βέβαia το ίδιο diόκλ ήrwna qa nproúsane na to káoune diadociká setría bímata al l á j usiká énaí kourastikó...

```
int1 = Integrate@x y^2 z^3, 8z, 0, x y<D
int2 = Integrate@int1, 8y, 0, 1 - x<D
int3 = Integrate@int2, 8x, 0, 1<D
```

$$\frac{x^5 y^6}{4}$$

$$\frac{1}{28} (1 - x)^7 x^5$$

$$\frac{1}{288288}$$

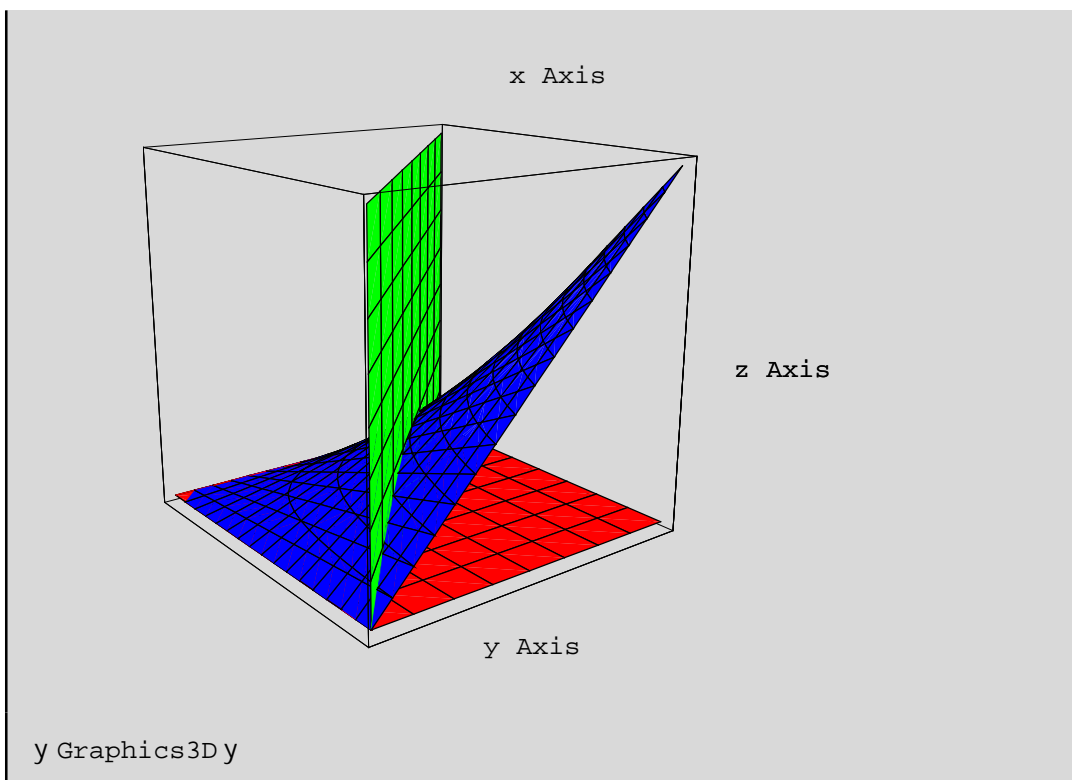
Parakátw q̄ prospaq̄isoun̄ na sced̄ásoun̄ to D. Gia bōiq̄ia pánw sth graj ik̄í sunárthsh ContourPlot3D pou crhsinopoióun̄ n̄poréte na anatréxete sto Help kai ep̄ishV na "paixete" ne tiV graj ik̄éV parastáséV aj airóntaV ḡ all áson̄taV kápoia carakthristiká óste na katal ábete ti akribóV kánoun. Oa póun̄ non̄ica óti h plot1 paristánei to ep̄ipedo z=0 ne kókkino cróna (Scólio: all áxane to z=0 se káti sced̄ón ónoio z-0.00001==0 dióti den n̄porésane na crwnatisoun̄ to ep̄ipedo z=0 ne thn ContourPlot3D!!) h plot2 paristánei to ep̄ipedo x+y=1 se prásino kai h plot3 to parabol oídéV z=x y ne npl é cróna. To D éinai to kl̄istó cwr̄io pou perikl̄ éetai metaxó tw̄n trión ep̄j an̄iwn̄

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
plot1 = ContourPlot3D@z - 0.00001, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, {z, 0, 1},
  ContourStyle RGBColor@1, 0, 0D, DisplayFunction IdentityD
plot2 = ContourPlot3D@x + y - 1, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, {z, 0, 1},
  ContourStyle RGBColor@0, 1, 0D, DisplayFunction IdentityD
plot3 = ContourPlot3D@z - Hx yL, {x, 0, 1},
  {y, 0, 1}, {z, 0, 1}, PlotPoints 85, 5<,
  ContourStyle RGBColor@0, 0, 1D, DisplayFunction IdentityD
Show@plot1, plot2, plot3, Axes True, Ticks {None, None, None}<,
  AxesLabel {"x Axis", "y Axis", "z Axis"}<,
  Lighting False, DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  ViewPoint -> {82.434, -1.853, 0.866}<D
```

y Graphics3D y

y Graphics3D y

y Graphics3D y



Antí tou paráronw plot1 npr éte kai na báí ete éna kókkino pd úgwno w/exíV

```
plot1 = Graphics3D@
  RGBColor@1, 0, 0D, Polygon@880, 0, 0<, 81, 0, 0<, 81, 1, 0<, 80, 1, 0<<D<,
  DisplayFunction IdentityD
```

δοκίμια τετραπάρων διατάξεων!

Άσκηση: Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα της $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ στην περιοχή $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 4, |x-1| \leq 4\}$ και να γίνει γραφική παράστασή του D .