



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
‘ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ Ι’**

**Επιμέλεια: Ι. Δαρζέντας, Καθηγητής
Χρ. Τσαγγάρης, Υποψήφιος Διδάκτορας**

Καρλόβασι 1999

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1ο: Εισαγωγή	σελ. 1
Κεφάλαιο 2ο: Συστημική Προσέγγιση Προβλημάτων	σελ. 5
2.1 Εισαγωγή	σελ. 5
2.2 Σύστημα	σελ. 6
2.3 Μοντέλο	σελ. 9
2.4 Διατύπωση (Μοντελοποίηση) Προβλημάτων Επιχειρησιακής Έρευνας σε Μαθηματική 'Γλώσσα' (Αναλυτικό Μοντέλο)	σελ. 10
2.5 Ασκήσεις	σελ. 17
Κεφάλαιο 3ο: Γραμμικός Προγραμματισμός	σελ. 21
3.1 Εισαγωγή	σελ. 21
3.2 Το Γενικό Πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού	σελ. 22
3.3 Υποθέσεις Γραμμικού Προγραμματισμού	σελ. 24
3.4 Γραφική Επίλυση Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού	σελ. 26
3.5 Παραδείγματα Επίλυσης Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού Γραφικά	σελ. 30
3.6 Η μέθοδος Simplex	σελ. 34
3.7 Παραδείγματα Μεθόδου Simplex	σελ. 43
3.8 Ειδικές Περιπτώσεις	σελ. 49
3.9 Μέθοδος των Δύο Φάσεων	σελ. 55
3.10 Δυϊκότητα	σελ. 60
3.11 Ανάλυση Ευαισθησίας	σελ. 66
3.12 Το Πρόβλημα της Μεταφοράς	σελ. 71
3.13 Το Πρόβλημα της Μεταφόρτωσης	σελ. 75
3.14 Το Πρόβλημα της Εκχώρησης	σελ. 79
3.15 Ασκήσεις	σελ. 81
Κεφάλαιο 4ο: Δικτυωτή Ανάλυση	σελ. 95
4.1 Εισαγωγή	σελ. 95
4.2 Το πρόβλημα του ελάχιστου κόστους ροής σ' ένα δίκτυο	σελ. 96
4.3 Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής	σελ. 100
4.4 Το πρόβλημα του ελάχιστου "ζευγνύοντος" δένδρου	σελ. 105
4.5 Το πρόβλημα της μέγιστης ροής	σελ. 110
4.6 Critical Path Analysis (Μέθοδος του κρίσιμου μονοπατιού)	σελ. 113
4.7 Ασκήσεις	σελ. 119
Κεφάλαιο 5ο: Ακέραιος προγραμματισμός	σελ. 125
5.1 Εισαγωγή	σελ. 125
5.2 Μοντελοποίηση χαρακτηριστικών προβλημάτων ακεραίου προγραμματισμού	σελ. 127
5.2.1 Επιλογή μεταξύ δύο περιορισμών	σελ. 127
5.2.2 Επιλογή K περιορισμών από M	σελ. 127
5.2.3 Μη κυρτή εφικτή περιοχή	σελ. 128
5.2.4 Fixed - Charge problem	σελ. 128
5.2.5 Το πρόβλημα του ταξιδιώτη	σελ. 129
5.2.6 Set covering problem (Το πρόβλημα της εύρεσης του καλύμματος ενός συνόλου)	σελ. 130

5.2.7 Set packing problem (Το πρόβλημα της εύρεσης του περιβλήματος ενός συνόλου)	σελ. 131
5.2.8 Set partitioning problem (Το πρόβλημα του διαμερισμού ενός συνόλου)	σελ. 131
Κεφάλαιο 6ο: Δυναμικός προγραμματισμός	σελ. 133
6.1 Εισαγωγή	σελ. 133
6.2 Πρότυπο παράδειγμα προβλήματος δυναμικού προγραμματισμού	σελ. 134
6.3 Χαρακτηριστικά προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού	σελ. 137
6.4 Παραδείγματα προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού	σελ. 139
6.5 Ασκήσεις	σελ. 143

Κεφάλαιο 1ο: Εισαγωγή

1.1 Ιστορική Εμφάνιση της Επιχειρησιακής Έρευνας

Από την εμφάνιση της βιομηχανικής επανάστασης μέχρι σήμερα έχει συντελεστεί μια αξιοσημείωτη ανάπτυξη στο μέγεθος και στην πολυπλοκότητα των οργανισμών. Τα μικρά μαγαζιά της παλαιάς εποχής βαθμιαία εξελίχθηκαν σε εταιρείες συγκέντρωσης πολύ μεγάλων κεφαλαίων. Στα πλαίσια αυτής της επαναστατικής αλλαγής αυξήθηκε εντυπωσιακά η κατανομή της εργασίας και ο καταμερισμός των ευθυνών της διοίκησης σ' αυτούς τους οργανισμούς. Όμως παρόλα αυτά, η αυξανόμενη εξειδίκευση έχει δημιουργήσει καινούργια προβλήματα, που εξακολουθούν να υπάρχουν σε πολλούς οργανισμούς. Ένα πρόβλημα είναι η τάση πολλά συστατικά μέρη να αναπτύσσονται σε σχετικά αυτόνομες αυτοκρατορίες με δικούς τους στόχους και συστήματα αξιών, ξεχνώντας έτσι τον τρόπο με τον οποίο οι δραστηριότητες και οι στόχοι τους συνδέονται με το κύριο οργανισμό. Αυτό που είναι άριστο για κάποιο συστατικό μέρος συχνά είναι επιζήμιο για κάποιο άλλο, με αποτέλεσμα να εργάζονται με αντίθετες επιδιώξεις. Ένα άλλο πρόβλημα είναι ότι, καθώς αυξάνεται η πολυπλοκότητα και η εξειδίκευση σ' έναν οργανισμό, η κατανομή των διαθέσιμων πόρων στις διάφορες δραστηριότητες γίνεται όλο και πιο δύσκολη. Αυτού του είδους τα προβλήματα καθώς και η ανάγκη να βρεθεί ένας καλύτερος τρόπος να λυθούν, προσφέρουν το πλαίσιο για την εμφάνιση της επιχειρησιακής έρευνας.

Η ανάγκη για επιχειρησιακή έρευνα παρουσιάστηκε πριν μερικές δεκαετίες, όταν έγιναν οι πρώτες προσπάθειες για μια επιστημονική προσέγγιση στη διοίκηση των οργανισμών. Όμως, ιστορικά, η εμφάνιση της επιχειρησιακής έρευνας, έχει αποδοθεί στις στρατιωτικές υπηρεσίες στις αρχές του Β' Παγκοσμίου Πολέμου. Λόγω του πολέμου παρουσιάστηκε επείγουσα ανάγκη για κατανομή περιορισμένων πόρων στις διάφορες στρατιωτικές επιχειρήσεις και στις δραστηριότητες μέσα σε κάθε επιχείρηση κατά έναν αποτελεσματικό τρόπο. Έτσι η βρετανική και στην συνέχεια η αμερικάνικη στρατιωτική διοίκηση επιστράτευαν πολλούς επιστήμονες για να εφαρμόσουν μια επιστημονική προσέγγιση, ώστε ν' αντιμετωπιστεί το παραπάνω πρόβλημα καθώς και άλλα στρατηγικά και τακτικά προβλήματα. Με άλλα λόγια τους ζητήθηκε να κάνουν έρευνα σε στρατιωτικές επιχειρήσεις. Αυτές οι ομάδες επιστημόνων αποτέλεσαν τις πρώτες ομάδες επιχειρησιακής έρευνας. Οι προσπάθειες τους πιστεύεται πως συνέβαλαν στη νίκη της μάχης της Βρετανίας, της μάχης του Βορείου Ατλαντικού, των Νήσων του Ειρηνικού, κ.ά.

Η βιομηχανία παρακινούμενη από την έκδηλη επιτυχία της επιχειρησιακής έρευνας στο στρατό, άρχισε βαθμιαία να ενδιαφέρεται για τον καινούργιο αυτό τομέα. Καθώς η ξαφνική και η γρήγορη βιομηχανική άνοδος που ακολούθησε τον πόλεμο ακολουθούσε την πορεία της, εμφανίστηκαν πάλι στο προσκήνιο τα προβλήματα που προξενεί η αυξανόμενη πολυπλοκότητα και εξειδίκευση στους οργανισμούς. Έτσι είναι φανερό σε πολλούς, μεταξύ των οποίων και σε συμβούλους επιχειρήσεων, που είχαν εργαστεί σε ομάδες επιχειρησιακής έρευνας κατά τη διάρκεια του πολέμου, ότι τα παραπάνω προβλήματα ήταν ουσιαστικά τα ίδια, αλλά με διαφορετικό γενικό πλαίσιο, με εκείνα που είχαν αντιμετωπίσει στο στρατό. Με τον τρόπο αυτό, η επιχειρησιακή έρευνα άρχισε να εμφανίζεται στη βιομηχανία, στις επιχειρήσεις και στην δημόσια διοίκηση. Μέχρι το 1951 είχε ήδη επικρατήσει στη Μεγάλη Βρετανία και βρισκόταν σε τέτοια εξέλιξη στις Ηνωμένες Πολιτείες, που τελικά επικράτησε

και εκεί. Από τότε η επιχειρησιακή έρευνα έχει αναπτυχθεί πολύ γρήγορα όπως θα δούμε και παρακάτω.

Μπορούμε να προσδιορίσουμε δύο τουλάχιστον άλλους παράγοντες, που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη γρήγορη ανάπτυξη της επιχειρησιακής έρευνας κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Ο πρώτος ήταν η αξιόλογη πρόοδος που έγινε αρχικά στην βελτίωση των τεχνικών της επιχειρησιακής έρευνας. Μετά τον πόλεμο πολλοί από τους επιστήμονες που συμμετείχαν στις ομάδες επιχειρησιακής έρευνας ή που είχαν ακούσει γι' αυτή παρακινήθηκαν να επιδιώξουν έρευνες σχετικές με τον νέο αυτό τομέα, αποτέλεσμα ήταν σημαντικές πρόοδοι στη μεθοδολογία της επιχειρησιακής έρευνας. Ένα πρώτο παράδειγμα ήταν η μέθοδος simplex για τη λύση των προβλημάτων του γραμμικού προγραμματισμού, που αναπτύχθηκε από τον Dantzig το 1947. Πολλά από τα καθιερωμένα εργαλεία της επιχειρησιακής έρευνας, όπως ο γραμμικός προγραμματισμός, ο δυναμικός προγραμματισμός, η θεωρία ουρών αναμονής και η θεωρία των αποθεμάτων, αναπτύχθηκαν σχετικά καλά πριν το τέλος της δεκαετίας του 1950. Πέρα από τη γρήγορη αυτή ανάπτυξη της θεωρίας της επιχειρησιακής έρευνας, ένας δεύτερος παράγοντας που έδωσε μεγάλη ώθηση στην ανάπτυξη της επιχειρησιακής έρευνας ήταν η εισβολή της επανάστασης των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Συνήθως, χρειάζονται πολλοί υπολογισμοί για να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά τα πολύπλοκα προβλήματα που εξετάζονται από την επιχειρησιακή έρευνα. Οι υπολογισμοί αυτοί τις περισσότερες φορές είναι αδύνατο να γίνουν με το χέρι. Η ανάπτυξη επομένως των ψηφιακών ηλεκτρονικών υπολογιστών με την ικανότητά τους να κάνουν αριθμητικές πράξεις χιλιάδες ή και εκατομμύρια φορές γρηγορότερα απ' ό,τι ο άνθρωπος ήταν ένα σημαντικό όφελος για την επιχειρησιακή έρευνα.

1.2 Η Φύση της Επιχειρησιακής Έρευνας

Τι είναι επιχειρησιακή έρευνα; Είναι χαρακτηριστικό ότι δεν υπάρχει ομόφωνος ορισμός. Ένας ορισμός που μπορεί να δοθεί ως απάντηση στην παραπάνω ερώτηση είναι ο εξής: 'η επιχειρησιακή έρευνα είναι μια επιστημονική προσέγγιση στη λήψη των αποφάσεων που περιέχει τις λειτουργίες των οργανωτικών συστημάτων' [1]. Ένας άλλος ορισμός είναι: 'επιχειρησιακή έρευνα είναι η εφαρμογή σύγχρονων μεθόδων λήψης αποφάσεων επιστημονικά θεμελιωμένων, οι οποίες σκοπό έχουν την πιο αποτελεσματική χρησιμοποίηση των υπάρχοντων οικονομικών πόρων σε τεχνολογία, κεφαλαιακό εξοπλισμό, και ανθρώπινο δυναμικό με βάση αντικειμενικά προκαθορισμένους στόχους' [2]. Οι ορισμοί αυτοί, όπως και παλαιότερες προσπάθειες, είναι τόσο γενικοί, ώστε μπορούν εξίσου καλά να ισχύει και για πολλούς άλλους επιστημονικούς τομείς. Για το λόγο αυτό ο καλύτερος ίσως τρόπος για ν' αντιληφθούμε τη φύση της επιχειρησιακής έρευνας είναι να εξετάσουμε τα εξέχοντα χαρακτηριστικά της.

Όπως φανερώνει το όνομά της, η επιχειρησιακή έρευνα σημαίνει 'έρευνα στις επιχειρήσεις'. Αυτό μας λέει κάτι, τόσο για την προσέγγιση όσο και για το πεδίο εφαρμογής της. Έτσι, η επιχειρησιακή έρευνα χρησιμοποιείται σε προβλήματα που έχουν σχέση με τον τρόπο διοίκησης και συντονισμού των λειτουργιών ή δραστηριοτήτων μέσα σ' ένα οργανισμό. Η φύση του οργανισμού ουσιαστικά δεν έχει σημασία και στην πραγματικότητα η επιχειρησιακή έρευνα έχει πλατιά εφαρμοστεί σε επιχειρήσεις, βιομηχανίες, στο στρατό, στη δημόσια διοίκηση και υπηρεσίες, στα νοσοκομεία, κ.ά. Η έκταση της εφαρμογής της είναι ασυνήθιστα μεγάλη, ενώ η διαδικασία εφαρμογής της ξεκινά με την αναγνώριση και διατύπωση του προβλήματος και συνεχίζεται με την κατασκευή ενός (μαθηματικού)

μοντέλου, που προσπαθεί να συνοψίσει την ουσία του πραγματικού προβλήματος. Κατόπιν γίνεται η υπόθεση ότι το μοντέλο αυτό αποτελεί μια ικανοποιητικά ακριβή απεικόνιση των βασικών χαρακτηριστικών της υπό μελέτη κατάστασης, έτσι ώστε τα συμπεράσματα (λύσεις) που προκύπτουν από το μοντέλο να ισχύουν και για το πραγματικό πρόβλημα. Στη συνέχεια, η υπόθεση αυτή τροποποιείται και επαληθεύεται με τον κατάλληλο πειραματισμό. Επομένως, κατά μια έννοια, η επιχειρησιακή έρευνα ασκεί δημιουργική επιστημονική έρευνα στις θεμελιώδεις ιδιότητες των επιχειρήσεων. Όμως, υπάρχει και κάτι περισσότερο από αυτό. Ειδικότερα, η επιχειρησιακή έρευνα ασχολείται με την πρακτική διοίκηση των οργανισμών. Έτσι, για να επιτύχει, πρέπει να δώσει θετικά και κατανοητά συμπεράσματα στο λήπτη των αποφάσεων, όταν αυτός τα χρειάζεται. Συνοπτικά, οι παρακάτω φάσεις δίνουν μια γενική εικόνα της επιστημονικής διαδικαστικής προσέγγισης της επιχειρησιακής έρευνας. Συνήθως απαιτούνται ανακυκλώσεις αυτών των φάσεων σε πραγματικές εφαρμογές.

Βασικές Φάσεις Εφαρμογής της Επιχειρησιακής Έρευνας:

1. Αναγνώριση του/των προβλημάτων.
2. Καθορισμός των αντικειμενικών στόχων.
3. Διατύπωση (έκφραση) του/των προβλημάτων.
4. Ανάπτυξη μοντέλων.
5. Ανάπτυξη των μεθοδολογιών λύσεων.
6. Συγκέντρωση δεδομένων και πληροφοριών.
7. Επικύρωση (έλεγχος) των μοντέλων και διαδικασιών.
8. Εξέταση δυνατότητας εφαρμογής/εκτέλεσης λύσεων.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό της επιχειρησιακής έρευνας είναι η ευρεία της άποψη. Όπως αναφέρθηκε πιο πριν, η επιχειρησιακή έρευνα υιοθετεί μιαν οργανωτική άποψη. Προσπαθεί να ικανοποιήσει τα αντίθετα συμφέροντα των συστατικών μερών ενός οργανισμού κατά τον καλύτερο τρόπο για τον οργανισμό ως σύνολο. Αυτό δεν σημαίνει πως κάθε μελέτη προβλήματος πρέπει να εξετάζει όλες τις απόψεις του οργανισμού, αλλά οι στόχοι που επιδιώκονται πρέπει να συμφωνούν με εκείνους του κυρίου οργανισμού. Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό που αναφέρθηκε είναι ότι η επιχειρησιακή έρευνα προσπαθεί να βρει την καλύτερη ή άριστη ή βέλτιστη λύση στο πρόβλημα που εξετάζεται. Η επιδίωξη αυτή σκοπεύει μάλλον να προσδιορίσει την καλύτερη πορεία δράσης, παρά να βελτιώσει απλώς το status quo. Αυτή η 'έρευνα για βελτιστοποίηση' παρόλο που πρέπει να ερμηνεύεται προσεχτικά είναι ένα πολύ σημαντικό θέμα της επιχειρησιακής έρευνας.

Όλα τα προηγούμενα χαρακτηριστικά οδηγούν φυσιολογικά σ' ένα άλλο. Είναι φανερό πως δεν πρέπει να περιμένουμε από ένα άτομο να είναι ειδικός σε όλα τα θέματα της επιχειρησιακής έρευνας ή στα προβλήματα που εξετάζονται. Κάτι τέτοιο θα απαιτούσε άτομα που διαθέτουν ποικίλη κατάρτιση και πολλές ειδικότητες. Για μια ειδική μελέτη λοιπόν επιχειρησιακής έρευνας πάνω σε ένα καινούργιο πρόβλημα, είναι συνήθως απαραίτητη χρησιμοποίηση μιας ομάδας. Μια τέτοια ομάδα πρέπει να περιέχει άτομα πολύ καταρτισμένα σχετικά με τα μαθηματικά, στατιστική και θεωρία πιθανοτήτων, οικονομικά διοίκηση επιχειρήσεων, ηλεκτρονικούς υπολογιστές, μηχανολογία και φυσικές επιστήμες, επιστήμες συμπεριφοράς και φυσικά στις ειδικές τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας.

Συνοπτικά η επιχειρησιακή έρευνα ασχολείται με την βέλτιστη λήψη αποφάσεων σε ντετερμινιστικά και πιθανολογικά συστήματα, που προκύπτουν από πραγματικά προβλήματα. Τα προβλήματα αυτά, που απασχολούν την κυβέρνηση, το εμπόριο και τη βιομηχανία, τη μηχανολογία, τα οικονομικά και τις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες, χαρακτηρίζονται από

την ανάγκη της κατανομής των περιορισμένων πόρων. Η συνεισφορά της επιχειρησιακής έρευνας αναφέρεται κυρίως στα ακόλουθα:

1. Στη διάρθρωση της κατάστασης του πραγματικού προβλήματος σ' ένα μαθηματικό μοντέλο, που συνοψίζει τα ουσιώδη στοιχεία του προβλήματος κατά τρόπο, ώστε να αναζητηθεί μια λύση σχετική με τις επιδιώξεις του λήπτη των αποφάσεων. Αυτό συμπεριλαμβάνει την εξέταση του προβλήματος μέσα στο γενικό πλαίσιο ολόκληρου του συστήματος.
2. Στη διερεύνηση της δομής τέτοιων λύσεων και την ανάπτυξη συστηματικών διαδικασιών για να βρεθούν οι λύσεις αυτές.
3. Στην ανάπτυξη μιας λύσης, που να συμπεριλαμβάνει και τη μαθηματική θεωρία, εφόσον είναι αναγκαίο, η οποία να δίνει μια βέλτιστη τιμή στο μέτρο αποτελεσματικότητας του συστήματος (ή πιθανόν να συγκρίνει εναλλακτικές πορείες δράσης).

1.3 Η Επίδραση της Επιχειρησιακής Έρευνας

Η επιχειρησιακή έρευνα έχει κατά τα τελευταία χρόνια μεγάλη επίδραση στη διοίκηση των οργανισμών που συνεχώς αυξάνεται. Τόσο ο αριθμός όσο και η ποικιλία των εφαρμογών της εξακολουθούν να αναπτύσσονται με γρήγορο ρυθμό. Πράγματι, με εξαίρεση την εμφάνιση του ηλεκτρονικού υπολογιστή, αυτή η επίδραση φαίνεται να μην επηρεάζεται από οποιαδήποτε άλλη ανάπτυξη.

Η επιχειρησιακή έρευνα χρησιμοποιείται στους περισσότερους οργανισμούς μεταξύ των οποίων και σε εμπορικές και βιομηχανικές επιχειρήσεις. Τόσο οι μεγάλες εταιρείες όσο και πολλοί από τους μικρούς βιομηχανικούς οργανισμούς διαθέτουν στο μόνιμο προσωπικό τους ομάδες επιχειρησιακής έρευνας. Πολλές βιομηχανίες, όπως βιομηχανίες κατασκευής αεροσκαφών, αυτοκινήτων, μέσων επικοινωνίας, ηλεκτρονικών υπολογιστών, τροφίμων, μεταλλουργίας, μεταλλευμάτων, χαρτιού, πετρελαίου και μέσων μεταφοράς, χρησιμοποίησαν και χρησιμοποιούν πλατιά την επιχειρησιακή έρευνα. Επίσης κυβερνητικές υπηρεσίες, χρηματοπιστωτικοί οργανισμοί και νοσοκομεία τη χρησιμοποιούν όλο και περισσότερο.

Πιο συγκεκριμένα, ας εξετάσουμε μερικά από τα προβλήματα που έχουν λυθεί με τις τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας. Ο γραμμικός προγραμματισμός έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε προβλήματα κατανομής προσωπικού, μίξης υλικών, μεταφοράς και διανομής και χαρτοφυλάκια επενδύσεων. Ο δυναμικός προγραμματισμός έχει και αυτός εφαρμοστεί με επιτυχία σε προβλήματα προγραμματισμού δαπανών διαφήμισης, κατανομής καναλιών διανομής και σχεδίασης παραγωγής. Η θεωρία ουρών έχει εφαρμοστεί σε προβλήματα κυκλοφορίας, συντήρησης μηχανών, προσδιορισμού δυναμικότητας, σχεδίασης αερομεταφορών, εκπόνησης σχεδίων υδατοφρακτών, σχεδίαση λειτουργίας νοσοκομείων. Άλλες τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας, όπως η θεωρία αποθεμάτων, η θεωρία παιχνιδιών, και η προσομοίωση έχουν χρησιμοποιηθεί σε πολλά άλλα προβλήματα.

Η επιχειρησιακή έρευνα έχει κατά τις τελευταίες τρεις δεκαετίες αξιόλογη επίδραση και στα πανεπιστήμια. Σήμερα, τα περισσότερα πανεπιστήμια έχουν στο πρόγραμμά τους μαθήματα επιχειρησιακής έρευνας και πολλά από αυτά προσφέρουν μεταπτυχιακά πτυχία με εξειδίκευση στην επιχειρησιακή έρευνα. Έτσι, υπάρχουν σήμερα χιλιάδες φοιτητές, που κάθε χρόνο παρακολουθούν μια τουλάχιστον σειρά μαθημάτων πάνω στην επιχειρησιακή έρευνα. Επίσης ένας μεγάλο μέρος της βασικής έρευνας στην επιχειρησιακή έρευνα γίνεται στα πανεπιστήμια.

Κεφάλαιο 2ο: Συστημική Προσέγγιση Προβλημάτων

2.1 Εισαγωγή

Από τα συστήματα radar, νηοπομπών, οπλικά και επιχειρησιακά συστήματα, γεννάται η επιχειρησιακή έρευνα που εξελίσσεται στη συνέχεια, κατά την εφαρμογή της στη οικονομική των επιχειρήσεων, σε αυτοτελή επιστημονική μέθοδο με τη χρήση των μαθηματικών για την επίλυση ορισμένων κατηγοριών σύνθετων προβλημάτων. Η συστημική σκέψη, που υπάρχει στην επιχειρησιακή έρευνα, γίνεται έκδηλη στη 'Συστημική Ανάλυση' (systems analysis) που εκπορεύεται από το ερευνητικό κέντρο Rand και αποτελεί την εκλογίκευση της διαδικασίας λήψεως αποφάσεων (decision making).

Η στροφή της επιστήμης στα πρακτικά προβλήματα συντελείται ταχύτατα και έχει σαν άμεσο αποτέλεσμα τη θεαματική ανάπτυξη της τεχνολογίας που με τη σειρά της προκαλεί όχι απλώς νέα εξέλιξη, αλλά την αναθεώρηση πολλών βάσεων της. Στη φάση αυτή ανήκει και η προσπάθεια για την αναγωγή της πολιτικής σε επιστήμη, που χαρακτηρίζει το έργο του Lasswell και της λεγόμενης σχολής του Yale (Policy Science). Στη δεύτερη, λοιπόν, φάση της εξελίξεώς της η συστημική σκέψη συνδέεται με πρακτικά προβλήματα και από τις απαιτήσεις τους γίνεται μέθοδος που η πληρότης και ορθότης της δοκιμάζονται στην πράξη.

Η εξελιγμένη, σε συστημική βάση, τεχνολογία έδωσε ώθηση στη δημιουργία νέων κλάδων της επιστήμης και αυτοί με τη σειρά τους, συνέβαλαν στην εκλέπτυνση της συστημικής μεθοδολογίας που χαρακτηρίζει την τρίτη φάση της εξελίξεώς της. Η μαθηματική θεωρία της επικοινωνίας (Shannon 1948), και η κυβερνητική (Cybernetics, Wiener 1948, Ashby 1952) είναι οι χαρακτηριστικότεροι νέοι κλάδοι. Η έννοια της 'πληροφορίας' και η μετρησιμότητά της ήταν επανάσταση στην επιστήμη, σημαντικότερη ίσως από την ανακάλυψη της έννοιας της 'ενέργειας'. Η 'πληροφορία' είναι καίριας σημασίας για την κατανόηση της συμπεριφοράς των μεγάλης κλίμακας συστημάτων. Η 'κυβερνητική', πάλι, σαν επιστημονική θεωρία του ελέγχου (control), άνοιξε το δρόμο για τη μελέτη των 'τελεονομικών' (purposeful - purposive) συστημάτων.

Εκεί, όμως, που τελειοποιείται η συστημική μέθοδος και γίνεται αναντικατάστατη είναι στην Ηλεκτρική Μηχανολογία (Electrical Engineering). Η κατασκευή μηχανής είχε εξ αρχής επηρεάσει την επιστημονική σκέψη. Οι ηλεκτρικές μηχανές, όμως, που κατασκευάστηκαν μετά το Β' Παγκόσμιο Πόλεμο, ήταν πολύπλοκες, γιατί έτειναν να γίνουν και εξακολουθούν να γίνονται 'κατ' εικόνα και ομοίωσιν' του ανθρώπινου νου με σκοπό την βελτιστοποίηση των λειτουργιών τους. Έτσι, η απόσταση μηχανής και ανθρώπου μειώθηκε. Κατασκευάζοντας τέτοιες μηχανές οι επιστήμονες άρχιζαν να καταλαβαίνουν καλύτερα το μηχανισμό της σκέψεώς τους και τη συλλογική τους δραστηριότητα. Τα θεωρητικά μοντέλα που επινοήθηκαν στο M.I.T. από τον E. Guillemin και τους μαθητές του (R. Kalman, N. Declaris, L. Zadeh) αντιπροσωπεύουν τη σταδιακή μετάβαση από τα 'κυκλώματα' (circuit) στα 'δίκτυα' (network) και τελικά στα 'γραμμικά συστήματα' (linear systems). Από τα 'δίκτυα' και πέρα είμαστε πολύ κοντά στη σύγχρονη συστημική μεθοδολογία, γιατί τα 'δίκτυα' δεν είναι μόνο ηλεκτρικά.

Με δικαιολογημένη αυτοπεποίθηση από τα θαυμαστά επιτεύγματά τους οι εξελιγμένοι αυτοί μηχανικοί δεν βλέπουν λόγο γιατί να μην μπορούν να κατασκευάσουν 'μεγάλης κλίμακας' πολύπλοκα συστήματα ανθρώπων και μηχανών. Εμφανίζεται, λοιπόν, η 'Μηχανολογία των

Συστημάτων' (Systems Engineering), αφηρημένη μηχανική που προωθεί τη συστημική μεθοδολογία σε υψηλό επίπεδο. Η χρήση ιδίως μαθηματικών μοντέλων, αυξάνει το κύρος της μεθόδου που υιοθετείται ταχύτατα από τους διάφορους κλάδους της επιστήμης (Βιολογία, Οικολογία, Ψυχολογία, κ.λ.π.). Η ίδρυση της Εταιρείας για τη Μελέτη των Γενικών Συστημάτων στις Η.Π.Α. το 1954 και η διατύπωση της Θεωρίας των Γενικών Συστημάτων (1956) είναι κορυφαίοι σταθμοί αυτής της φάσης. Η συστημική μεθοδολογία αποκτά αδιαφιλονίκητο κύρος και επιβάλλεται σαν εξελιγμένη μορφή επιστημονικής σκέψης.

2.2 Σύστημα

Οι περισσότεροι υποστηρικτές της συστημικής θεωρίας δέχονται ότι το σύστημα είναι ένα ενιαίο σύνολο που αποτελείται από αλληλένδετα μέρη, δηλαδή από στοιχεία, που έχουν διασυνδέσεις, αλληλεξαρτήσεις και αλληλεπιδράσεις. Κυρίως, όμως δέχονται ότι αυτό το σύνολο είναι κάτι περισσότερο από το άθροισμα των μερών του. Συγκεκριμένα ο Checkland αναφέρει το παράδειγμα που έδωσε ένας διδάσκων σ' ένα φοιτητή. 'Όπωςδήποτε εσύ είσαι κάτι περισσότερο από το άθροισμα των μερών σου, γιατί είσαι βλάκας'. Και όπως σχολίασε ο Checkland 'σίγουρα μπορούμε να βάλουμε αυτή την ταμπέλα στον φοιτητή, ενώ δεν μπορούμε να αποκαλέσουμε βλάκα τον αστράγαλο ή τον αγκώνα του'.

Με βάση αυτό τον ορισμό μπορούμε να κάνουμε μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις:

1. Η συμπεριφορά (ή οι ιδιότητες) καθενός στοιχείου του συνόλου έχει επίδραση πάνω στην συμπεριφορά (ή στις ιδιότητες) ολόκληρου του συνόλου.
2. Κανένα στοιχείο δεν επιδρά ανεξάρτητα πάνω σε όλο το σύστημα. Οι ιδιότητες και η συμπεριφορά κάθε συνιστώσας και ο τρόπος που επιδρά πάνω στο σύστημα εξαρτάται από τις ιδιότητες και τη συμπεριφορά των άλλων συνιστωσών.
3. Κάθε επί μέρους σύνολο στοιχείων του συστήματος έχει τις παραπάνω δύο ιδιότητες. Με άλλα λόγια κανένα στοιχείο του συστήματος δεν μπορεί να οργανωθεί σε τελείως ανεξάρτητες υποομάδες στοιχείων.

Το σύστημα είναι μια ανθρώπινη σύλληψη από μέρη που αλληλοσυνδέονται και αλληλεξαρτώνται μεταξύ τους, δηλ. βρίσκονται σε μια οργανωμένη τάξη. Και εάν μεν, αυτό το κατασκεύασμα είναι ένα τέχνημα, είναι κατανοητό. Στην περίπτωση όμως των κοινωνικών ή φυσικών φαινομένων, τι εννοείται; Το κοινωνικό ή φυσικό φαινόμενο είναι το σύστημα; Εδώ θα πρέπει να κατανοηθεί ότι το νοητικό κατασκεύασμα που καταρτίζεται προκειμένου να συλληφθεί το φαινόμενο, εάν βεβαίως το φαινόμενο αντιμετωπίζεται ως σύστημα, συνιστά το σύστημα. Δηλ. ο μελετητής είναι υποχρεωμένος, μελετώντας το όλο, να καθορίσει εκείνα τα μέρη που νομίζει ότι το συνιστούν από τη σκοπιά που ενδιαφέρεται να το μελετήσει, να συντάξει τα μέρη σε οργανωμένη τάξη, ώστε μεταξύ τους να βρίσκονται σε σχέση αλληλοσύνδεσης και αλληλεπίδρασης και τότε το σύνολο αυτών των μερών αποτελεί το σύστημα που θα μελετήσει. Αυτό το νοητικό κατασκεύασμα είναι στην ουσία το θεωρητικό πρότυπο (μοντέλο) της πραγματικότητας που επιθυμεί να μελετήσει ο επιστήμονας και αυτό είναι το σύστημα. Το τεχνητό πρότυπο (μοντέλο) που θα κατασκευάσει εκ των υστέρων για να μελετήσει τη συμπεριφορά του θεωρητικού προτύπου, δηλ. του συστήματος είναι το μοντέλο που απεικονίζει το σύστημα.

Στις τεχνολογικές απόψεις περί συστημάτων, ο ορισμός του συστήματος ως προτύπου (μοντέλου) δεν κάνει την διάκριση μεταξύ θεωρητικού και εφαρμοσμένου προτύπου

(μοντέλου), αλλά ονομάζει απ' ευθείας το σύστημα ως 'μια απεικόνιση (αντιστοιχία) των στοιχείων ενός συνόλου (είσοδος) σε ένα άλλο σύνολο (έξοδο)'.

Η διάκριση αυτή είναι πολύ σημαντική στη θεωρία των συστημάτων. Η υπέρβαση δηλαδή της σύγχυσης που έφερε η πρώιμη συστημική σκέψη ανάμεσα στο σύστημα ως έκφραση του πραγματικού κόσμου και στο σύστημα ως τρόπο σκέψης που έχει εφεύρει ο άνθρωπος για να ερμηνεύσει το πραγματικό κόσμο. Για το λόγο αυτό, πολλοί συστημικοί επιστήμονες προτείνουν να χρησιμοποιείται άλλη ορολογία για το πραγματικό φαινόμενο -σύστημα- και άλλη για την θεωρητική του σύλληψη -π.χ. Όλον-.

Τα όρια του συστήματος καθορίζονται κάθε φορά από τον ερευνητή-παρατηρητή. Κριτήριο για τον καθορισμό των ορίων είναι έως ποιο επίπεδο δέχεται ή επιτυγχάνει ο ερευνητής την ικανότητα του συστήματος για έλεγχο. Ότι τοποθετείται πέραν της περιοχής ελέγχου του συγκεκριμένου συστήματος, δηλ. πέραν των ορίων του, συνιστά το περιβάλλον αυτού. Το περιβάλλον του συστήματος εμπεριέχει εκείνες τις δυνάμεις οι οποίες, χωρίς να ανήκουν στο σύστημα, είναι ικανές να το επηρεάζουν. Είναι εκείνος ο χώρος ο οποίος παρέχει στο σύστημα τα στοιχεία εισόδου του υπό μορφή ύλης - ενέργειας - πληροφορίας και στον οποίο το σύστημα παρέχει τα τελικά του προϊόντα υπό μορφή ύλης - ενέργειας - πληροφορίας.

Η έννοια του συστήματος κατανοείται εάν γίνει πλήρως αντιληπτός ο ρόλος του παρατηρητή. Το σύστημα δεν υπάρχει έξω από τον παρατηρητή.

Παράδειγμα 1ο:

Υπάρχει μια γέφυρα. Εάν ο παρατηρητής είναι πολιτικός μηχανικός και θέλει να μελετήσει την αντοχή της γέφυρας με συστημικό τρόπο, θα εντάξει στο σύστημα την γέφυρα, από τεχνική άποψη και το φορτίο που δέχεται καθημερινώς αυτή (πεζοί και αυτοκίνητα). Εάν ο παρατηρητής είναι πολεοδόμος και μελετά την κυκλοφοριακή αναδιοργάνωση της περιοχής σε σχέση με την γέφυρα, θα εντάξει στο σύστημα τη γέφυρα (όχι από τεχνική άποψη, αλλά ως οδό διέλευσης της κυκλοφορίας), την κίνηση που εξυπηρετεί και τις παράπλευρες οδικές αρτηρίες που μαζί με την γέφυρα εξυπηρετούν την κίνηση της δεδομένης περιοχής.

Παράδειγμα 2ο:

Έστω ότι έχουμε τον ασθενή X ο οποίος υποφέρει από συχνούς πονοκεφάλους. Ο παθολόγος Ψ, ο οποίος τον εξετάζει, θεωρεί ως 'σύστημα X' τον οργανισμό του ασθενή. Εξετάζει τα όργανα του σώματός του και τελικά καταλήγει ότι ο ασθενής υποφέρει από πονοκεφάλους εντάσεως ή άγχους. Του συστήνει να μην στενοχωριέται και όταν έχει πονοκέφαλο να παίρνει ασπιρίνες. Κατόπιν αυτού, ο X επισκέπτεται τον ψυχολόγο Ω. Ο Ω προσπαθεί να εντοπίσει τις αιτίες του άγχους γι' αυτό 'στο σύστημα X' εντάσσει την οικογένεια του X και τον επαγγελματικό του χώρο. Μελετά τις αλληλεπιδράσεις αυτών των χώρων με την προσωπικότητα του X και καταλήγει ότι η αιτία του άγχους είναι η επιβάρυνση του X με καθήκοντα που υπερβαίνουν τις ψυχικές του δυνάμεις.

Παράδειγμα 3ο:

Έστω ότι έχουμε ένα σπίτι. Εάν ο παρατηρητής είναι ένας αρχιτέκτονας θεωρεί το σπίτι ως κύριο σύστημα και τους ενοίκους του, τα συστήματα φωτισμού, θερμάνσεως, ύδρευσης, εξαερισμού, κ.λπ. ως υποσυστήματα του κυρίως συστήματος. Εάν ο παρατηρητής είναι ένας μηχανολόγος μηχανικός θεωρεί τα συστήματα φωτισμού, θερμάνσεως, ύδρευσης, εξαερισμού, κ.λπ. ως το κύριο σύστημα, το δε υπόλοιπο σπίτι ως το περιβάλλον του συστήματός του. Τέλος εάν ο παρατηρητής είναι ένας ερευνητής κοινωνικής ψυχολογίας, που

ασχολείται με την οικογένεια, θεωρεί αυτή ω σύστημα, το σπίτι ως περιβάλλον του συστήματός του και τα συστήματα φωτισμού, θερμάνσεως, ύδρευσης, εξαερισμού, κ.λπ. ως συστήματα που ανήκουν στο ίδιο περιβάλλον.

Τα συστήματα μπορούν να ταξινομηθούν σε διάφορες κατηγορίες ανάλογα με τη σχέση τους με το περιβάλλον, με τα γεγονότα, με την πολυπλοκότητά τους, με τη συμπεριφορά τους κ.λ.π. Έτσι έχουμε:

1. Σε σχέση με τα στοιχεία τους τα συστήματα είναι *φυσικά* (*physical systems*) να υπάρχουν αυτούσια στη φύση (π.χ. ο άνθρωπος, ένα οικοσύστημα, το ηλιακό σύστημα, κ.λ.π.) ή *σχεδιασμένα* (*designed systems*) αν τα κατασκευάζει ο άνθρωπος. Στη δεύτερη αυτή κατηγορία έχουμε:
 - α) *Θεωρητικά* συστήματα (π.χ. συστήματα αρίθμησης).
 - β) *Τεχνολογικά* συστήματα (π.χ. ένα ασανσέρ, ο Η.Υ.).
 - γ) *Κοινωνικά* συστήματα με στοιχεία ανθρώπους και τις διαπροσωπικές τους σχέσεις.
 - δ) *Συστήματα Ανθρώπινης Δραστηριότητας* όπου οι άνθρωποι εκτελούν δραστηριότητες για κάποιο σκοπό (π.χ. ένα Πληροφοριακό Σύστημα). Τα ΣΑΔ εμπεριέχουν ένα κοινωνικό σύστημα (π.χ. ομάδα απασχολούμενων) αλλά επί πλέον ένα ιδεατικό σύστημα δραστηριοτήτων, το οποίο εκφράζει το 'τι κάνει' το κοινωνικό σύστημα. Δηλαδή: ΣΑΔ = Σύστημα Δραστηριοτήτων + Κοινωνικό Σύστημα.
2. Σε σχέση με το περιβάλλον τα συστήματα είναι *ανοικτά* (*open*) ή *κλειστά* (*closed*) ανάλογα με το εάν υπάρχει ή όχι αλληλοεπίδραση μεταξύ συστήματος και περιβάλλοντος.
3. Σε σχέση με τη συμπεριφορά τους μπορούν να ταξινομηθούν ακολουθώντας μια πορεία που ξεκινάει από απλές μορφές συμπεριφοράς και καταλήγει στις σύνθετες:
 - α) *Σταθερής κατάστασης* (*state maintaining system*) είναι το σύστημα που μπορεί να αντιδρά κατά ένα και μόνο τρόπο σε ένα εσωτερικό ή εξωτερικό γεγονός, αλλά αντιδρά διαφορετικά σε διαφορετικά εσωτερικά ή εξωτερικά γεγονότα, όμως οι αντιδράσεις αυτές έχουν πάντα το ίδιο αποτέλεσμα. Παράδειγμα: το σύστημα θερμάνσεως (με θερμοστάτη) των πολυκατοικιών.
 - β) *Συγκεκριμένου στόχου* (*goal seeking*) είναι το σύστημα που αποκρίνεται διαφορετικά σε ένα ή περισσότερα εσωτερικά ή εξωτερικά γεγονότα μέχρις ότου επιτύχει μια συγκεκριμένη κατάσταση. Ένα σύστημα της κατηγορίας αυτής έχει επιλογή συμπεριφοράς και διαθέτει 'μνήμη'. Παράδειγμα: συστήματα με αυτόματους πιλότους.
 - γ) *Σύστημα πολλών στόχων* (*multi-goal seeking*) είναι αυτό που αποκρίνεται διαφορετικά σε ένα ή περισσότερα διαφορετικά εσωτερικά ή εξωτερικά γεγονότα και έχει την ιδιότητα να αναζητά διαφορετικούς στόχους. Οι στόχοι μπορεί να έχουν ή όχι μια κοινή ιδιότητα. Ο στόχος όμως που πραγματοποιείται εξαρτάται από κάποιες αρχικές συνθήκες. Τα συστήματα της κατηγορίας αυτής δεν εκλέγουν το στόχο τους, γιατί αυτός είναι καθορισμένος από μερικές αρχικές συνθήκες, εκλέγουν όμως τα μέσα επιδιώξεως του στόχου τους. Παράδειγμα: Ένα σύστημα Η/Υ που έχει προγραμματισθεί να παίζει περισσότερα του ενός παιχνίδια.
 - δ) *Σύστημα που εκδηλώνει πρόθεση* (*purposeful system*) είναι το σύστημα εκείνο, που παράγει το ίδιο αποτέλεσμα με διάφορους τρόπους στην ίδια (εσωτερική ή εξωτερική) κατάσταση, και μπορεί και παράγει διάφορα αποτελέσματα στην ίδια ή σε διαφορετικές καταστάσεις. Έτσι ένα σύστημα της κατηγορίας αυτής έχει την δυνατότητα να αλλάξει τους στόχους κάτω από σταθερούς περιορισμούς, να επιλέξει τους σκοπούς του και τα

μέσα επιδιώξεών του. Είναι συστήματα που εκδηλώνουν θέληση. Παράδειγμα: ο άνθρωπος.

4. Τα συστήματα διακρίνονται ως προς τα γεγονότα στις εξής κατηγορίες:
 - α) Στα *στατικά* (ή μιας καταστάσεως) συστήματα, που είναι εκείνα στα οποία η αλληλεξάρτηση των στοιχείων τους είναι στατική, δηλαδή δεν συμβαίνουν γεγονότα.
 - β) Στα *δυναμικά*, που είναι εκείνα στα οποία συμβαίνουν γεγονότα και αλλάζει η κατάσταση του συστήματος.
 - γ) Στα *ομοιοστατικά*, που είναι στατικά συστήματα ως ολότητα, αλλά τόσο τα στοιχεία τους όσον και το περιβάλλον τους είναι δυναμικά. Ένα ομοιοστατικό σύστημα δηλαδή είναι ένα σύστημα που διατηρεί σταθερή την κατάστασή του σε ένα μεταβαλλόμενο περιβάλλον με τη βοήθεια εσωτερικών μετατροπών.
5. Αν ως κριτήριο χρησιμοποιήσουμε το βαθμό πρόβλεψης της συμπεριφοράς του συστήματος τότε έχουμε
 - α) *αιτιοκρατικά* (*deterministic*) συστήματα, όταν η συμπεριφορά του συστήματος σε διαφορετικές καταστάσεις μπορεί να προβλεφθεί με ακρίβεια, και
 - β) *πιθανολογικά* (*probabilistic*) συστήματα όταν καμιά πρόβλεψη δεν μπορεί να γίνει με ακρίβεια ως προς τη συμπεριφορά του συστήματος σε διαφορετικές καταστάσεις.

2.3 Μοντέλο

Πρόκειται για το τεχνητό πρότυπο (μοντέλο) του συστήματος. Είναι το χαρακτηριστικό που διαφοροποιεί, τη συστημική προσέγγιση από τις παραδοσιακές υλιστικές φιλοσοφικές προσεγγίσεις.

Ο Wilson δίνει και ορίζει το μοντέλο ως εξής: 'Είναι η σαφής διερμηνευση της αντίληψης που έχει κάποιος για μια κατάσταση. Μπορεί να εκφρασθεί με μαθηματικά σύμβολα ή λέξεις, αλλά ουσιαστικά είναι μια περιγραφή στοιχείων και των σχέσεών τους. Μπορεί να είναι δεοντολογική ή αναπαράστατική, αλλά πάνω απ' όλα πρέπει να είναι χρήσιμη'. Δηλαδή το μοντέλο είναι μια καρικατούρα της πραγματικότητας.

Τα Μοντέλα συνήθως είναι πολύ πιο απλά από την πραγματικότητα, αλλά πρέπει να εξηγούν και να προβλέπουν ορισμένες καταστάσεις της πραγματικότητας. Αυτό που πρέπει να τονιστεί είναι ότι τα Μοντέλα δεν είναι μια ερμηνεία ή αναπαράσταση της πραγματικότητας αλλά της αντίληψης, ή της σύλληψης που κάνει κάποιος για την πραγματικότητα. Είναι δηλαδή διερμηνευση ή αναπαράσταση του συστήματος όπως το έχει συλλάβει στο μυαλό του για να το μελετήσει ο παρατηρητής.

Μερικοί θετικοί λόγοι για την χρησιμοποίηση των μοντέλων είναι:

1. Οργάνωση θεωρητικών 'πιστεύω' και εμπειρικών παρατηρήσεων για ένα σύστημα.
2. Οδηγούν σε καλύτερη κατανόηση του συστήματος.
3. Μειώνουν τον χρόνο ανάλυσης.
4. Επιτρέπουν τον έλεγχο αλλαγών με ελάχιστο κόστος.

Ο Ackoff (1962) προτείνει τρεις τύπους μοντέλων:

1. Εικονικά μοντέλα (φωτογραφίες, σχέδια, μακέτες): Είναι μια αναπαράσταση, σε σμίκρυνση της πραγματικότητας π.χ. η μακέτα ενός υπό κατασκευή κτιρίου.

2. Αναλογικά μοντέλα: Αναπαριστούν την συμπεριφορά της πραγματικής κατάστασης π.χ. ροή νερού ανάμεσα από μικρές πλαστικές δεξαμενές σε θερμοκρασία δωματίου, για να ερευνηθεί η συμπεριφορά του τετηγμένου γυαλιού σε κάμινους με θερμοκρασία 1000°C.
3. Αναλυτικά μοντέλα: Μαθηματικές ή λογικές σχέσεις οι οποίες αναπαριστούν φυσικούς νόμους που διέπουν την υπό μελέτη κατάσταση. Τα αναλογικά μοντέλα περιέχουν αριθμούς, γράμματα και σύμβολα τα οποία εκφράζουν τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών του μοντέλου καθώς και τις ίδιες τις μεταβλητές. Συνήθως προηγούνται των αναλογικών μοντέλων.

Τα αναλυτικά μοντέλα χωρίζονται συνήθως σε 4 κατηγορίες αναλόγως της εξαρτήσεώς τους από το χρόνο (στατικά - δυναμικά) και της εξαρτήσεώς τους από φυσικούς νόμους ή τυχαίους παράγοντες (ντετερμινιστικά - μη ντετερμινιστικά). Βάσει αυτών των διακρίσεων τα αναλυτικά μοντέλα ταξινομούνται σε:

	Στατικά	Δυναμικά
Ντετερμινιστικά	Αλγεβρικές σχέσεις	Διαφορικές εξισώσεις
Στοχαστικά	Στατιστικές και πιθανολογικές σχέσεις	Προσομοίωση

Εκτός από τις παραπάνω κατηγορίες μοντέλου που προτείνει ο Ackoff, νεώτεροι ερευνητές (Checkland, Wilson) αναφέρουν και έναν τέταρτο τύπο μοντέλων, τα εννοιολογικά (conceptual) μοντέλα.

4. Εννοιολογικά μοντέλα: Πρόκειται για γραφικές - συμβολικές αναπαραστάσεις, οι οποίες αναπαριστούν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά μιας κατάστασης, όπως αυτή εννοείται από τον παρατηρητή. Τα εννοιολογικά μοντέλα μπορούν να είναι πολύ ευρέα, όπως π.χ. μια επιστήμη ή πολύ περιορισμένα, που να εκφράζουν μια ιδέα. Από το 1970 όμως και έπειτα, χρησιμοποιούνται εκτεταμένα στα συστήματα ανθρώπινης δράσης (ΣΑΔ). Τα ΣΑΔ εκφράζουν μια ένσκηπη ανθρώπινη δραστηριότητα και ερευνούν το 'τι κάνει' ένα ανθρώπινο σύστημα. Το εννοιολογικό μοντέλο αυτού του συστήματος εκφράζει τις πράξεις του συστήματος στη φάση που ερευνούμε.

2.4 Διατύπωση (Μοντελοποίηση) Προβλημάτων Επιχειρησιακής Έρευνας σε Μαθηματική 'Γλώσσα' (Αναλυτικό Μοντέλο)

Παράδειγμα 1ο:

Ένα εργοστάσιο επιπλοποιίας κατασκευάζει τραπέζια, καρέκλες, γραφεία και βιβλιοθήκες. Οι βασικές πρώτες ύλες είναι το μαλακό και σκληρό ξύλο. Επίσης κάθε έπιπλο χρειάζεται μερικές ανθρωποώρες εργασίας. Ο ακόλουθος πίνακας παρουσιάζει τις απαιτήσεις κάθε μονάδας παραγωγής:

	Μαλακό ξύλο (m ³)	Σκληρό ξύλο (m ³)	Ανθρωποώρες
Τραπέζι	5	2	3
Καρέκλα	1	3	2
Γραφείο	9	4	5
Βιβλιοθήκη	12	1	10

Η παραγωγή σχεδιάζεται για μια περίοδο 10 ημερών. Για την περίοδο αυτή υπάρχουν διαθέσιμα 1.500 m³ μαλακού ξύλου και 1000m³ σκληρού ξύλου. Το μαλακό ξύλο κοστίζει 100 δρχ./m³ και το σκληρό ξύλο 250 δρχ./m³. Το κόστος της ανθρωποώρας είναι 500 δρχ. Η τιμή πώλησης ανά κομμάτι είναι:

Τραπέζι	3100 δρχ.
Καρέκλα	2100 δρχ.
Γραφείο	5100 δρχ.
Βιβλιοθήκη	6900 δρχ.

Να διατυπώσετε το πρόβλημα σε μαθηματική ‘γλώσσα’ έτσι ώστε το εργοστάσιο να επιτύχει το μέγιστο κέρδος. Υποθέτουμε ότι όλα τα έπιπλα διατίθενται στη αγορά.

Διατύπωση:

Οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές προσδιορίζονται από την επίλυση του προβλήματος και οι οποίες μας δείχνουν το ύψος της εκτέλεσης ή παραγωγής των δραστηριοτήτων του προβλήματος ονομάζονται **μεταβλητές απόφασης** (decision variables). Στο συγκεκριμένο πρόβλημα αυτές οι δραστηριότητες είναι η κατασκευή τραπεζιών, καρεκλών, γραφείων, βιβλιοθηκών και οι μεταβλητές απόφασης είναι: x_T , x_K , x_G , x_B δηλαδή οι αριθμοί του κάθε είδους επίπλου που πρέπει να κατασκευασθούν,

Το κόστος ανά μονάδα παραγωγής είναι:

Τραπέζι : $100 \times 5 \text{ ft}^3 = 500 \text{ δρχ. για μαλακό ξύλο}$
 $250 \times 2 \text{ ft}^3 = 500 \text{ δρχ. για σκληρό ξύλο}$
 $500 \times 3 = 1500 \text{ δρχ. για ανθρωποώρες}$
Σύνολο $= 2500 \text{ δρχ. ανά τραπέζι που κατασκευάζεται.}$

Καρέκλα : $100 \times 1 \text{ ft}^3 = 100 \text{ δρχ. για μαλακό ξύλο}$
 $250 \times 3 \text{ ft}^3 = 750 \text{ δρχ. για σκληρό ξύλο}$
 $500 \times 2 = 1000 \text{ δρχ. για ανθρωποώρες}$
Σύνολο $= 1850 \text{ δρχ. ανά καρέκλα που κατασκευάζεται.}$

Γραφείο : $100 \times 9 \text{ ft}^3 = 900 \text{ δρχ. για μαλακό ξύλο}$
 $250 \times 4 \text{ ft}^3 = 1000 \text{ δρχ. για σκληρό ξύλο}$
 $500 \times 5 = 2500 \text{ δρχ. για ανθρωποώρες}$
Σύνολο $= 4400 \text{ δρχ. ανά γραφείο που κατασκευάζεται.}$

Βιβλιοθήκη : $100 \times 12 \text{ ft}^3 = 1200 \text{ δρχ. για μαλακό ξύλο}$
 $250 \times 1 \text{ ft}^3 = 250 \text{ δρχ. για σκληρό ξύλο}$
 $500 \times 10 = 5000 \text{ δρχ. για ανθρωποώρες}$
Σύνολο $= 6450 \text{ δρχ. ανά τραπέζι που κατασκευάζεται.}$

Άρα το κέρδος για κάθε μονάδα που κατασκευάζεται είναι ίσο με (τιμή πώλησης) - (κόστος κατασκευής):

Τραπέζι: $3100 - 2500 = 600 \text{ δρχ. ανά τραπέζι}$
Καρέκλα: $2100 - 1850 = 250 \text{ δρχ. ανά καρέκλα}$
Γραφείο: $5100 - 6400 = 700 \text{ δρχ. ανά γραφείο}$
Βιβλιοθήκη: $6900 - 6450 = 450 \text{ δρχ. ανά βιβλιοθήκη.}$

και ουσιαστικά θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το ακόλουθο κέρδος:

$$\max z = 600x_T + 250x_K + 750x_\Gamma + 450x_B$$

με τους ακόλουθους περιορισμούς που οφείλονται στα περιορισμένα υλικά (μαλακό και σκληρό ξύλο) και στις ανθρωποώρες που είναι διαθέσιμα:

$$5x_T + x_K + 9x_\Gamma + 12x_B \leq 1500$$

$$2x_T + 3x_K + 4x_\Gamma + x_B \leq 1000$$

$$3x_T + 2x_K + 5x_\Gamma + 10x_B \leq 800$$

$$x_T, x_K, x_\Gamma, x_B \geq 0.$$

Παράδειγμα 2ο:

Η επιχείρηση Χαλυβουργική Α.Ε. παράγει χάλυβα στην πόλη του Αλμυρού και είναι η μόνη μεγάλη βιομηχανία της περιοχής. Ο Αλμυρός έχει αναπτυχθεί παράλληλα με την ανάπτυξη της επιχείρησης, όπου εργάζονται περίπου 2000 άνθρωποι. Η διάθεση των κατοίκων ήταν πάντα 'ότι είναι καλό για τη Χαλυβουργική Α.Ε. είναι καλό για την πόλη'. Όμως αυτό δεν συμβαίνει τώρα, επειδή η ανεξέλεγκτη ατμοσφαιρική ρύπανση από τις καμίνους της επιχείρησης καταστρέφει την εμφάνιση της πόλης και βάζει σε κίνδυνο την υγεία των κατοίκων της.

Η τελευταία εξέγερση των κατοίκων, πολλοί από τους οποίους ήταν μέτοχοι της επιχείρησης, είχε σαν αποτέλεσμα την εκλογή ενός νέου διοικητικού συμβουλίου στη Χαλυβουργική Α.Ε. Το νέο διοικητικό συμβούλιο αποφάσισε ν' ακολουθήσει υπεύθυνη κοινωνική πολιτική και έτσι άρχισε να συζητάει με πολίτες και υπεύθυνους της Χαλυβουργικής Α.Ε. τους τρόπους επίλυσης του προβλήματος. Μαζί προσδιόρισαν αυστηρότερα πρότυπα για τα αερόλυμα της Χαλυβουργικής Α.Ε.

Τα τρία είδη μόλυνσης ήταν (α) στερεά τεμαχίδια ύλης, (β) οξείδια του θείου και (γ) υδρογονάνθρακες. Σύμφωνα με τα νέα πρότυπα, η επιχείρηση θα έπρεπε να μειώσει την εκπομπή ρύπων κατά τα ποσά που εμφανίζονται στο παρακάτω πίνακα:

Είδη	Απαιτούμενη μείωση / έτος
μόλυνσης	σε εκατομμύρια μονάδες
Στερεά τεμαχίδια ύλης	60
Οξείδιο του θείου	150
Υδρογονάνθρακες	125

Η διοίκηση της επιχείρησης ζήτησε από τους μηχανικούς της να προσδιορίσουν πως θα γίνει η μείωση του ρυθμού εκπομπής κατά τον πιο οικονομικό τρόπο. Τα χαλυβουργεία έχουν δύο κύριες πηγές ρύπανσης, τις καμίνους εμφύσησης για την παραγωγή χυτοσίδηρου και τις ανοικτές καμίνους για τη μετατροπή του σιδήρου σε χάλυβα. Και για τις δύο περιπτώσεις οι μηχανικοί αποφάσισαν ότι οι πιο αποτελεσματικοί τρόποι μείωσης ήταν (α) αύξηση του ύψους των καπνοδόχων, (β) φίλτρα στις καπνοδόχους και (γ) καλύτερης ποιότητας καύσιμα για τις καμίνους. Οι μέθοδοι αυτοί έχουν τεχνολογικά όρια για το ποσό της ρύπανσης που μπορούν να περιορίσουν, που δίνονται στον παρακάτω πίνακα (σε εκατομμύρια μονάδες ανά χρόνο) και μπορούν να χρησιμοποιήσουν οποιοδήποτε κλάσμα της δυναμικότητάς τους. Ακόμα επειδή λειτουργούν ανεξάρτητα, η μείωση της ρύπανσης που πετυχαίνεται από μια μέθοδο δεν επηρεάζεται σημαντικά από το κατά πόσο οι άλλοι μέθοδοι χρησιμοποιούνται.

	Υψηλότερες	καμινάδες	Φίλτρα		Καλύτερα	καύσιμα
	Κάμινοι εμφύσησης	Ανοικτές κάμινοι	Κάμινοι εμφύσησης	Ανοικτές κάμινοι	Κάμινοι εμφύσησης	Ανοικτές κάμινοι
Τεμαχίδια ύλης	12	9	25	20	17	13
Οξείδιο του θείου	35	42	18	31	56	49
Υδρογον- άνθρακες	37	53	28	24	29	20

Μετά τη συγκέντρωση των δεδομένων έγινε φανερό ότι καμία από τις μεθόδους δεν μπορούσε μόνη της να πραγματοποιήσει την απαιτούμενη μείωση της ρύπανσης. Από την άλλη πλευρά, η ταυτόχρονη λειτουργία των τριών μεθόδων σε πλήρη δυναμικότητα, κάτι που λόγω του ψηλού κόστους θα έκανε τα προϊόντα της επιχείρησης μη ανταγωνιστικά, ήταν πολύ περισσότερο από αρκετή για τη μείωση της ρύπανσης. Έτσι οι μηχανικοί αποφάσισαν να χρησιμοποιήσουν κάποιο συνδυασμό των τριών μεθόδων, ίσως μέρος της δυναμικότητάς τους, που θα βασίζονταν στα σχετικά στοιχεία κόστους. Ακόμη υπολογίστηκε η συνολική ετήσια δαπάνη λειτουργίας κάθε μεθόδου σε πλήρη δυναμικότητα, που δίνεται στο παρακάτω πίνακα. Η δαπάνη για τη μερική λειτουργία μιας μεθόδου είναι ανάλογη με το χρησιμοποιούμενο ποσοστό της δυναμικότητάς της και επομένως η συνολική ετήσια δαπάνη ανάλογη των δεδομένων του παρακάτω πίνακα.

	Κάμινοι εμφύσησης	Ανοικτές καμίνους
Υψηλότερες καμινάδες	8	10
Φίλτρα	7	6
Καλύτερα καύσιμα	11	9

Το πρόβλημα τώρα είναι η διαμόρφωση ενός μοντέλου που θα προσδιορίζει το είδος της μεθόδου και το ποσοστό χρησιμοποίησης της για τα δύο είδη καμίνων, κατά τρόπο που να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις μείωσης της ρύπανσης με το μικρότερο δυνατό κόστος.

Διατύπωση:

Οι μεταβλητές απόφασης (decision variables) είναι: x_i ($i = 1, \dots, 6$) όπου η κάθε μία αντιπροσωπεύει το ποσοστό χρησιμοποίησης μιας μεθόδου για κάθε έναν τύπο καμίνου:

	Κάμινοι εμφύσησης	Ανοικτοί κάμινοι
Υψηλότερες . καμινάδες	x_1	x_2
Φίλτρα	x_3	x_4
Καλύτερα καύσιμα	x_5	x_6

Επειδή ο αντικειμενικός σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους με ταυτόχρονη ικανοποίηση των απαιτήσεων μείωσης της ρύπανσης, το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος θα είναι:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\min z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 9x_6$$

δηλ. ελαχιστοποίηση κόστους, με τους ακόλουθους περιορισμούς

$$12x_1 + 9x_2 + 25x_3 + 20x_4 + 17x_5 + 13x_6 \geq 60$$

$$35x_1 + 42x_2 + 18x_3 + 31x_4 + 56x_5 + 49x_6 \geq 150$$

$$37x_1 + 53x_2 + 28x_3 + 24x_4 + 29x_5 + 20x_6 \geq 125 \text{ για τη μείωση της ρύπανσης.}$$

Επίσης για τεχνολογικούς λόγους

$$x_i \leq 1 \quad \forall i \quad \text{και μη αρνητικές τιμές, } x_i \geq 0 \quad \forall i.$$

Παράδειγμα 3

Ένα εργοστάσιο παράγει μέχρι 5 τύπους προϊόντων ($\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_5$) χρησιμοποιώντας δύο διαδικασίες Δ_1 και Δ_2 .

Μετά την αφαίρεση του κόστους των πρώτων υλών, κάθε μονάδα προϊόντος επιφέρει το ακόλουθο κέρδος:

Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
550	600	350	400	200

Κάθε μονάδα απαιτεί ορισμένο χρόνο στην κάθε διαδικασία:

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
Δ_1	12	20	-	25	15
Δ_2	10	8	16	-	-

Η τελική συναρμολόγηση κάθε μονάδας του κάθε προϊόντος απαιτεί 20 ώρες ανθρώπινης εργασίας.

Το εργοστάσιο έχει 3 μηχανές για την διαδικασία Δ_1 και 2 μηχανές για την Δ_2 και επίσης λειτουργεί 6 ημέρες την εβδομάδα, με 2 βάρδιες των 8 ωρών την ημέρα. 8 εργάτες εργάζονται στην συναρμολόγηση και ο καθένας κάνει μία βάρδια την ημέρα.

Το πρόβλημα είναι η εύρεση του βέλτιστου ποσού παραγωγής του κάθε προϊόντος έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.

Διατύπωση:

Οι μεταβλητές απόφασης (decision variables): x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , είναι οι αριθμοί μονάδων των προϊόντων $\Pi_1, \dots, \Pi_5$ οι οποίες πρέπει να παράγονται κάθε εβδομάδα. Τότε το ολικό κέρδος είναι:

$$z = 550x_1 + 600x_2 + 350x_3 + 400x_4 + 200x_5 \quad (1) \quad \text{και θέλουμε } \max z.$$

Οι περιορισμοί υπολογίζονται ως εξής:

3 μηχανές για Δ_1 x 96 ώρες / εβδομάδα = 288 ώρες / εβδ., τότε έχουμε:

$$12x_1 + 20x_2 + 25x_4 + 15x_5 \leq 288 \quad (2)$$

2 μηχανές για Δ_2 x 96 ώρες / εβδ. = 192 ώρες / εβδ., τότε έχουμε:

$$10x_1 + 8x_2 + 16x_3 \leq 192 \quad (3)$$

Τελικώς 8 εργάτες x 48 ώρες / εβδ. = 384 ώρες / εβδ. Επειδή κάθε μονάδα προϊόντος απαιτεί 20 ώρες έχουμε:

$$20x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 20x_5 \leq 384 \quad (4)$$

Οι (1), (2), (3) και (4) εκφράζουν ένα Π.Γ.Π.

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max z = 550x_1 + 600x_2 + 350x_3 + 400x_4 + 200x_5$$

δηλαδή, η μεγιστοποίηση του κέρδους, με τους ακόλουθους περιορισμούς:

$$12x_1 + 20x_2 + 25x_4 + 15x_5 \leq 288$$

$$10x_1 + 8x_2 + 16x_3 \leq 192$$

$$20x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 20x_5 \leq 384$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5$$

Παράδειγμα 4

Ένα εργαστήριο ερευνητικό παρατήρησε ότι η ανάπτυξη ζώων επηρεάζεται πολύ από τρία βασικά στοιχεία διατροφής: "πρωτεΐνη", "άλατα" και "βιταμίνες". Τα ελάχιστα ημερήσια ποσά είναι: 70 gr. πρωτεΐνη, 3gr. άλατα και 10mg βιταμίνη.

Το εργαστήριο έχει πέντε είδη διατροφής διαθέσιμα για να ικανοποιήσει αυτές τις απαιτήσεις. Το περιεχόμενο ανά κιλό κάθε είδους διατροφής είναι:

Είδος	Πρωτεΐνη (gr)	Άλατα (gr)	Βιταμίνη (mgr)
1	0.30	0.10	0.05
2	2.00	0.05	0.10
3	1.00	0.02	0.02
4	0.60	0.20	0.20
5	1.80	0.05	0.08

Το κόστος ενός κιλού τους κάθε είδους διατροφής σε χρηματικές μονάδες είναι:

Είδος	1	2	3	4	5
Κόστος	2	7	4	3	5

Το πρόβλημα είναι η εύρεση της κατάλληλης διατροφής που ικανοποιεί τις απαιτήσεις με το ελάχιστο κόστος.

Διατυπωση

Μεταβλητές απόφασης (decision variables): x_j , $j=1, 2, \dots, 5$ ας είναι το ποσό του είδους j σε 100 κιλά τελικής ανάμιξης διατροφής. Τότε θέλουμε :

$$\min z = 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5$$

με τους περιορισμούς:

$$0,30x_1 + 2,00x_2 + 1,00x_3 + 0,60x_4 + 1,80x_5 \geq 70$$

$$0,10x_1 + 0,05x_2 + 0,02x_3 + 0,20x_4 + 0,05x_5 \geq 3$$

$$0,05x_1 + 0,10x_2 + 0,02x_3 + 0,20x_4 + 0,08x_5 \geq 10$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5$$

2.5 Ασκήσεις

1. Μια βιομηχανία παράγει τρία προϊόντα Π_1 , Π_2 , Π_3 , καθένα από τα οποία απαιτεί τρεις πρώτες ύλες Y_1 , Y_2 , Y_3 και επεξεργασία σε δύο στάδια Σ_1 , Σ_2 . Οι απαιτούμενες ποσότητες πρώτων υλών σε κατάλληλες μονάδες καθώς και ο απαιτούμενος αριθμός ωρών σε κάθε στάδιο επεξεργασίας για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος δίνονται από τον παρακάτω πίνακα :

	Y_1	Y_2	Y_3	Σ_1	Σ_2	K
Π_1	3	2	1	12	7	50
Π_2	2	3	5	3	15	70
Π_3	1	4	0	10	10	60
Δ	200	200	150	500	600	

Στην τελευταία γραμμή του πίνακα δίνεται η διαθέσιμη ποσότητα από κάθε ύλη καθώς και ο διαθέσιμος αριθμός ωρών σε κάθε στάδιο επεξεργασίας για μια ημέρα. Στην τελευταία στήλη δίνεται το κέρδος σε δραχμές ανά μονάδα προϊόντος. Η βιομηχανία θέλει να προγραμματίσει την ημερήσια παραγωγή της έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό κέρδος της. Να γίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.

2. Μια βιομηχανία διαθέτει δύο εργοστάσια E_1 , E_2 , που παράγουν τρία προϊόντα. Η ωριαία δυναμικότητα των εργοστασίων δηλαδή ο αριθμός των μονάδων των προϊόντων που παράγονται σε μια ώρα λειτουργίας δίνεται από τον πίνακα :

	Π_1	Π_2	Π_3
E_1	4	2	3
E_2	3	6	5

Το κόστος ωριαίας λειτουργίας για τα E_1 , E_2 είναι 20 και 40 χρηματικές μονάδες (π.χ. χιλιάδες δραχμών) αντίστοιχα, ενώ η υπερωριακή λειτουργία τους επιβαρύνει την βιομηχανία με 30 και 60 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα για κάθε πρόσθετη ώρα απασχόλησης. Απαιτούνται τουλάχιστον 30, 70 και 60 μονάδες από τα προϊόντα Π_1 , Π_2 και Π_3 κάθε μέρα. Αν η διάρκεια κανονικής λειτουργίας των εργοστασίων είναι το πολύ 8 ώρες και η υπερωριακή απασχόληση δεν επιτρέπεται να υπερβεί τις 3 ώρες την ημέρα, πόσες ώρες πρέπει να λειτουργεί κάθε εργοστάσιο ώστε το συνολικό κόστος να ελαχιστοποιείται; Να γίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.

3. Σ' ένα διυλιστήριο δύο τύποι αργού πετρελαίου A και B αναμειγνύονται κατά δύο διαφορετικές διαδικασίες P και Q και παράγουν δύο τύπους βενζίνης X και Y σύμφωνα με τον πίνακα :

Διαδικασία	Είσοδος		Έξοδος	
	A	B	X	Y
P	6	4	5	2
Q	3	5	2	4

Οι διαθέσιμες ποσότητες αργού πετρελαίου τύπου A,B είναι 180 και 200 μονάδες αντίστοιχα. Οι απαιτήσεις της αγοράς επιβάλλουν την παραγωγή τουλάχιστον 100

μονάδων βενζίνης από κάθε τύπο. Το κέρδος ανά κύκλο παραγωγής είναι 2 και 3 μονάδες αντίστοιχα για τις διαδικασίες P και Q. Ζητείται ο προσδιορισμός του αριθμού των κύκλων παραγωγής από κάθε διαδικασία που αποφέρει το μέγιστο δυνατό κέρδος. Να γίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.

4. Ένας αγρότης έχει 100 στρέμματα γης και θέλει να καλλιεργήσει στάρι και καλαμπόκι. Το ετήσιο κέρδος είναι 1500 δραχμές για κάθε στρέμμα στάρι και 1000 δραχμές για κάθε στρέμμα καλαμπόκι. Ο αγρότης έχει εκτιμήσει ότι με μιας ώρας δουλειά το χρόνο μπορεί να καλλιεργήσει 0,04 στρέμματα στάρι ή 0,1 στρέμματα καλαμπόκι και επίσης δεν θέλει να δουλέψει παραπάνω από 2000 ώρες το χρόνο. Πόσα στρέμματα πρέπει να καλλιεργήσει από κάθε είδος για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του;
5. Μια εταιρεία παράγει δύο προϊόντα Π_1 , Π_2 . Κάθε μονάδα του Π_1 δίνει κέρδος 48 δραχμές και κάθε μονάδα του Π_2 δίνει κέρδος 60 δραχμές. Για την παρασκευή μιας μονάδας του Π_1 χρειάζονται 4 κιλά αλεύρι, 4 ώρες προετοιμασία και 2 ώρες στο φούρνο, ενώ για την παρασκευή μιας μονάδας του Π_2 χρειάζονται 3 κιλά αλεύρι, 1 ώρα προετοιμασία και 4 ώρες φούρνο. Υπάρχουν 120 κιλά αλεύρι, καύσιμα για 120 ώρες λειτουργίας του φούρνου και οι εργάτες που προετοιμάζουν τα Π_1 , Π_2 διαθέτουν μέχρι 80 ώρες εργασίας. Ο φούρνος χρησιμοποιείται για μια μονάδα από ένα προϊόν κάθε φορά. Πόσες μονάδες από κάθε είδος προϊόντος πρέπει να παράγει η εταιρεία για να μεγιστοποιήσει το κέρδος της ;
6. Μια ομάδα από τρεις φοιτητές, για να βγάλει τα έξοδά της, αποφάσισε να καθαρίζει κτίρια. Ο χρόνος που χρειάζεται για να καθαριστεί και η αμοιβή σε δραχμές είναι :

Αριθμός ορόφων	4	3	2	1
Διάρκεια καθαρισμού	2	1.5	1.1	0.6
Αμοιβή	512	374	270	120

Οι φοιτητές εργάζονται συνολικά μέχρι 24 ώρες την εβδομάδα. Επίσης πρέπει να καθαρίζουν τουλάχιστον 20 κτίρια με 1,2 ή 3 ορόφους την εβδομάδα. Να γίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.

7. Ένα κατάστημα θέλει να αγοράσει 200 σεντόνια (Σ) και 300 κουβέρτες (K). Τρία εργοστάσια E_1 , E_2 , E_3 , μπορούν να προμηθεύσουν σεντόνια και κουβέρτες μαζί όχι περισσότερο από 200 το E_1 , 260 το E_2 και 180 το E_3 . Το κέρδος από κάθε σεντόνι ή κουβέρτα δίνεται από τον πίνακα.

	Σ	K
E_1	320	420
E_2	400	360
E_3	390	380

Πόσα σεντόνια και πόσες κουβέρτες πρέπει να αγοράσει το κατάστημα από κάθε εργοστάσιο για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του; Να γίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.

8. Μια εταιρεία μεταφορών διαθέτει δύο ειδών αεροπλάνα A_1 και A_2 . Θέλουμε να μεταφέρουμε 254 τόνους εμπορεύματος. Το A_1 μπορεί να μεταφέρει 22 τόνους ενώ το A_2 12 τόνους. Για κάθε ταξίδι το A_1 κοστίζει 12.000 δραχμές και καταναλώνει 4.000 τόνους καύσιμα, ενώ το A_2 κοστίζει 10.000 δραχμές και καταναλώνει 900 τόνους καύσιμα. Στην αποθήκη υπάρχουν 30.800 τόνοι καύσιμα. Πόσα αεροπλάνα τύπου A_1 και A_2 πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος μεταφοράς; Να γίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.
9. Ένα επιπλοποιείο έχει 60 καδρόνια των 5.5 μέτρων, 120 καδρόνια των 4 μέτρων και τα χρησιμοποιεί για να κάνει σκελετούς από πόρτες. Κάθε σκελετός πόρτας χρειάζεται δύο καδρόνια μήκους 1.90 μέτρα το καθένα και ένα καδρόνι μήκους 1.20 μέτρα. Κάθε καδρόνι των 5.5 μ. και 4 μ. μπορεί να κοπεί σε καδρόνια των 1.90 μ. και 1.20 μ. με τους παρακάτω τρόπους :

Μήκος καδρονιού	5.5	5.5	5.5	4	4	4
Κομμάτια						
Κομμάτια των 1.90 μ.	2	1	0	2	1	0
Κομμάτια των 1.20 μ.	1	3	4	0	1	3
Περίσσευμα σε μ.	0.5	0	0.7	0.2	0.9	0.4

Πώς πρέπει να κοπούν τα αρχικά καδρόνια ώστε να φτιάξει το επιπλοποιείο το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό σκελετών πόρτας, και να μη μείνει κανένα καδρόνι αχρησιμοποίητο; Να γίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.

10. Ένας έχει 100.000 δραχμές και θέλει να τις επενδύσει σε μετοχές τριών εταιρειών Α, Β, Γ. Για σιγουριά δεν θέλει να επενδύσει περισσότερο από 40.000 δραχμές σε μια εταιρεία. Η τιμή κάθε μετοχής και το ετήσιο μέρισμα που δίνει είναι :

	Α	Β	Γ
Μετοχή	2000	1500	800
Μέρισμα	100	90	45

Πόσες μετοχές από κάθε εταιρεία πρέπει να αγοράσει, ώστε να μεγιστοποιήσει το ετήσιο κέρδος του; Να γίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.

11. Μια επιχείρηση πρόκειται να εισάγει ένα νέο προϊόν στην αγορά. Για να διαφημίσει το προϊόν αυτό, επιλέγει να χρησιμοποιήσει ως διαφημιστικά μέσα τηλεόραση, ραδιόφωνο, εφημερίδες και περιοδικά. Το κόστος διαφήμισης ανά παρουσίαση στα τέσσερα αυτά διαφημιστικά μέσα καθώς και ένας δείκτης ακροαματικότητας, παρουσιάζονται στο επόμενο πίνακα :

	Τηλεόραση	Ραδιόφωνο	Εφημερίδες	Περιοδικά
Κόστος παρουσίασης	200.000	20.000	110.000	130.000
Δείκτης ακροαματικότητας	120	25	60	82

Έχουμε ακόμα τους εξής περιορισμούς :

- Το ολικό κόστος της διαφήμισης δεν θα πρέπει να ξεπεράσει τα 5 εκατομμύρια.
- Ακολουθείται η εξής πολιτική, ο αριθμός των διαφημίσεων που γίνονται στα περιοδικά και εφημερίδες να μην υπερβαίνει το 30% αυτών που γίνονται από τηλεόραση και ραδιόφωνο.
- Έχει παρατηρηθεί ότι για να αποδώσει μια διαφήμιση απαιτούνται τουλάχιστον 15 επαναλήψεις στο ραδιόφωνο και 10 επαναλήψεις στην τηλεόραση.

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα ζητείται να προσδιοριστεί ο αριθμός των διαφημίσεων στα τέσσερα αυτά διαφημιστικά μέσα έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η ολική ακροαματικότητα.

12. Ένας αγελαδοτρόφος πρέπει να δίνει στις αγελάδες κάθε μέρα τροφές ώστε να εξασφαλίζονται οι ελάχιστες ανάγκες τους σε υδρογονάνθρακες, πρωτεΐνες και βιταμίνες. Χρησιμοποιεί αραβόσιτο, κριθάρι και βρώμη. Η περιεκτικότητα των τροφών αυτών δίνεται από τον πίνακα

	Κιλό Αραβόσιτου	Κιλό κριθαριού	Κιλό βρώμης	Ελάχιστες ημερήσιες ανάγκες
Υδρογ/κες	10	3	6	26
Πρωτεΐνες	4	9	8	24
Βιταμίνες	1	4	7	22
Κόστος	10	12	8	

Στην τελευταία γραμμή του πίνακα δίνεται το κόστος των τροφών σε δραχμές ανά κιλό, ενώ στην τελευταία στήλη, οι ελάχιστες ημερήσιες ανάγκες μιας αγελάδας σε υδρογονάνθρακες, πρωτεΐνες και βιταμίνες. Ποια πρέπει να είναι η καθημερινή τροφή κάθε αγελάδας για να ελαχιστοποιείται το κόστος ;

13. Μια εταιρεία κονσερβών παρασκευάζει κονσέρβες βάρους 1 κιλού με περιεκτικότητα 1/2 αχλάδια και 1/2 μήλα, και κονσέρβες βάρους 1,5 κιλών με περιεκτικότητα 1/12 αχλάδια, 1/4 μήλα και 2/3 ροδάκινα. Υπάρχουν στις αποθήκες 8.000 κιλά αχλάδια, 9.000 κιλά μήλα και 10.000 κιλά ροδάκινα. Οι κονσέρβες του 1 κιλού πουλιούνται 50 δραχμές η μία και των 1,5 κιλών πουλιούνται 65 δραχμές η μία. Πόσες κονσέρβες από κάθε είδος πρέπει να παράγει η εταιρεία (α) για να μεγιστοποιήσει την είσπραξη και (β) για να μεγιστοποιήσει το συνολικό αριθμό των παραγόμενων κονσερβών;

14. Μια οικοδομική εταιρεία έχει αγοράσει μια έκταση και την έχει χωρίσει σε 180 οικόπεδα. Έχει σχεδιάσει 6 τύπους σπιτιών $A_1, A_2, \dots, A_6$ και υπόσχεται ότι ολόκληρος ο οικισμός θα παραδοθεί σε 48 μήνες. Ο χρόνος κατασκευής σε μέρες κάθε σπιτιού και το αντίστοιχο κέρδος σε χιλιάδες δραχμές δίνονται από τον πίνακα:

Τύπος σπιτιού	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Χρόνος κατασκευής	8	12	7	13	11	16
Κέρδος	90	150	80	160	120	200

α) Πόσα σπίτια από κάθε τύπο πρέπει να κτίσει η εταιρεία για να μεγιστοποιήσει το κέρδος της; β) Αν ο νόμος λέει ότι πρέπει να κτισθούν τουλάχιστον 120 σπίτια, ποιο είναι το μέγιστο κέρδος;

Κεφάλαιο 3ο: Γραμμικός Προγραμματισμός

3.1 Εισαγωγή

Πολλοί πιστεύουν ότι η ανάπτυξη του γραμμικού προγραμματισμού είναι μια από τις πιο σπουδαίες επιστημονικές ανακαλύψεις στα μέσα του εικοστού αιώνα. Η επίδρασή του από το 1950 ήταν πράγματι πολύ σημαντική. Σήμερα, ο γραμμικός προγραμματισμός έχει γίνει ένα πρότυπο εργαλείο, που χρησιμοποιείται από τις περισσότερες μεσαίου και μεγάλου μεγέθους εμπορικές και βιομηχανικές επιχειρήσεις των βιομηχανικών χωρών. Η χρησιμοποίησή του σε άλλους τομείς της κοινωνίας έχει επεκταθεί με ταχύτατο ρυθμό. Δεκάδες βιβλία έχουν γραφτεί για το γραμμικό προγραμματισμό και εκατοντάδες άρθρα έχουν δημοσιευτεί με σπουδαίες εφαρμογές του. Πάρα πολλοί επιστημονικοί υπολογισμοί σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές στηρίχτηκαν στο γραμμικό προγραμματισμό και σε άλλες τεχνικές στενά συνδεδεμένες με αυτόν.

Ποια είναι όμως η φύση του εργαλείου αυτού και σε τι είδους προβλήματα απευθύνεται; Η απάντηση σ' αυτές τις ερωτήσεις θα γίνει πιο κατανοητή από τα παραδείγματα που παρουσιάζονται πιο κάτω. Ωστόσο μια σύντομη περίληψη θα βοηθούσε σε μια πρώτη θεώρηση. Με λίγα λόγια, ο γραμμικός προγραμματισμός ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των περιορισμένων πόρων μεταξύ ανταγωνιζόμενων δραστηριοτήτων κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Αυτό το πρόβλημα της κατανομής μπορεί να προκύψει όταν κάποιος πρέπει να επιλέξει το επίπεδο ορισμένων δραστηριοτήτων ανταγωνιστικών για περιορισμένους πόρους, που είναι αναγκαίοι για την εκτέλεσή τους. Οι περιπτώσεις κατανομής πόρων σε δραστηριότητες είναι πολλές, όπως π.χ. είναι η κατανομή των μέσων παραγωγής στα προϊόντα, η κατανομή των εθνικών πόρων στις εγχώριες ανάγκες, η επιλογή του χαρτοφυλακίου επενδύσεων, ο προγραμματισμός της γεωργικής παραγωγή μιας χώρας, κ.ά. Το κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών των περιπτώσεων είναι η ανάγκη για την κατανομή των περιορισμένων πόρων στις ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες.

Ο γραμμικός προγραμματισμός χρησιμοποιεί ένα μαθηματικό μοντέλο για να περιγράψει το πρόβλημα που εξετάζεται. Ο όρος 'γραμμικός' σημαίνει ότι όλες οι μαθηματικές συναρτήσεις στο μοντέλο πρέπει να είναι γραμμικές. Η λέξη 'προγραμματισμός' δεν αναφέρεται στον προγραμματισμό των ηλεκτρονικών υπολογιστών, αλλά είναι συνώνυμη της λέξης 'σχεδίασης'. Έτσι ο γραμμικός προγραμματισμός ασχολείται με τη σχεδίαση των δραστηριοτήτων με σκοπό να προκύψει το βέλτιστο αποτέλεσμα, δηλαδή το αποτέλεσμα εκείνο, που μεταξύ όλων των δυνατών εναλλακτικών λύσεων, ικανοποιεί τον προκαθορισμένο σκοπό κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Θα αρχίσουμε αυτό το κεφάλαιο περιγράφοντας τα χαρακτηριστικά ενός γενικού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα απλό παράδειγμα ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού το οποίο μπορεί και να λυθεί και γραφικά. Το ίδιο παράδειγμα θα το χρησιμοποιήσουμε για να περιγράψουμε τις αρχές και τους μηχανισμούς της μεθόδου Simplex. Μετά την περιγραφή της μεθόδου Simplex, θα δώσουμε μερικά παραδείγματα εφαρμογής της, θα δούμε μερικές ειδικές περιπτώσεις της μεθόδου και θα παρουσιάσουμε την ανάλυση ευαισθησίας. Τέλος το κεφάλαιο αυτό τελειώνει με την περιγραφή της μεθόδου των δύο φάσεων και των προβλημάτων μεταφοράς, μεταφόρτωσης και εκχώρησης.

3.2 Το Γενικό Πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού

Σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού δεδομένων n μεταβλητών και m γραμμικών εξισώσεων ή ανισοτήτων, ζητούνται οι μη αρνητικές τιμές αυτών των μεταβλητών οι οποίες ικανοποιούν αυτές τις εξισώσεις και ανισώσεις και βελτιστοποιούν (μεγιστοποιούν) κάποια γραμμική συνάρτηση αυτών των μεταβλητών.

Δηλαδή ζητείται η μεγιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ (1),

με την προϋπόθεση να ικανοποιούνται οι γραμμικοί περιορισμοί $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \beta_i, i=1,2,\dots,m$ (2)

και $x_j \geq 0$ (3), $j=1,2,\dots,n$.

Έτσι τώρα μπορούμε να διαμορφώσουμε το μαθηματικό μοντέλο ενός γενικού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Με το μοντέλο αυτό επιλέγουμε τις τιμές των $x_1, x_2, \dots, x_n$, έτσι ώστε:

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n,$$

με περιορισμούς

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq \beta_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq \beta_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq \beta_m$$

και

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Αυτή είναι η τυποποιημένη μορφή του γενικού προβλήματος του γραμμικού προγραμματισμού. Κάθε πρόβλημα του οποίου το μαθηματικό μοντέλο ταιριάζει με το παραπάνω μοντέλο είναι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Ορισμοί:

- Η συνάρτηση που θέλουμε να μεγιστοποιηθεί δηλαδή η $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$, ονομάζεται **αντικειμενική συνάρτηση** (objective function).
- Οι περιοριστικές σχέσεις (2) και (3) ονομάζονται περιορισμοί (constraints). Οι πρώτοι m περιορισμοί ονομάζονται **λειτουργικοί περιορισμοί** (functional constraints) και οι $x_j \geq 0$ **περιορισμοί μη αρνητικότητας** (non-negativity constraints).
- Οι μεταβλητές x_j ονομάζονται **μεταβλητές απόφασης** (decision variables), όπως είδαμε και πιο πάνω, ενώ οι σταθερές a_{ij} , β_i , και c_j είναι οι **παράμετροι** (parameters) του μοντέλου.

Παρατηρήσεις:

Στο σημείο αυτό πρέπει να προσθέσουμε ότι το πιο πάνω μοντέλο δεν είναι κατάλληλο για όλα τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, που μπορεί να έχουν μία ή περισσότερες από τις παρακάτω μορφές:

1. Ελαχιστοποίηση αντί για μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή

$$\min z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

2. Μερικοί λειτουργικοί περιορισμοί είναι ανισότητες της φοράς $\geq$,

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n \geq \beta_i, \text{ για μερικές τιμές του } i.$$

3. Μερικοί λειτουργικοί περιορισμοί είναι με μορφή ισότητας,

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n = \beta_i, \text{ για μερικές τιμές του } i.$$

4. Απάλειψη των περιορισμών μη αρνητικότητας για μερικές μεταβλητές, δηλαδή x_j απεριόριστες ως προς το πρόσημο για μερικές τιμές του j .

Παρακάτω θα δούμε ότι καθεμιά από τις τέσσερις πιο πάνω μορφές μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί με τρόπο που να προσαρμόζεται στο γνωστό μας μοντέλο. Αυτό σημαίνει ότι κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί με την τυποποιημένη μορφή του μοντέλου.

Ορισμοί:

Συνήθως με τον όρο ‘λύση’ εννοούμε την τελική απάντηση σ’ ένα πρόβλημα. Στο γραμμικό προγραμματισμό, όμως, καθώς και στις επεκτάσεις του, ο κανόνας είναι τελείως διαφορετικός. Εδώ, ως λύση, θα θεωρούμε κάθε προσδιορισμό τιμών για τις μεταβλητές απόφασης ($x_1, x_2, \dots, x_n$), άσχετα με το αν είναι μια επιθυμητή ή ακόμη και επιτρεπτή επιλογή. Ειδικότερα, θα εξετάσουμε τα παρακάτω είδη λύσεων.

- **Εφικτή λύση** (feasible solution) είναι η λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς. Ένα πρόβλημα είναι δυνατό να μην έχει εφικτές λύσεις. Στη γραφική αναπαράσταση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, όπως θα δούμε και παρακάτω, η περιοχή των εφικτών λύσεων ονομάζεται **εφικτή περιοχή**.

Όταν υπάρχουν εφικτές λύσεις, σκοπός του γραμμικού προγραμματισμού είναι η εύρεση της βέλτιστης, όπως μετριέται από την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του μοντέλου.

- **Βέλτιστη λύση** (optimal solution) είναι η εφικτή λύση, που δίνει την πιο επιθυμητή τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. ‘Πιο επιθυμητή τιμή’ θεωρείται η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή και εξαρτάται από το αν αντικειμενικός σκοπός είναι η μεγιστοποίηση ή η ελαχιστοποίηση. Έτσι μια βέλτιστη λύση μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση σε ολόκληρη την εφικτή περιοχή. Συνήθως ένα πρόβλημα έχει μια βέλτιστη λύση. Όμως είναι δυνατό να έχουμε πολλαπλές βέλτιστες λύσεις, τότε σ’ αυτή την περίπτωση το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού θα έχει άπειρες βέλτιστες λύσεις.
- Η τρίτη περίπτωση είναι όταν ένα πρόβλημα δεν έχει καμία βέλτιστη λύση. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν (α) δεν έχει καμία εφικτή λύση, ή (β) όταν οι περιορισμοί δεν εμποδίζουν την αύξηση/μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης προς την επιθυμητή κατεύθυνση.

3.3 Υποθέσεις Γραμμικού Προγραμματισμού

Όλες οι υποθέσεις του γραμμικού προγραμματισμού υπονοούνται στη διαμόρφωση του παραπάνω μοντέλου. Ωστόσο, είναι σκόπιμο να εξετάσουμε τις υποθέσεις αυτές προκειμένου να διαπιστώσουμε πόσο καλά ο γραμμικός προγραμματισμός εφαρμόζεται σε ένα οποιαδήποτε πρόβλημα.

Αναλογικότητα

Η αναλογικότητα (proportionality) αναφέρεται σε ξεχωριστές δραστηριότητες, που εξετάζονται ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Ας υποθέσουμε ότι από τις n δραστηριότητες μόνο μία υλοποιείται και ας την ονομάσουμε k , έτσι ώστε $x_j=0$ για $j=1,2,\dots,n$ και $j \neq k$. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση (α) το μέτρο αποτελεσματικότητας z είναι ίσο με $c_k x_k$, και (β) η χρησιμοποίηση κάθε πόρου i είναι ίση με $a_{ik} x_k$. Δηλαδή, αν ένα προϊόν απαιτεί 2 ώρες από τον πόρο i ($a_{ik}=2$) για να παραχθεί, τότε τα x_k προϊόντα απαιτούν $2x_k$ ώρες, εδίσης αν το κέρδος από την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος είναι 4 χ.μ., τότε το κέρδος από την παραγωγή x_k προϊόντων είναι $4 x_k$. Αυτό σημαίνει ότι δύο ποσότητες είναι ευθέως ανάλογες προς το επίπεδο της k δραστηριότητας. Ακόμη σημαίνει ότι δεν υπάρχουν αρχικές επιβαρύνσεις με την έναρξη της δραστηριότητας και ότι η αναλογικότητα ισχύει για όλα τα επίπεδα τιμών της δραστηριότητας.

Προσθετικότητα

Με την υπόθεση της αναλογικότητας δεν εξασφαλίζεται ότι η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί είναι γραμμικές εξισώσεις. Η προσθετικότητα (additivity) προϋποθέτει ότι δεν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δραστηριοτήτων. Για κάθε επίπεδο δραστηριοτήτων ($x_1, x_2, \dots, x_n$), η συνολική χρησιμοποίηση κάθε πόρου καθώς και συνολικό μέτρο αποτελεσματικότητας είναι ίσα με το άθροισμα των αντιστοίχων ποσοτήτων κάθε δραστηριότητας. Δηλαδή, αν μια μονάδα προϊόντος A απαιτεί 1 ώρα από τον πόρο i για να παραχθεί ενώ μια μονάδα προϊόντος B απαιτεί 2 ώρες από τον ίδιο πόρο για να παραχθεί, τότε το επίπεδο δραστηριοτήτων (x_A, x_B) απαιτεί $1 \cdot x_{iA} + 2 \cdot x_{iB}$ ώρες από τον πόρο i .

Διαιρετότητα

Μερικές φορές οι μεταβλητές απόφασης έχουν έννοια μόνο όταν παίρνουν ακέραιες τιμές. Η λύση όμως που παίρνουμε από τον γραμμικό προγραμματισμό συχνά έχει μη ακέραιες τιμές. Με την υπόθεση της διαιρετότητας (divisibility) οι μονάδες δραστηριότητας μπορούν να διαιρεθούν σε οποιοδήποτε κλασματικό επίπεδο, έτσι ώστε οι μη ακέραιες τιμές για τις μεταβλητές απόφασης να είναι επιτρεπτές.

Συχνά ο γραμμικός προγραμματισμός χρησιμοποιείται και όταν θέλουμε λύση με ακέραιες τιμές. Αν η λύση που βρίσκουμε έχει κλασματικές τιμές, τις στρογγυλεύουμε σε ακέραιες τιμές. Η διαδικασία όμως αυτή έχει ορισμένα μειονεκτήματα και για το λόγο αυτό είναι προτιμότερη η χρησιμοποίηση του ακεραίου προγραμματισμού (integer programming). Πρέπει να σημειωθεί ότι με το γραμμικό προγραμματισμό βρίσκουμε ακέραιες λύσεις σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων, όπως το πρόβλημα εκχώρησης, κ.ά.

Προσδιοριστικότητα

Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή όλες οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου, δηλαδή τα a_{ij} , b_i και c_j , είναι γνωστές σταθερές. Σε πραγματικά όμως προβλήματα, η υπόθεση αυτή μπορεί να μην ικανοποιείται. Οι παράμετροι του μοντέλου βασίζονται συχνά σε προβλέψεις μελλοντικών καταστάσεων, οι οποίες αναπόφευκτα έχουν κάποιο βαθμό αβεβαιότητας.

Για το λόγο αυτό είναι πολύ σημαντικό μετά την εύρεση της βέλτιστης λύσης να κάνουμε ανάλυση ευαισθησίας (sensitivity analysis) στις τιμές των παραμέτρων. Έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σχετικά ευαίσθητες παραμέτρους, δηλαδή εκείνες που δεν είναι δυνατόν να αλλάξουν πολύ χωρίς να μην αλλάξει η βέλτιστη λύση, και να προσπαθήσουμε να τις εκτιμήσουμε με ακρίβεια. Την ανάλυση ευαισθησίας θα την παρουσιάσουμε στην παράγραφο 3.7. Συχνά ο βαθμός αβεβαιότητας σε μερικές παραμέτρους είναι τόσο μεγάλος, ώστε να είναι αναγκαίο να τις θεωρήσουμε σαν τυχαίες μεταβλητές. Για την επίλυση των περιπτώσεων αυτών γίνεται χρήση των τεχνικών του στοχαστικού προγραμματισμού (stochastic programming).

3.4 Γραφική Επίλυση Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού

Πρόβλημα:

Ένα μικρό εργοστάσιο παράγει εσωτερικά και εξωτερικά χρώματα, για βαφές σπιτιών, για χονδρική πώληση. Δύο βασικά πρωτογενή υλικά A και B χρησιμοποιούνται για να κατασκευαστούν τα χρώματα. Η μέγιστη διαθέσιμη ποσότητα πρωτογενή υλικών είναι για το υλικό A 6 τόνοι ανά μέρα και για το υλικό B 8 τόνοι ανά μέρα. Οι ημερήσιες απαιτήσεις των δύο πρωτογενή υλικών ανά τόνο εσωτερικού ή εξωτερικού χρώματος συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

	Τόνοι πρωτογενή υλικών ανά τόνο χρώματος		Μέγιστη διαθέσιμη ποσότητα (τόνοι)
	Εξωτερικά χρώματα	Εσωτερικά χρώματα	
Υλικό A	1	2	6
Υλικό B	2	1	8

Μια έρευνα αγοράς έχει δείξει ότι η ημερήσια απαίτηση για εσωτερικά χρώματα δεν πρέπει να υπερβαίνει την απαίτηση για εξωτερικά χρώματα περισσότερο από ένα τόνο. Επίσης η έρευνα έδειξε ότι η μέγιστη απαίτηση για εσωτερικά χρώματα είναι το πολύ 2 τόνοι την ημέρα. Η τιμή χονδρικής πώλησης των χρωμάτων είναι 3 χρηματικές μονάδες (π.χ. χιλιάδες) για τα εξωτερικά χρώματα και 2 χρηματικές μονάδες για τα εσωτερικά χρώματα. Τι ποσότητες εσωτερικών και εξωτερικών χρωμάτων πρέπει να παράγει η εταιρεία ώστε να μεγιστοποιεί το ημερήσιο κέρδος της;

Το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος:

Έστω x_1 και x_2 οι μεταβλητές απόφασης, όπου x_1 οι τόνοι εξωτερικών χρωμάτων και x_2 οι τόνοι εσωτερικών χρωμάτων που παράγονται ανά μέρα. Τότε το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

με περιορισμούς

$$x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Γραφική επίλυση του προβλήματος:

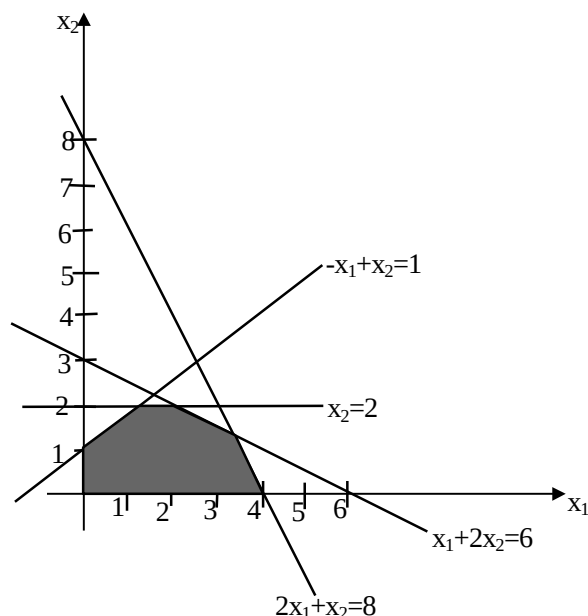
Το μικρό αυτό πρόβλημα έχει μόνο δύο μεταβλητές απόφασης και επομένως μόνο δύο διαστάσεις. Έτσι η γραφική διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυσή του. Για τη διαδικασία αυτή κατασκευάζουμε μια γραφική παράσταση με δύο άξονες x_1 και x_2 . Το πρώτο μας βήμα είναι η εύρεση των (x_1, x_2) , που επιτρέπονται από τους περιορισμούς. Αυτό γίνεται εφόσον σύρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα, που περικλείουν την περιοχή των επιτρεπτών τιμών. Στο χώρο των δύο διαστάσεων το σύνολο λύσεων που ορίζει μια ανισότητα $a_1x_1 + a_2x_2 \leq \beta_1$ είναι ένα κλειστό ημιεπίπεδο (closed half - plane), το οποίο είναι ένα κυρτό σύνολο και αποτελείται από τα σημεία (x_1, x_2) που βρίσκονται στην ευθεία που ορίζεται από την εξίσωση $a_1x_1 + a_2x_2 = \beta_1$ και στο χώρο κάτω από αυτή. Με άλλα λόγια η γεωμετρική

παράσταση της ανισότητας $a_1x_1 + a_2x_2 \leq \beta_1$ είναι ένα ημιεπίπεδο που φράσσεται από πάνω από την ευθεία που ορίζεται από την εξίσωση $a_1x_1 + a_2x_2 = \beta_1$. Προφανώς το σύνολο λύσεων που ορίζει μια ανισότητα της μορφής $a_1x_1 + a_2x_2 \geq \beta_1$ αποτελείται από τα σημεία (x_1, x_2) που βρίσκονται στην ευθεία και στο χώρο πάνω από αυτή που ορίζεται από την εξίσωση $a_1x_1 + a_2x_2 = \beta_1$. Το σύνολο των εφικτών λύσεων εκφράζεται με την τομή των κλειστών ημιεπιπέδων που ορίζονται από τις περιοριστικές ανισοεξισώσεις του προβλήματος και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας και είναι ένα κυρτό πολύγωνο.

Για το σύνολο των εφικτών λύσεων έχουμε να σημειώσουμε τα εξής:

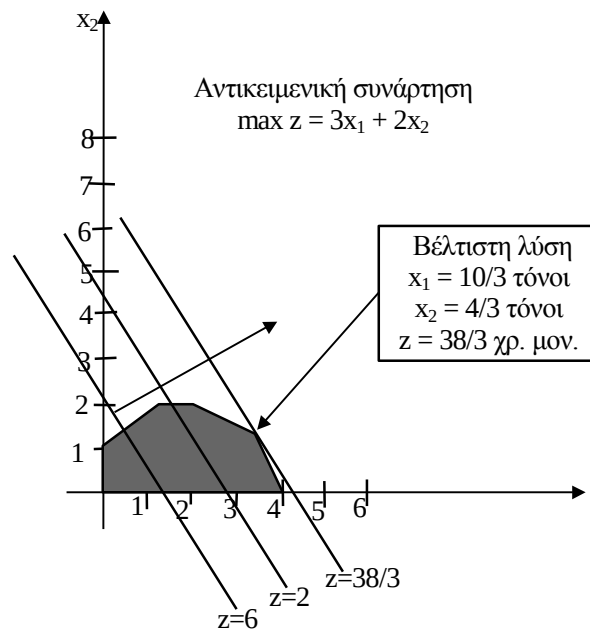
1. Το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι κυρτό ως τομή κυρτών συνόλων.
2. Κάθε βασική (εφικτή) λύση αντιστοιχεί σε ένα ακρότατο (κορυφή) αυτού του κυρτού συνόλου (πολυγώνου).
3. Υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός ακρότατων.
4. Εάν υπάρχει βέλτιστη λύση τότε υπάρχει τουλάχιστον μία βέλτιστη βασική (εφικτή) λύση. Δηλαδή τουλάχιστον ένα ακρότατο σημείο του συνόλου των εφικτών λύσεων είναι βέλτιστο.
5. Σε κάθε ακμή του κυρτού πολυγώνου αντιστοιχεί ένας περιορισμός έτσι ώστε στα σημεία ακμής ο περιορισμός ικανοποιείται ως ισότητα.
6. Σε κάθε εσωτερικό σημείο του κυρτού πολυγώνου όλοι οι περιορισμοί ικανοποιούνται ως ανισότητες.
7. Σε κάθε κορυφή ή ακρότατο του κυρτού πολυγώνου αντιστοιχεί μια εφικτή λύση στην οποία ικανοποιούνται ακριβώς δύο περιορισμοί (συμπεριλαμβανομένων και των περιορισμών μη αρνητικότητας) ως ισότητες. Στη γενική περίπτωση ισχύει ότι οι περιορισμοί που ικανοποιούνται ως ισότητες είναι τουλάχιστον δύο.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι λόγω των περιορισμών μη αρνητικότητας $x_1, x_2 \geq 0$, τα (x_1, x_2) βρίσκονται στο 1ο τεταρτημόριο. Ο περιορισμός $x_2 \leq 2$ σημαίνει ότι τα (x_1, x_2) δεν μπορεί να βρίσκονται πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα $x_2 = 2$ του σχήματος 3.1. Με τον ίδιο τρόπο τα ευθύγραμμα τμήματα $-x_1 + x_2 = 1$ και $x_1 + 2x_2 = 6$ μπορούν να προστεθούν για να φράξουν την επιτρεπτή περιοχή. Ο τελευταίος περιορισμός $2x_1 + x_2 \leq 8$ συμπληρώνει την περιοχή των επιτρεπτών τιμών. Τα σημεία για τα οποία ισχύει η ανισότητα $2x_1 + x_2 \leq 8$ βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $2x_1 + x_2 = 8$ ή αριστερά από αυτό. Αντίθετα, κάθε σημείο δεξιά από το ευθύγραμμο τμήμα $2x_1 + x_2 = 8$ παύει να ισχύει η ανισότητα. Η περιοχή όλων των επιτρεπτών τιμών των (x_1, x_2) είναι η σκιαγραφημένη περιοχή του σχήματος 3.1.



Σχήμα 3.1 Περιοχή επιτρεπτών τιμών των (x_1, x_2)

Το τελευταίο βήμα είναι η εύρεση του σημείου της περιοχής των επιτρεπτών τιμών που μεγιστοποιεί την $z = 3x_1 + 2x_2$. Το σημείο αυτό θα βρεθεί με τη διαδικασία της δοκιμής και του σφάλματος (trial and error). Ας δοκιμάσουμε π.χ. $z = 6 = 3x_1 + 2x_2$, για να δούμε αν υπάρχουν τιμές των (x_1, x_2) στην επιτρεπτή περιοχή, που δίνουν στο z τιμή ίση με 6. Σύροντας την ευθεία $3x_1 + 2x_2 = 6$, βλέπουμε στο σχήμα 3.2 ότι υπάρχουν πολλά σημεία της ευθείας που βρίσκονται μέσα στην επιτρεπτή περιοχή. Για το λόγο αυτό δοκιμάζουμε μια μεγαλύτερη τιμή του z , έστω π.χ. $z = 9 = 3x_1 + 2x_2$. Και στην περίπτωση αυτή ένα τμήμα της ευθείας $3x_1 + 2x_2 = 9$ βρίσκεται μέσα στην περιοχή των επιτρεπτών τιμών, που σημαίνει ότι η μέγιστη επιτρεπτή τιμή του z πρέπει να είναι τουλάχιστον 9. Παρατηρούμε ότι η ευθεία αυτή, που δίνει μεγαλύτερη τιμή στο z , βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων απ' ό,τι η προηγούμενη και ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες. Έτσι με τη διαδικασία της δοκιμής και του σφάλματος μπορούμε να σύρουμε μια οικογένεια παράλληλων ευθειών, που να έχουν τουλάχιστον ένα σημείο στη επιτρεπτή τιμή και να επιλέξουμε την ευθεία εκείνη της οποίας η απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι η μέγιστη δυνατή. Η ευθεία αυτή περνάει από το σημείο $(10/3, 4/3)$, και έτσι έχουμε $3x_1 + 2x_2 = 3(10/3) + 2(4/3) = 38/3 = z$. Επομένως η επιθυμητή λύση είναι $x_1 = 10/3$ και $x_2 = 4/3$, που σημαίνει ότι το μικρό εργοστάσιο παραγωγής χρωμάτων πρέπει να παράγει $10/3$ τόνους εξωτερικών χρωμάτων και $4/3$ τόνους εσωτερικών χρωμάτων έτσι ώστε να πετύχει το μέγιστο κέρδος που είναι $z = 38/3$. Σημειώνεται ότι, σύμφωνα με το μοντέλο, κανένας άλλος συνδυασμός ποσοτήτων από τα δύο είδη χρωμάτων δεν μπορεί να δώσει μεγαλύτερο κέρδος στο εργοστάσιο, απ' ό,τι αυτός που βρέθηκε με τη γραφική μέθοδο.



Σχήμα 3.2 Τιμές των (x_1, x_2) που μεγιστοποιούν την $3x_1 + 2x_2$

3.5 Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού γραφικά

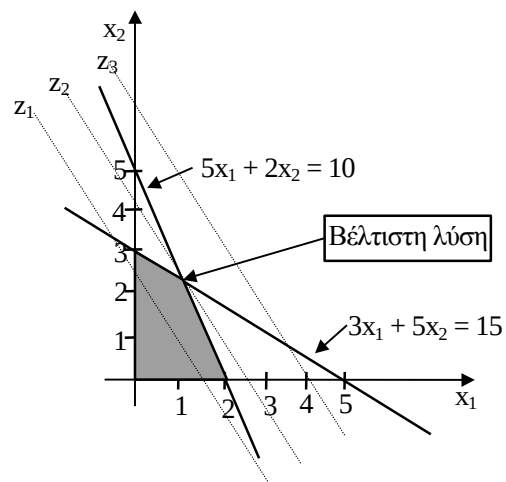
1. Μοναδική βέλτιστη λύση.

$$\max z = 5x_1 + 3x_2$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



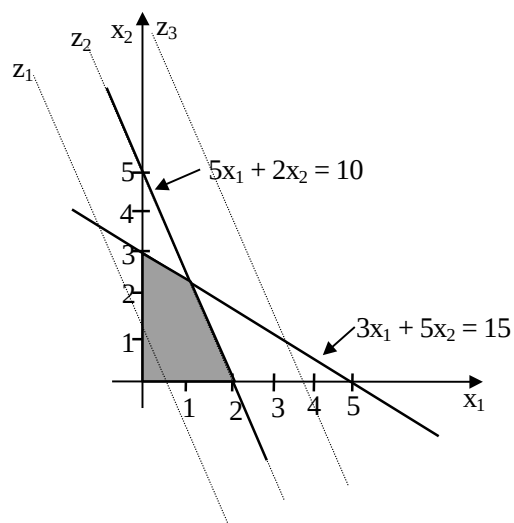
2. Άπειρες βέλτιστες λύσεις.

$$\max z = 2.5x_1 + x_2$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



3. Ελαχιστοποίηση αντικειμενικής συνάρτησης.

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

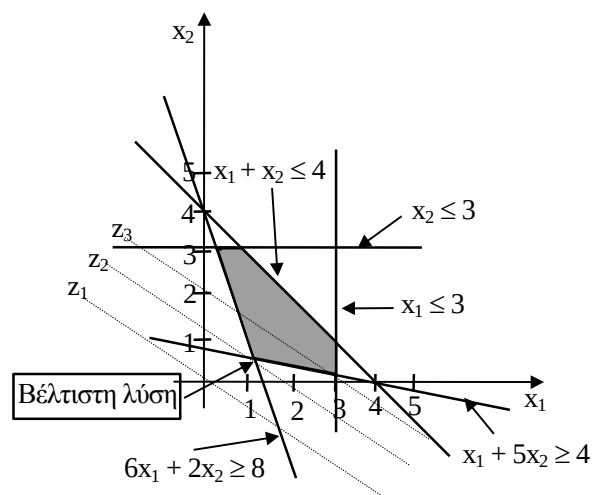
$$6x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 4$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



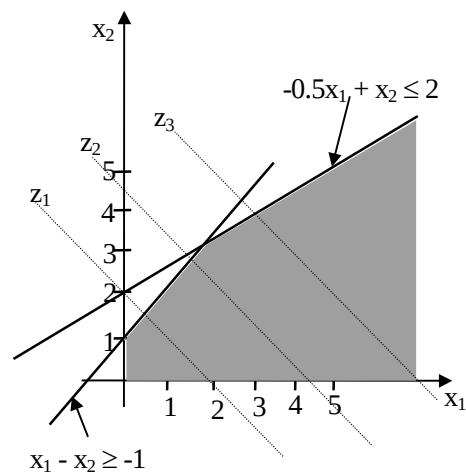
4. Μη φραγμένη λύση.

$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$

$$x_1 - x_2 \geq -1$$

$$-0.5x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



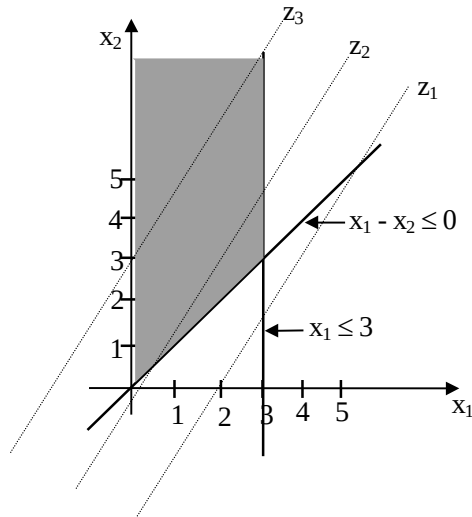
5. Μη φραγμένη περιοχή εφικτών λύσεων αλλά με μοναδική λύση.

$$\min z = -3x_1 + 2x_2$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



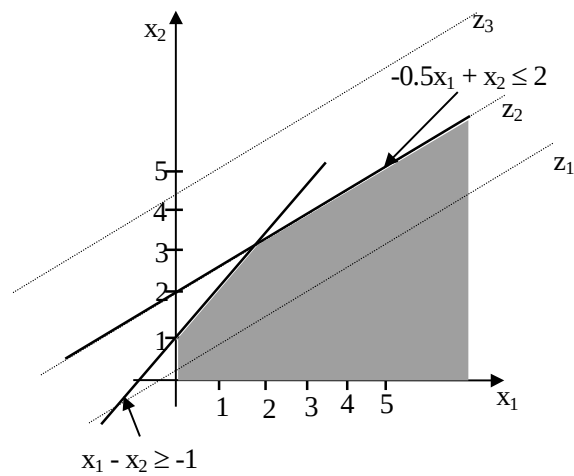
6. Μη φραγμένη περιοχή εφικτών λύσεων αλλά με άπειρες λύσεις.

$$\max z = 2x_2 - x_1$$

$$x_1 - x_2 \geq -1$$

$$-0.5x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



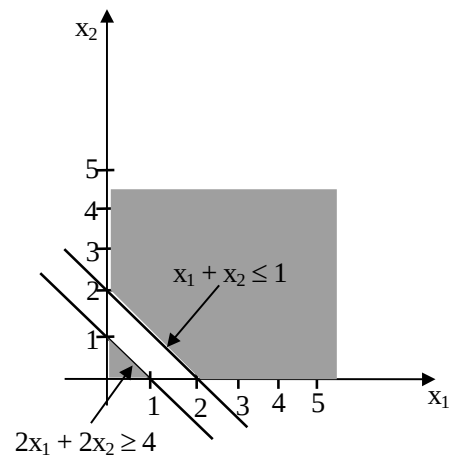
7. Μη ύπαρξη λύσης. Ασυμβίβαστοι περιορισμοί.

$$\max z = 3x_1 - 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



3.6 Η Μέθοδος Simplex.

Η μέθοδος Simplex για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού αναπτύχθηκε αρχικά από τον George B. Dantzig το 1947. Στη συνέχεια λόγω της τεράστιας σημασίας που έχει στην επίλυση πρακτικών και θεωρητικών προβλημάτων η μέθοδος αυτή τελειοποιήθηκε σε τέτοιο βαθμό έτσι ώστε σήμερα να επιλύονται προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού χιλιάδων μεταβλητών και περιορισμών.

Δηλαδή η Simplex είναι μια αποτελεσματική μέθοδος που χρησιμοποιείται για την επίλυση μεγάλων προβλημάτων στους σημερινούς ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Ειδικότερα, είναι ένας αλγόριθμος. Ως αλγόριθμο θεωρούμε κάθε επαναληπτική διαδικασία για την επίλυση ενός προβλήματος, δηλαδή αλγόριθμος είναι μια συστηματική διαδικασία που επαναλαμβάνεται μέχρι να βρεθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα. Κάθε φορά που επαναλαμβάνεται η διαδικασία ονομάζεται επανάληψη. Ο αλγόριθμος περιλαμβάνει κανόνες για να αρχίσει η διαδικασία και κριτήρια που προσδιορίζουν πότε θα τελειώσει.

Υπάρχουν διάφορες μορφές προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, όπως ο αντικειμενικός σκοπός να είναι η μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, τα δεξιά μέλη των περιορισμών να είναι αρνητικοί αριθμοί, κ.τ.λ. Όπως θα δούμε η μέθοδος Simplex μπορεί να επιλύει μια συγκεκριμένη μορφή προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, την οποία την ονομάζουμε τυποποιημένη μορφή. Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να μετατραπεί σε τυποποιημένη μορφή.

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε τυποποιημένη μορφή αναπαριστάται από το παρακάτω μαθηματικό μοντέλο:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

με περιορισμούς

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2$$

.....

$$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m$$

και

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

όπου

$$\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \dots, \beta_n \geq 0$$

ή υπό μορφή πινάκων ως εξής:

$$\max z = C^T X$$

με περιορισμούς

$$AX = B,$$

$$X \geq O$$

όπου

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$$

$$B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$$

$$O = (0)_{n \times 1}.$$

Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να μετατραπεί σε τυποποιημένη μορφή γιατί:

- Στην περίπτωση που έχουμε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με αντικειμενική συνάρτηση

$$w(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

μπορούμε να το λύσουμε ως πρόβλημα μεγιστοποίησης πολλαπλασιάζοντας κάθε συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης με -1. Αυτό γιατί η σχέση

$$\max z(x) = -w(x) = \sum_{j=1}^n -c_j x_j$$

δεν μεταβάλλει το σύνολο των άριστων λύσεων του προβλήματος και η σχέση

$$\min w(x) = -\max z(x) = -\max -w(x)$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε την ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του αρχικού μας προβλήματος. Έτσι χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι ένα τέτοιο πρόβλημα με ελαχιστοποίηση αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να μετατραπεί σε μια τυποποιημένη μορφή και άρα να λυθεί με τη μέθοδο Simplex.

- Στην περίπτωση που οι μεταβλητές απόφασης μπορούν να πάρουν αρνητικές ή θετικές τιμές, δηλαδή δεν περιορίζονται ως προς το πρόσημο μπορούν να αντικατασταθούν με τη διαφορά δύο άλλων μη αρνητικών μεταβλητών. Π.χ. αν η μεταβλητή x_j δεν περιορίζεται από το πρόσημο τότε αντικαθίσταται από την εξίσωση:

$$x_j = x_i - x_k$$

όπου

$$x_i, x_k \geq 0.$$

Με τον τρόπο αυτό είναι προφανές ότι ο αριθμός των μεταβλητών του προβλήματος αυξάνει με παράλληλα αύξηση του υπολογιστικού χρόνου που απαιτείται για την επίλυσή του.

Μια άλλη μέθοδος χειρισμού των μεταβλητών που δεν περιορίζονται ως προς το πρόσημο απαλείφει αυτές τις μεταβλητές από το πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα έστω x_k η μεταβλητή χωρίς περιορισμό στο πρόσημό της και ότι στον i περιορισμό που είναι ο

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k + \dots + a_{in}x_n = \beta_i$$

έχουμε $a_{ik} \neq 0$. Τότε ο περιορισμός γράφεται ισοδύναμα ως

$$x_k = (\beta_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n) / a_{ik}.$$

Επειδή δεν τίθενται άλλοι περιορισμοί στην x_k , όταν γίνουν γνωστές οι βέλτιστες τιμές των x_i , $i \neq k$ αντικαθιστώνται στην παραπάνω σχέση και παίρνουμε την τιμή της x_k . Έτσι, αντικαθιστούμε την x_k στις άλλες εξισώσεις και αποθηκεύουμε την παραπάνω σχέση κάπου χωριστά. Με αυτόν τον τρόπο το καινούργιο ισοδύναμο σύστημα είναι κατά μια εξίσωση και μια μεταβλητή μικρότερο.

- Στην περίπτωση που κάποιο δεξιό μέλος β_i ενός περιορισμού είναι αρνητικό τότε πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας ή εξίσωσης με -1 και το μετατρέπουμε σε θετικό. Προσοχή, αν έχουμε ανισότητα τότε αυτή αλλάζει φορά.

- Οι ανισότητες της μορφής

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \leq \beta_i$$

μετασχηματίζονται σε ισότητες της μορφής

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + S_i = \beta_i, \quad S_i \geq 0,$$

ενώ οι ανισότητες της μορφής

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \geq \beta_i$$

μετασχηματίζονται σε ισότητες της μορφής

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j - S_i = \beta_i, \quad S_i \geq 0.$$

Δηλαδή, κάθε ανισότητα μετατρέπεται σε ισότητα με την πρόσθεση μιας θετικής μεταβλητής αν πρόκειται για ανισότητα με φορά $\leq$ και με την αφαίρεση μια θετικής μεταβλητής αν πρόκειται για ανισότητα φοράς $\geq$. Αυτές οι θετικές μεταβλητές που προστίθενται ή αφαιρούνται από μια ανισότητα ονομάζονται βοηθητικές μεταβλητές. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι βοηθητικές μεταβλητές αποτελούν μέρος του προβλήματος όπως και οι μεταβλητές απόφασης με τις οποίες μορφοποιήθηκαν οι περιορισμοί του προβλήματος. Έτσι οι βοηθητικές μεταβλητές όχι μόνο παραμένουν κατά την επίλυση του προβλήματος αλλά και οι τιμές τους σε μια βέλτιστη εφικτή λύση παρέχουν σημαντικές πληροφορίες. Τέλος οι βοηθητικές μεταβλητές μπαίνουν στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστή 0.

Η μέθοδος Simplex όπως έχουμε ήδη πει είναι μια αλγοριθμική μέθοδος η οποία ξεκινά από ένα ακρότατο (βασική εφικτή λύση) και συστηματικά κινείται από βασική λύση (ακρότατο) σε βασική λύση (ακρότατο) μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη λύση.

Η παρουσίαση της μεθόδου Simplex θα γίνει με τη βοήθεια ενός παραδείγματος.

Έστω ότι έχουμε το ακόλουθο πρόγραμμα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

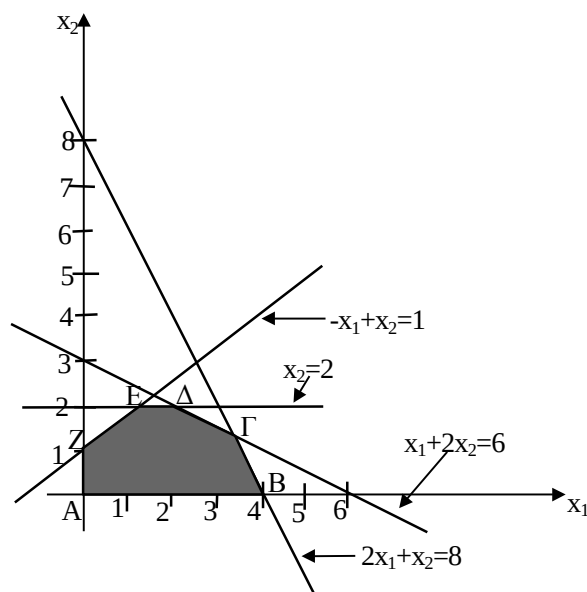
$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Το πρώτο μας βήμα στη διατύπωση της μεθόδου Simplex είναι η μετατροπή των ανισοτήτων των λειτουργικών περιορισμών σε ισότητες. Αυτό γίνεται με την εισαγωγή των βοηθητικών μεταβλητών S_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Με την εισαγωγή των βοηθητικών μεταβλητών στους λειτουργικούς περιορισμούς το αρχικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μετατρέπεται σε ένα πρόβλημα σε τυποποιημένη μορφή:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{με τους περιορισμούς} \\ x_1 + 2x_2 + S_1 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + S_2 &= 8 \\ -x_1 + x_2 + S_3 &= 1 \\ x_2 + S_4 &= 2 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Η γραφική λύση του προβλήματος δίνεται από το παρακάτω σχήμα



Κάθε σημείο στην περιοχή των εφικτών λύσεων (σκιαγραφημένη περιοχή) μπορεί να εκφραστεί μέσω των μεταβλητών $x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4$. Οι βοηθητικές μεταβλητές S_i είναι η απόσταση των αριστερών μελών των περιορισμών από τα δεξιά μέλη. Εάν $S_i = 0$ τότε η αντίστοιχη εξίσωση της τυποποιημένης μορφής περιορίζεται στα σημεία της περιοχής εφικτών λύσεων που αντιστοιχούν στο ευθύγραμμο τμήμα της τομής της με την περιοχή εφικτών λύσεων. Δηλαδή εάν $S_1 = 0$ τότε η εξίσωση $x_1 + 2x_2 = 6$ αντιστοιχεί στο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, ενώ αν $S_1 > 0$ τότε η εξίσωση μεταφέρεται προς το εσωτερικό της περιοχής των εφικτών λύσεων.

Για τα ακρότατα A, B, Γ, Δ, E, Z παρατηρούμε ότι:

Ακρότατο	Μηδενικές μεταβλητές	Μη μηδενικές μεταβλητές
A	x_1, x_2	S_1, S_2, S_3, S_4
B	S_2, x_2	S_1, x_1, S_3, S_4
Γ	S_2, S_1	x_2, x_1, S_3, S_4
Δ	S_4, S_1	x_2, x_1, S_3, S_2
E	S_4, S_3	x_2, x_1, S_1, S_2
Z	S_3, x_1	x_2, S_4, S_1, S_2

Σημειώσεις:

- Εσωτερικά σημεία της περιοχής εφικτών λύσεων δεν έχουν καμία μηδενική μεταβλητή ενώ σημεία του ορίου της περιοχής εφικτών λύσεων (εκτός των ακρότατων) έχουν μία μηδενική λύση. Άρα κάθε μη ακρότατο έχει το πολύ μια μηδενική μεταβλητή.
- Γειτονικά ακρότατα διαφέρουν μόνο κατά μία μεταβλητή. Π.χ. τα ακρότατα Α και Β που ορίζονται από τις μεταβλητές S_1, S_2, S_3, S_4 και S_1, x_1, S_3, S_4 αντίστοιχα έχουν τρεις ίδιες μεταβλητές S_1, S_3, S_4 και διαφέρουν μόνο στην τέταρτη.

Το νέο σύστημα των λειτουργικών περιορισμών έχει δύο μεταβλητές ($n - m = 6 - 4 = 2$) περισσότερες από τις εξισώσεις. Αυτό μας δίνει δύο βαθμούς ελευθερίας στην επίλυση του συστήματος, επειδή δύο οποιεσδήποτε μεταβλητές μπορούν να πάρουν κάποια αυθαίρετη τιμή, προκειμένου να λυθούν οι τέσσερις εξισώσεις ως προς τις τέσσερις υπόλοιπες μεταβλητές. Η μέθοδος Simplex ως αυθαίρετη τιμή χρησιμοποιεί το μηδέν. Οι $n-m$ μεταβλητές που παίρνουν τιμές ίσες με το μηδέν ονομάζονται μη βασικές μεταβλητές (nonbasic variables) και οι άλλες βασικές μεταβλητές (basic variables), ενώ η λύση που προκύπτει ονομάζεται βασική λύση (basic solution). Αν όλες οι βασικές μεταβλητές είναι μη αρνητικές, τότε έχουμε μια βασική εφικτή λύση (basic feasible solution). Σύμφωνα με τη θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού μια βέλτιστη λύση είναι μια βασική εφικτή λύση.

Η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί και αυτή όπως οι νέες εξισώσεις των περιορισμών και το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως:

$$\begin{aligned} & \max z \\ & \text{με τους περιορισμούς} \\ & z - 3x_1 - 5x_2 = 0 \\ & x_1 + 2x_2 + S_1 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + S_2 = 8 \\ & -x_1 + x_2 + S_3 = 1 \\ & x_2 + S_4 = 2 \\ & x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Η εξίσωση της αντικειμενικής εμφανίζεται σαν ένας από τους αρχικούς περιορισμούς, χωρίς φυσικά βοηθητική μεταβλητή. Με την ερμηνεία αυτή οι βασικές λύσεις δεν αλλάζουν, εκτός από τη z που θα θεωρείται ως μια επιπρόσθετη βασική μεταβλητή. Η μεταβλητή z θα παραμένει στην βασική λύση καθ' όλη τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος με τη μέθοδο Simplex.

Η βασική ιδέα της μεθόδου Simplex μπορεί τώρα να διατυπωθεί ως εξής: το σύστημα των εξισώσεων επιλύεται επαναληπτικά για μια σειρά βασικών εφικτών λύσεων, καθεμία από τις οποίες είναι καλύτερη από την προηγούμενή της, μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη λύση. Κάθε νέα βασική λύση διαφέρει από τη προηγούμενή της κατά μία μεταβλητή και προκύπτει με την αλλαγή μια μη βασικής μεταβλητής (εισερχόμενη μεταβλητή) σε βασική και με την αλλαγή μιας βασικής μεταβλητής (εξερχόμενη μεταβλητή) σε μη βασική μεταβλητή. Δύο τέτοιες βασικές εφικτές λύσεις, που διαφέρουν ως προς την εναλλαγή της βασικής και μη βασικής μεταβλητής, ονομάζονται γειτονικές.

Ας περιγράψουμε τώρα τα βήματα της μεθόδου Simplex

Βήμα 1

Κάνοντας χρήση της τυποποιημένης μορφής καθορίστε μια αρχική βασική εφικτή λύση, θέτοντας $n-m$ κατάλληλες (μη βασικές) μεταβλητές ίσες με μηδέν (αρχικά θέτουμε τις μεταβλητές απόφασης ίσες με μηδέν).

Βήμα 2

Επέλεξε την εισερχόμενη μεταβλητή μέσα από τις μη βασικές μεταβλητές με βάση το κριτήριο βελτίωσης της αντικειμενικής. Εάν υπάρχουν περισσότερες από μία βασικές μεταβλητές οι οποίες αυξάνουν την αντικειμενική, ως εισερχόμενη εκλέγεται αυτή με την μεγαλύτερη κατά μονάδα αύξηση. Εάν δεν μπορούμε να βρούμε εισερχόμενη μεταβλητή τότε η βασική λύση που έχουμε είναι και η βέλτιστη, ενώ αν υπάρχει εισερχόμενη μεταβλητή πάμε στο βήμα 3.

Βήμα 3

Επέλεξε την εξερχόμενη μεταβλητή από τις βασικές μεταβλητές με βάση το κριτήριο εφικτότητας. Για να είναι η καινούργια βασική λύση εφικτή, η εξερχόμενη μεταβλητή πρέπει να είναι εκείνη που πρώτη γίνεται 0 όταν η εισερχόμενη μεταβλητή παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο γειτονικό ακρότατο. Δηλαδή αυτή που έχει το μικρότερο πηλίκο του β_i του περιορισμού προς το αντίστοιχο θετικό συντελεστή της εισερχόμενης μεταβλητής.

Βήμα 4

Καθόρισε τις τιμές των νέων βασικών μεταβλητών κάνοντας την εισερχόμενη μεταβλητή βασική και την εξερχόμενη μη βασική. Πήγαινε στο βήμα 2.

Τώρα θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τα βήματα της μεθόδου Simplex στο παράδειγμα που μελετάμε.

Όταν λύνουμε ένα πρόβλημα όχι με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, αλλά με το χέρι, είναι σκόπιμο να χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες της μεθόδου Simplex. Αντί να γράφουμε τις εξισώσεις στην πλήρη μορφή τους χρησιμοποιούμε τους πίνακες που περιέχουν ουσιαστικά μόνο πληροφορίες, που είναι (α) οι συντελεστές των μεταβλητών, (β) οι σταθερές του δεξιού μέλους των εξισώσεων και (γ) η βασική μεταβλητή σε κάθε εξίσωση. Έτσι αποφεύγουμε να γράφουμε τα σύμβολα των μεταβλητών σε κάθε εξίσωση και ακόμη μας διευκολύνει στην εκτέλεση των υπολογισμών. Ο αρχικός πίνακας Simplex για το παράδειγμα μας είναι ο πιο κάτω:

	βασικές μεταβλητές	z	Εισερχόμενη μεταβλητή ↓		S_1	S_2	S_3	S_4	β
			x_1	x_2					
	S_1	0	1	2	1	0	0	0	6
Εξερχόμενη μεταβλητή ←	S_2	0	2	1	0	1	0	0	8
	S_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
	S_4	0	0	1	0	0	0	1	2
	z	1	-3	-2	0	0	0	0	0

↑
Στήλη pivot

↖ Pivot

↖ Σειρά pivot

↖ Γραμμή της αντικειμενικής

Επειδή κάθε εξίσωση περιέχει μόνο μία βασική μεταβλητή, που έχει συντελεστή +1, κάθε βασική μεταβλητή είναι ίση με τη σταθερά του δεξιού μέλους της εξίσωσής της. έτσι η αρχική βασική εφικτή λύση για το παράδειγμα είναι $(x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4) = (0, 0, 6, 8, 1, 2)$. Στην συνέχεια ελέγχουμε εάν η βασική εφικτή λύση που έχουμε βρει είναι και η βέλτιστη.

Η τρέχουσα βασική εφικτή λύση είναι βέλτιστη, αν και μόνο αν, κάθε συντελεστής της γραμμής της αντικειμενικής είναι μη αρνητικός (≥ 0). Οι βασικές μεταβλητές στην γραμμή της αντικειμενικής έχουν μηδενικούς συντελεστές και ο συντελεστής για κάθε μη βασική μεταβλητή μετράει το ρυθμό με τον οποίο η αντικειμενική συνάρτηση θα μειωθεί, αν η μεταβλητή αυτή από μηδέν αυξηθεί. Αν όλοι οι συντελεστές της γραμμής της αντικειμενικής είναι μη αρνητικοί τότε σταματάμε τη διαδικασία της μεθόδου Simplex και έχουμε βρει τη βέλτιστη λύση, διαφορετικά πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα της μεθόδου Simplex που είναι η εύρεση της εισερχόμενης μεταβλητής.

Ο προσδιορισμός της εισερχόμενης μεταβλητής γίνεται με βάση τους συντελεστές των μη βασικών μεταβλητών στην γραμμή της αντικειμενικής. Εκλέγουμε την μεταβλητή με τον πιο αρνητικό συντελεστή στην γραμμή της αντικειμενικής ως την εισερχόμενη μεταβλητή (αυτή είναι η μη βασική μεταβλητή που θα αυξήσει την αντικειμενική συνάρτηση με το μεγαλύτερο ρυθμό, εφόσον αυξηθεί από μηδέν που είναι). Η στήλη που αντιστοιχεί στην εισερχόμενη μεταβλητή ονομάζεται στήλη του ρivot. Για το παράδειγμά μας ο πιο αρνητικός συντελεστής στην γραμμή της αντικειμενικής είναι ο -3 της μεταβλητής x_1 και έτσι η x_1 θα είναι η εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή. Στη συνέχεια πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα της μεθόδου Simplex που είναι η εύρεση της εξερχόμενης μεταβλητής από τη βάση.

Ο προσδιορισμός της εξερχόμενης από τη βάση μεταβλητής γίνεται ως εξής: α) παίρνουμε κάθε συντελεστή της στήλης του ρivot που είναι θετικός (> 0), β) διαιρούμε με κάθε τέτοιο συντελεστή τη σταθερά του δεξιού μέλους της ίδιας σειράς, γ) βρίσκουμε την εξίσωση που έχει το μικρότερο πηλίκο και δ) επιλέγουμε τη βασική μεταβλητή της εξίσωσης ως την εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή. Η μεταβλητή αυτή είναι η πρώτη που μηδενίζεται με την αύξηση της εισερχόμενης βασικής μεταβλητής. Η σειρά που αντιστοιχεί στην εξερχόμενη μεταβλητή ονομάζεται σειρά του ρivot, ενώ το στοιχείο που είναι κοινό στην σειρά του ρivot και στη στήλη του ρivot ονομάζεται ρivot. Η εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή στο παράδειγμά μας είναι η S_2 .

Το επόμενο βήμα μας είναι να βρούμε τη νέα βασική εφικτή λύση κάνοντας ένα νέο πίνακα Simplex κάτω από τον προηγούμενο. Στο νέο πίνακα Simplex η εισερχόμενη μεταβλητή θα έχει γίνει βασική και η εξερχόμενη μη βασική. Αυτή η μετατροπή γίνεται με τη μέθοδο Gauss - Jordan. Για να πάμε από τον παλαιό πίνακα στον καινούργιο χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες:

1. Σειρά του ρivot του νέου πίνακα = $\frac{1}{\text{pivot}}$ (Σειρά του ρivot του παλαιού πίνακα).
2. $\left(\begin{matrix} \text{Σειρά } i \text{ του} \\ \text{νέου πίνακα} \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} \text{Σειρά } i \text{ του} \\ \text{παλαιού πίνακα} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \text{Στοιχείο } i \text{ της} \\ \text{στήλης του Pivot} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \text{Σειρά του ρivot} \\ \text{του νέου πίνακα} \end{matrix} \right).$

Χρησιμοποιώντας αυτούς του δύο κανόνες στον παλαιό πίνακα Simplex έχουμε:

$$\text{Σειρά του ρivot του νέου πίνακα} = \frac{1}{2} (0, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 8) = (0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 4)$$

$$\begin{aligned}
\text{Σειρά 1 του νέου πίνακα} &= (0, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 6) - 1(0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 4) = \\
&= (0, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 6) + (0, -1, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, -4) = \\
&= (0, 0, \frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0, 0, 2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Σειρά 3 του νέου πίνακα} &= (0, -1, 1, 0, 0, 1, 0, 1) - (-1)(0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 4) = \\
&= (0, -1, 1, 0, 0, 1, 0, 1) + (0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 4) = \\
&= (0, 0, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, 5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Σειρά 4 του νέου πίνακα} &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 2) - 0(0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 4) = \\
&= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Σειρά 5 του νέου πίνακα} &= (1, -3, -2, 0, 0, 0, 0, 0) - (-3)(0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 4) = \\
&= (1, -3, -2, 0, 0, 0, 0, 0) + (0, 3, \frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 12) = \\
&= (1, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 12)
\end{aligned}$$

Ο νέος πίνακας θα έχει την ακόλουθη μορφή:

	βασικές μεταβλητές	z	x ₁	x ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	β
←	S ₁	0	0	3/2	1	-1/2	0	0	2
	x ₁	0	1	1/2	0	1/2	0	0	4
	S ₃	0	0	3/2	0	1/2	1	0	5
	S ₄	0	0	1	0	0	0	1	2
	z	1	0	-1/2	0	3/2	0	0	12

Η νέα βασική εφικτή λύση είναι $(x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4) = (4, 0, 2, 0, 5, 2)$. Επειδή στην γραμμή της αντικειμενικής υπάρχει αρνητικός συντελεστής αυτή η βασική εφικτή λύση δεν είναι και η βέλτιστη. Η εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή είναι η x_2 ενώ η εξερχόμενη είναι η S_1 . Ο νέος πίνακας Simplex θα έχει την ακόλουθη μορφή:

	βασικές μεταβλητές	z	x ₁	x ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	β
	x ₂	0	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
	x ₁	0	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
	S ₃	0	0	0	0	-1	1	0	3
	S ₄	0	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3
	z	1	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3

Η νέα βασική εφικτή λύση είναι $(x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4) = (10/3, 4/3, 0, 0, 3, 2/3)$. Επειδή στην γραμμή της αντικειμενικής δεν υπάρχει αρνητικός συντελεστής αυτή η βασική εφικτή λύση θα είναι και η βέλτιστη.

Άρα η βέλτιστη εφικτή λύση του προβλήματος είναι:

$x_1 = 10/3, x_2 = 4/3, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 3, S_4 = 2/3$ και $z = 38/3$.

3.7 Παραδείγματα Μεθόδου Simplex

Παράδειγμα 1ο (Παράδειγμα 1ο - Κεφάλαιο 2ο - σελ. 10):

Το πρόβλημα εκφράζεται από το μαθηματικό μοντέλο:

$$\max z = 600x_T + 250x_K + 750x_\Gamma + 450x_B$$

με τους περιορισμούς

$$5x_T + x_K + 9x_\Gamma + 12x_B \leq 1500$$

$$2x_T + 3x_K + 4x_\Gamma + x_B \leq 1000$$

$$3x_T + 2x_K + 5x_\Gamma + 10x_B \leq 800$$

$$x_T, x_K, x_\Gamma, x_B \geq 0$$

Με την εισαγωγή των βοηθητικών μεταβλητών το πρόβλημα σε τυποποιημένη μορφή εκφράζεται ως εξής:

$$\max z = 600x_T + 250x_K + 750x_\Gamma + 450x_B + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

με τους περιορισμούς

$$5x_T + x_K + 9x_\Gamma + 12x_B + S_1 = 1500$$

$$2x_T + 3x_K + 4x_\Gamma + x_B + S_2 = 1000$$

$$3x_T + 2x_K + 5x_\Gamma + 10x_B + S_3 = 800$$

$$x_T, x_K, x_\Gamma, x_B, S_1, S_2, S_3, \geq 0$$

Πρώτος πίνακας Simplex:

βασικές μεταβλητές	z	x_T	x_K	x_Γ	x_B	S_1	S_2	S_3	β
S_1	0	5	1	9	12	1	0	0	1500
S_2	0	2	2	4	1	0	1	0	1000
S_3	0	3	2	5	10	0	0	1	800
z	1	-600	-250	-750	-450	0	0	0	0

Δεύτερος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x_T	x_K	x_Γ	x_B	S_1	S_2	S_3	β
S_1	0	-2/5	-13/5	0	-6	1	0	-9/5	60
S_2	0	-2/5	7/5	0	-7	0	1	-4/5	360
x_Γ	0	3/5	2/5	1	2	0	0	1/5	160
z	1	-150	50	0	1050	0	0	150	120000

Τρίτος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x_T	x_K	x_Γ	x_B	S_1	S_2	S_3	β
S_1	0	0	-35/15	2/3	-14/3	1	0	-5/3	500/3
S_2	0	0	25/15	2/3	-17/3	0	1	-10/15	1400/3
x_T	0	1	2/3	5/3	10/3	0	0	1/3	800/3
z	1	0	150	250	1550	0	0	200	160000

Η βέλτιστη εφικτή λύση του προβλήματος είναι:

$x_T = 800/3$, $x_B = 0$, $x_T = 0$, $x_B = 0$, $S_1 = 500/3$, $S_2 = 1400/3$, $S_3 = 0$ και $z = 160000$.

Οικονομική εξήγηση της λύσης του παραδείγματος.

Η βέλτιστη εφικτή λύση μας λέει ότι:

- $x_T = 800/3$, δηλαδή ότι πρέπει να παραχθούν $800/3$ τραπέζια (δεν περιοριζόμαστε σε ακέραιες λύσεις - υπόθεση διαιρετότητας).
- $S_1 = 500/3$, δηλαδή $500/3$ μονάδες μαλακού ξύλου δεν χρησιμοποιήθηκαν.
- $S_2 = 1400/3$, δηλαδή $1400/3$ μονάδες σκληρού ξύλου δεν χρησιμοποιήθηκαν.
- $z = 160000$, δηλαδή το κέρδος από τη πώληση $800/3$ τραπεζιών είναι 160000 χρηματικές μονάδες.
- $x_K, x_T, x_B, S_3 = 0$, δηλαδή δεν πρέπει να παράγουμε καρέκλες, γραφεία ή βιβλιοθήκες και η βέλτιστη λύση κάνει χρήση όλων των διαθέσιμων ανθρωποωρών.
- Οι συντελεστές στην αντικειμενική δηλώνουν το ρυθμό με τον οποίο θα μειωθεί η αντικειμενική αν μια μονάδα από την αντίστοιχη μεταβλητή παραχθεί, δηλαδή το 150 που αντιστοιχεί στο x_K σημαίνει ότι αν παράγουμε μία καρέκλα η αντικειμενική θα μειωθεί κατά 150 χρηματικές μονάδες.

Παράδειγμα 2ο:

Μια ασφαλιστική εταιρεία διαθέτει ένα κεφάλαιο 100000 χρηματικών μονάδων το οποίο μπορεί να επενδύσει με δύο διαφορετικούς τρόπους: την επένδυση τύπου X και την επένδυση τύπου Y . Η επένδυση τύπου X δίνει ετήσιο εισόδημα (τόκοι) 10% ενώ η επένδυση τύπου Y δίνει ετήσιο εισόδημα 15% . Η εκλογή της εταιρείας περιορίζεται από την κυβέρνηση που επιβάλλει να επενδυθεί τουλάχιστον το 25% του κεφαλαίου στην επένδυση τύπου X . Επίσης η πολιτική της εταιρείας είναι ότι η αναλογία του κεφαλαίου που επενδύεται στην επένδυση τύπου Y προς το κεφάλαιο που επενδύεται στην επένδυση τύπου X δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη του $1.5:1$. Πως πρέπει η εταιρεία να επενδύσει το κεφάλαιό της. Διατυπώστε το πρόβλημα σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και να ευρεθεί η λύση με τη χρήση της μεθόδου Simplex.

Λύση:

Μεταβλητές απόφασης είναι οι x_1 και x_2 που είναι τα κεφάλαια σε χρηματικές μονάδες που θα επενδύσει η εταιρεία στην επένδυση τύπου X και στην επένδυση τύπου Y αντίστοιχα.

Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος είναι:

$$\max z = 0.1x_1 + 0.15x_2$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 + x_2 \leq 100000$$

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2} \geq 0.25 \Rightarrow -0.75x_1 + 0.25x_2 \leq 0$$

$$\frac{x_2}{x_1} \leq 1.5 \Rightarrow -1.5x_1 + x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Το πρόβλημα με την είσοδο των βοηθητικών μεταβλητών S_1, S_2, S_3 σε τυποποιημένη μορφή εκφράζεται ως εξής:

$$\max z = 0.1x_1 + 0.15x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 + x_2 + S_1 = 100000$$

$$-0.75x_1 + 0.25x_2 + S_2 = 0$$

$$-1.5x_1 + x_2 + S_3 = 0$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Πρώτος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	β
S_1	0	1	1	1	0	0	100000
S_2	0	-3/4	1/4	0	1	0	0
S_3	0	-3/2	1	0	0	1	0
z	1	-2/20	-3/20	0	0	0	0

Δεύτερος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	β
S_1	0	4	0	1	-4	0	100000
x_2	0	-3	1	0	4	0	0
S_3	0	3/2	0	0	-4	1	0
z	1	-11/20	0	0	3/5	0	0

Τρίτος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	β
S_1	0	0	0	1	20/3	-8/3	100000
x_2	0	0	1	0	-4	2	0
x_1	0	1	0	0	-8/3	2/3	0
z	1	0	0	0	-52/60	22/60	0

Τέταρτος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	β
S_2	0	0	0	3/20	1	-2/5	15000
x_2	0	0	1	3/5	0	2/5	60000
x_1	0	1	0	2/5	0	-2/5	40000
z	1	0	0	13/100	0	1/50	13000

Η βέλτιστη εφικτή λύση του προβλήματος είναι:

$$x_1 = 40000, x_2 = 60000, S_1 = 0, S_2 = 15000, S_3 = 0 \text{ και } z = 160000.$$

Δηλαδή η εταιρεία πρέπει να επενδύσει 40000 χρηματικές μονάδες στην επένδυση τύπου X και 60000 χρηματικές μονάδες στην επένδυση τύπου Y για να πετύχει το μέγιστο ετήσιο εισόδημά της που είναι 13000 χρηματικές μονάδες.

Παράδειγμα 3ο:

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex:

$$\max z = 5x_1 - 4x_2$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 24$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Λύση:

Πρώτα μετατρέπουμε το πρόβλημα σε τυποποιημένη μορφή εισάγοντας τις βοηθητικές μεταβλητές S_1, S_2, S_3 , οπότε γίνεται:

$$\max z = 5x_1 - 4x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 - x_2 + S_1 = 6$$

$$3x_1 - 2x_2 + S_2 = 24$$

$$-2x_1 + 3x_2 + S_3 = 9$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Πρώτος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	β
S_1	0	1	-1	1	0	0	6
S_2	0	3	-2	0	1	0	24
S_3	0	-2	3	0	0	0	9
z	1	-5	4	0	0	1	0

Δεύτερος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	β
x_1	0	1	-1	1	0	0	6
S_2	0	0	1	-3	1	0	6
S_3	0	0	1	2	0	0	21
z	1	0	-1	5	0	1	30

Τρίτος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x ₁	x ₂	S ₁	S ₂	S ₃	β
x ₁	0	1	0	-2	1	0	12
x ₂	0	0	1	-3	1	0	6
S ₃	0	0	0	5	-1	0	15
z	1	0	0	2	1	1	36

Η βέλτιστη εφικτή λύση του προβλήματος είναι:

$x_1 = 12$, $x_2 = 6$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 15$ και $z = 36$.

Παράδειγμα 4ο:

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex:

$$\max z = 48x_1 + 60x_2$$

με τους περιορισμούς

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$4x_1 + x_2 \leq 80$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Λύση:

Πρώτα μετατρέπουμε το πρόβλημα σε τυποποιημένη μορφή εισάγοντας τις βοηθητικές μεταβλητές S_1 , S_2 , S_3 , οπότε γίνεται:

$$\max z = 48x_1 + 60x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

με τους περιορισμούς

$$4x_1 + 3x_2 + S_1 = 120$$

$$4x_1 + x_2 + S_2 = 80$$

$$2x_1 + 4x_2 + S_3 = 120$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Πρώτος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x ₁	x ₂	S ₁	S ₂	S ₃	β
S ₁	0	4	3	1	0	0	120
S ₂	0	4	1	0	1	0	80
S ₃	0	2	4	0	0	1	120
z	1	-48	-60	0	0	0	0

Δεύτερος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x ₁	x ₂	S ₁	S ₂	S ₃	β
S ₁	0	5/2	0	1	0	-3/4	30
S ₂	0	7/2	0	0	1	-1/4	50
x ₂	0	1/2	1	0	0	1/4	30
z	1	-18	0	0	0	15	1800

Τρίτος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x ₁	x ₂	S ₁	S ₂	S ₃	β
x ₁	0	1	0	2/5	0	-3/10	12
S ₂	0	0	0	-7/5	1	8/10	8
x ₂	0	0	1	-1/5	0	4/10	24
z	1	0	0	36/5	0	48/5	2016

Η βέλτιστη εφικτή λύση του προβλήματος είναι:

$x_1 = 12$, $x_2 = 24$, $S_1 = 0$, $S_2 = 8$, $S_3 = 0$ και $z = 2016$.

3.8 Ειδικές Περιπτώσεις

Ισοβαθμία στην Εισερχόμενη Μεταβλητή

Ως εισερχόμενη βασική μεταβλητή επιλέγεται η μη βασική μεταβλητή με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή αρνητικού συντελεστή στην γραμμή της αντικειμενικής. Ας υποθέσουμε ότι δύο ή περισσότερες μη βασικές μεταβλητές έχουν την ίδια μεγαλύτερη απόλυτη τιμή στους αρνητικούς συντελεστές τους. Για παράδειγμα αυτό θα γινόταν στο παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 3x_1 + 3x_2$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

όπου στο πρώτο πίνακα Simplex στην γραμμή της αντικειμενικής θα υπήρχαν δύο αρνητικοί συντελεστές (-3) με την ίδια μεγαλύτερη απόλυτη τιμή που αντιστοιχούν στις δύο μεταβλητές x_1 και x_2 . Στην περίπτωση αυτή η επιλογή μεταξύ των υποψηφίων για εισαγωγή στη βάση μεταβλητών γίνεται αυθαίρετα. Η βέλτιστη λύση θα βρεθεί τελικά, άσχετα από τη μεταβλητή που επιλέγεται και δεν υπάρχει κατάλληλη μέθοδος που να προβλέπει ποια επιλογή θα οδηγήσει στην άριστη λύση γρηγορότερα. Στο παράδειγμά μας η μέθοδος Simplex θα φτάσει στην βέλτιστη λύση σε τρεις επαναλήψεις αν επιλεχτεί ως εισερχόμενη μεταβλητή η x_1 , ενώ αν επιλεχτεί η x_2 σε δύο επαναλήψεις.

Εκφυλισμένη Βέλτιστη Λύση

Ας υποθέσουμε τώρα ότι σε δύο ή περισσότερες βασικές μεταβλητές αντιστοιχεί το ίδιο μικρότερο πηλίκο, που σημαίνει ότι οποιαδήποτε από τις μεταβλητές αυτές μπορεί να είναι η εξερχόμενη βασική μεταβλητή. Δημιουργείται το ερώτημα αν έχει σημασία ποια από τις μεταβλητές θα επιλεχτεί. Θεωρητικά έχει μεγάλη σημασία σε αντίθεση με την επιλογή της εισερχόμενης μεταβλητής που είδαμε πριν για τους παρακάτω λόγους: Πρώτον, όλες οι βασικές μεταβλητές που ισοβαθμούν για εξερχόμενες φτάνουν στο μηδέν ταυτόχρονα καθώς η εισερχόμενη μεταβλητή αυξάνεται. Έτσι εκείνες που δεν θα επιλεγούν να είναι η εξερχόμενη μεταβλητή θα έχουν τιμή μηδέν στη νέα βασική εφικτή λύση. Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται εκφυλισμένες βασικές μεταβλητές και η νέα λύση εκφυλισμένη. Αυτός ο εκφυλισμός της λύσης μας δηλώνει ότι ένας (ή περισσότεροι) περιορισμός είναι πλεονάζων. Δεύτερον, αν μια από τις εκφυλισμένες μεταβλητές διατηρήσει την τιμή μηδέν μέχρι να επιλεχτεί ως εξερχόμενη μεταβλητή τότε η τιμή του z δεν αλλάζει. Για να μελετήσουμε καλύτερα την περίπτωση της εκφυλισμένης βέλτιστης λύσης ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 3x_1 + 9x_2$$

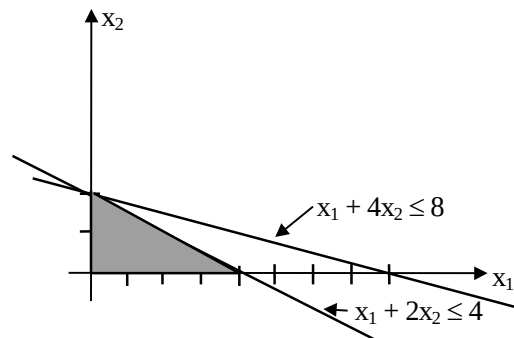
με τους περιορισμούς

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Στη γραφική λύση του προβλήματος βλέπουμε ότι ένας περιορισμός, ο πρώτος είναι πλεονάζων αφού η περιοχή εφικτών λύσεων ορίζεται από τον δεύτερο περιορισμό και τους δύο άξονες.



Μετατρέπουμε το πρόβλημα σε τυποποιημένη μορφή εισάγοντας τις βοηθητικές μεταβλητές S_1 και S_2 :

$$\max z = 3x_1 + 9x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 + 4x_2 + S_1 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 + S_2 = 4$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0.$$

Πρώτος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b
S_1	0	1	4	1	0	8
S_2	0	1	2	0	1	4
z	1	-3	-9	0	0	0

Δεύτερος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b
x_2	0	1/4	1	1/4	0	2
S_2	0	1/2	0	-1/2	1	0
z	1	-3/4	0	9/4	0	18

Εδώ παρατηρούμε ότι μια βασική μεταβλητή (S_2) έχει τιμή 0. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας πλεονάζων περιορισμός. Μια τέτοια βασική εφικτή λύση η οποία έχει τουλάχιστον μία βασική μεταβλητή ίση με μηδέν λέγεται εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση.

Τρίτος πίνακας Simplex

βασικές μεταβλητές	z	x ₁	x ₂	S ₁	S ₂	b
x ₂	0	0	1	1/2	-1/2	2
x ₁	0	1	0	-1	2	0
z	1	0	0	3/2	3/2	18

Αρα έχουμε εκφυλισμένη βέλτιστη λύση την :

$$x_1=0, x_2=2, S_1=0, S_2=0 \text{ και } z = 18.$$

Αν η τιμή του z παραμένει ίδια, αντί να αυξάνεται σε κάθε επανάληψη, η μέθοδος Simplex μπορεί να περιπέσει σε βρόχο, δηλαδή να επαναλαμβάνει περιοδικά την ίδια αλληλουχία λύσεων και να μην αυξάνεται το z για την εύρεση της άριστης λύσης. Αυτό είναι γνωστό ως το φαινόμενο της ανακύκλωσης (cycling ή circling) και μας πληροφορεί ότι υπάρχουν πλεονάζοντες περιορισμοί. Σ' αυτή την περίπτωση είναι δυνατόν να σταματήσει κάποιος πριν τη τελική βέλτιστη λύση, επειδή το z και η λύση συνήθως δεν αλλάζουν.

Εναλλακτικές Βέλτιστες Λύσεις

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να έχει περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις. Αυτό συμβαίνει όταν η αντικειμενική είναι παράλληλη σε κάποιο περιορισμό. Σύμφωνα με την θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού κάθε τέτοιο πρόβλημα έχει τουλάχιστον δύο βέλτιστες λύσεις και οι λύσεις αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βρεθεί κάθε άλλη βέλτιστη λύση. Όταν ένα πρόβλημα έχει περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις, τουλάχιστον μία από τις μη βασικές μεταβλητές έχει συντελεστή μηδέν στη γραμμή της αντικειμενικής, έτσι μπαίνοντας αυτή η μεταβλητή στη βάση δεν αλλάζει η τιμή του z. Οι άλλες βέλτιστες λύσεις μπορούν να βρεθούν κάνοντας επιπρόσθετες επαναλήψεις της μεθόδου Simplex, κάθε φορά επιλέγοντας σαν εισερχόμενη βασική μεταβλητή μία μη βασική μεταβλητή με συντελεστή μηδέν στην γραμμή της αντικειμενικής.

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z=2x_1+4x_2$$

με τους περιορισμούς

$$x_1+2x_2 \leq 5$$

$$x_1+x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Πρώτα μετατρέπουμε το πρόβλημα σε τυποποιημένη μορφή, οπότε γίνεται :

$$\max z=2x_1+4x_2$$

με τους περιορισμούς

$$x_1+2x_2+S_1=5$$

$$x_1+x_2+S_2=4$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0.$$

Πρώτος πίνακας Simplex:

βασικές μεταβλητές	z	x_1	x_2	S_1	S_2	β
S_1	0	1	2	1	0	5
S_2	0	1	1	0	1	4
z	1	-2	-4	0	0	0

Δεύτερος πίνακας Simplex:

βασικές μεταβλητές	z	x_1	x_2	S_1	S_2	β
x_2	0	1/2	1	1/2	0	5/2
S_2	0	1/2	0	-1/2	1	3/2
z	1	0	0	2	0	10

Άρα η βέλτιστη λύση είναι: $z=10$, $x_1=0$, $x_2=5/2$, $S_1=0$ και $S_2=3/2$. Εδώ όμως παρατηρούμε ότι η μεταβλητή x_1 έχει συντελεστή μηδέν στην γραμμή της αντικειμενικής, άρα μπορεί να εισαχθεί στη βάση χωρίς να αλλάζει η τιμή του z , και επομένως να έχουμε μια δεύτερη βέλτιστη λύση.

Τρίτος πίνακας Simplex:

βασικές μεταβλητές	z	x_1	x_2	S_1	S_2	β
x_2	0	0	1	1	-1	1
x_1	0	1	0	-1	2	3
z	1	0	0	2	0	10

Άρα έχουμε μια δεύτερη βέλτιστη λύση την : $z=10$, $x_1=3$, $x_2=1$, $S_1=0$, $S_2=0$.

Παρατηρούμε στον τελευταίο πίνακα ότι η μη βασική μεταβλητή S_2 έχει συντελεστή μηδέν στη γραμμή της αντικειμενικής. Αυτό είναι αναπόφευκτο αφού η εισερχόμενη βασική μεταβλητή έχει συντελεστή μηδέν στην γραμμή της αντικειμενικής και άρα η γραμμή της αντικειμενικής παραμένει ίδια και έτσι κάθε εξερχόμενη μεταβλητή διατηρεί τον συντελεστή μηδέν στην γραμμή της αντικειμενικής.

Η βέλτιστη λύση μας θα είναι ένας κυρτός γραμμικός συνδυασμός των δύο πιο πάνω λύσεων. Δηλαδή εάν $u=(x_1, x_2)$ η πρώτη βέλτιστη λύση, δηλ. $u=(0, 5/2)$ και $v=(x_1', x_2')$ η δεύτερη βέλτιστη λύση, δηλ. $v=(3, 1)$, τότε η βέλτιστη λύση θα είναι της μορφής: $\lambda u + (1-\lambda)v$ με $\lambda \in [0, 1]$ δηλαδή για $\lambda=0$ η βέλτιστη λύση είναι η v ενώ για $\lambda=1$ η βέλτιστη λύση είναι η u .

Μη Φραγμένη Λύση

Σε μερικά προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού οι τιμές των μεταβλητών μπορούν να αυξάνονται χωρίς να παραβιάζουν τους περιορισμούς, τότε η περιοχή εφικτών λύσεων δεν είναι φραγμένη.

Έστω το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 - x_2 \leq 10$$

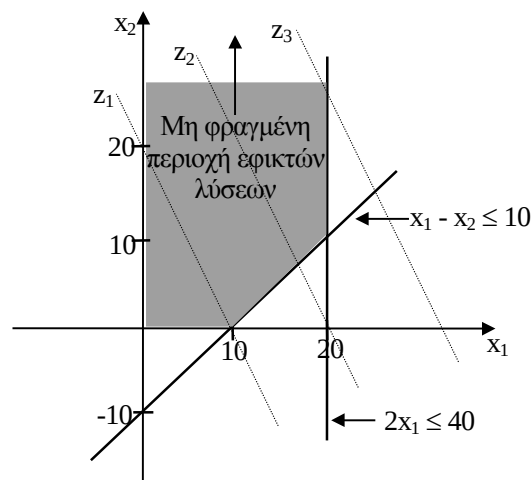
$$2x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Πρώτος πίνακας Simplex:

βασικές μεταβλητές	z	x_1	x_2	S_1	S_2	β
S_1	0	1	-1	1	0	10
S_2	0	2	0	0	1	40
z	1	-2	-1	0	0	0

Στον πρώτο πίνακα Simplex βλέπουμε ότι οι συντελεστές στους περιορισμούς της μεταβλητής x_2 είναι αρνητικοί ή μηδέν αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητή x_2 μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα χωρίς να παραβιάζει τους περιορισμούς. Αφού για κάθε μονάδα που αυξάνει η x_2 το z αυξάνει κατά 1, τότε μια άπειρη αύξηση της x_2 προκαλεί μια απεριόριστη αύξηση του z . Έτσι χωρίς επιπλέον περιορισμούς συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημά μας δεν έχει φραγμένη λύση. Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να το δει κανείς στο παρακάτω σχήμα, όπου η περιοχή των εφικτών λύσεων είναι μη φραγμένη προς τη κατεύθυνση της x_2 και η τιμή του z μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα.

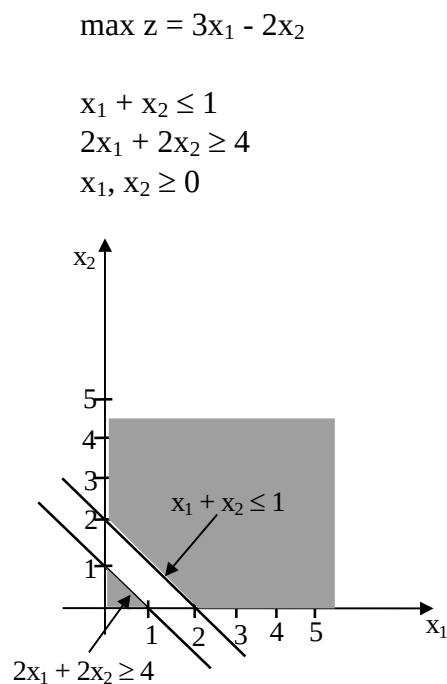


Γενικά εάν σε κάποιο πίνακα Simplex οι συντελεστές στους περιορισμούς μια μη βασικής μεταβλητής είναι μη θετικοί (≤ 0), τότε η περιοχή των εφικτών λύσεων είναι μη φραγμένη προς την κατεύθυνση της μεταβλητής. Επιπλέον, εάν ο αντίστοιχος συντελεστής στη γραμμή της αντικειμενικής είναι αρνητικός στην περίπτωση της μεγιστοποίησης ή θετικός στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης τότε και το z είναι μη φραγμένο.

Μη Εφικτή Λύση

Εάν σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού όλοι οι περιορισμοί δεν ικανοποιούνται ταυτόχρονα τότε το πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση και άρα λύση. Αυτό δεν συμβαίνει όταν όλοι οι περιορισμοί είναι $\leq$ αφού οι βοηθητικές μεταβλητές πάντα ορίζουν μια εφικτή λύση. Στις άλλες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τεχνητές μεταβλητές για να εξασφαλίσουμε μια εφικτή λύση για το αρχικό μας πρόβλημα. Αλλά και σε αυτές τις περιπτώσεις για να υπάρχει εφικτή λύση πρέπει οι τεχνητές μεταβλητές να μπορούν να γίνουν μηδέν. Έτσι εάν μια τουλάχιστον τεχνητή μεταβλητή δεν γίνεται μηδέν τότε δεν έχουμε εφικτή λύση και άρα λύση.

Ένα παράδειγμα προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού που δεν έχει εφικτή λύση είναι το παρακάτω:



3.9 Μέθοδος των δύο φάσεων

Μέχρι τώρα παρουσιάσαμε τη μέθοδο Simplex με την υπόθεση ότι το πρόβλημα είναι στην τυποποιημένη μορφή. Σ' αυτήν την παράγραφο θα αναπτύξουμε προσαρμογές που χρειάζονται να γίνουν για άλλες μορφές του μοντέλου του γραμμικού προγραμματισμού. Οι προσαρμογές γίνονται στο αρχικό βήμα και έτσι η μέθοδος Simplex εφαρμόζεται κανονικά από εκεί και πέρα, όπως ακριβώς έχει παρουσιασθεί σε προηγούμενες παραγράφους.

Το μόνο πρόβλημα που βάζουν οι άλλες μορφές των λειτουργικών περιορισμών ($=, \geq$, ή $\beta_i \leq 0$) είναι η εύρεση μιας αρχικής βασικής εφικτής λύσης. Στην περίπτωση που οι λειτουργικοί περιορισμοί είναι $\leq$ και τα $\beta_i \geq 0$, η αρχική λύση βρίσκεται αρκετά εύκολα θεωρώντας τις βοηθητικές μεταβλητές ως τις αρχικές βασικές μεταβλητές. Η συνηθισμένη προσέγγιση για την εύρεση μιας αρχικής βασικής εφικτής λύσης, όταν αυτή δεν είναι προφανής, είναι η χρησιμοποίηση των τεχνητών μεταβλητών (artificial variables). Με την τεχνική αυτή κατασκευάζουμε ένα πιο κατάλληλο αναθεωρημένο πρόβλημα εισάγοντας σε κάθε περιορισμό που χρειάζεται μια τεχνητή μεταβλητή, προκειμένου να είναι η αρχική βασική μεταβλητή της εξίσωσης. Οι περιορισμοί της μη αρνητικότητας μπαίνουν και σε αυτές τις μεταβλητές.

Έστω ότι έχουμε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε τυποποιημένη μορφή με n μεταβλητές και m εξισώσεις, αλλά χωρίς αρχική βασική εφικτή λύση. Πιο συγκεκριμένα έστω ότι χρειάζονται m τεχνητές μεταβλητές για να δημιουργήσουμε μια αρχική βασική εφικτή λύση. Τότε το αρχικό σύστημα των περιορισμών:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \beta_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (\alpha)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

με την προσθήκη των m τεχνητών μεταβλητών $R_i, i = 1, \dots, m$ γράφεται ως:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + R_i = \beta_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (\beta)$$

$$x_j \geq 0, R_i \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m.$$

Το σύστημα των εξισώσεων (β) που ονομάζονται και περιορισμοί της φάσης I δεν είναι προφανώς ισοδύναμο με το σύστημα (α), Στην πρώτη φάση εφαρμόζουμε τη μέθοδο Simplex για να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση

$$r = R_1 + \dots + R_m$$

με τους περιορισμούς (β). Η r ονομάζεται και αντικειμενική συνάρτηση φάσης I. Από τα παραπάνω εύκολα προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Αν $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων (α) τότε το $R_1=0, \dots, R_m=0$ ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων (β).
- Επειδή οι τεχνητές μεταβλητές είναι μη αρνητικές και από το γεγονός ότι το άθροισμα μη αρνητικών αριθμών είναι μη αρνητικός αριθμός, έπεται ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κατά την διάρκεια της πρώτης φάσης είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν.
- Από το γεγονός ότι η r παίρνει μη αρνητικές τιμές στο σύνολο των εφικτών λύσεων της φάσης I, προκύπτει ότι κάθε εφικτή λύση της φάσης I που έχει τιμή αντικειμενικής συνάρτησης ίση με μηδέν πρέπει να είναι βέλτιστη. Επομένως αν το αρχικό πρόβλημα έχει μία εφικτή λύση η ελάχιστη τιμή της r στη φάση I είναι ίση με μηδέν.

- Αντίστροφα αν η ελάχιστη τιμή της r στη φάση I είναι μηδέν τότε υπάρχει μια εφικτή λύση $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_m)$ η οποία μηδενίζει την τιμή της r . Από τον περιορισμό $R_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ προκύπτει ότι το άθροισμα $R_1 + \dots + R_m = 0$ ικανοποιείται μόνο όταν $R_i = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το αρχικό πρόβλημα έχει λύση αν και μόνο αν η ελάχιστη τιμή της r στην φάση I είναι μηδέν, δηλαδή αν οι τεχνητές μεταβλητές έχουν στο τέλος της φάσης I την τιμή 0. Αυτό σημαίνει ότι αν η ελάχιστη τιμή της r στο τέλος της φάσης I είναι μεγαλύτερη από το μηδέν τότε το αρχικό πρόβλημα δεν έχει λύση.

Στην περίπτωση όπου $r = 0$ στο τέλος της φάσης I μια βασική εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος προκύπτει από τον τελικό πίνακα αν αφαιρέσουμε τις τεχνικές μεταβλητές. Από το γεγονός ότι σε επόμενες επαναλήψεις η τιμή της r θα πρέπει να είναι μηδέν έπεται ότι καμιά μη βασική τεχνητή μεταβλητή δεν θα πρέπει να γίνει βασική κατά τη διάρκεια της φάσης II. Αυτό σημαίνει ότι στο τέλος της φάσης I κάθε μη βασική τεχνητή μεταβλητή δεν θα πρέπει να γίνει βασική κατά τη διάρκεια της φάσης II. Προκύπτει λοιπόν, ότι στο τέλος της φάσης I κάθε μη βασική τεχνητή μεταβλητή καθώς και αντίστοιχο διάνυσμα απαλείφονται από τον πίνακα Simplex. Επίσης, αφού η τιμή της r θα πρέπει να είναι μηδέν σε κάθε επόμενη επανάληψη, έπεται ότι η τιμή κάθε βασικής τεχνητής μεταβλητής θα πρέπει να είναι μηδέν κατά τη διάρκεια της φάσης II. Δηλαδή τεχνητές μεταβλητές που ήταν στη βάση με τιμή μηδέν στο τέλος της φάσης I παραμένουν με τιμή μηδέν κατά τη διάρκεια της φάσης II έως ότου αντικατασταθούν από μη τεχνητές μεταβλητές στη βάση.

Ας εφαρμόσουμε τη μέθοδο των δύο φάσεων στο παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 3 \\ -2x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Πρώτα μετατρέπουμε το πρόβλημα σε τυποποιημένη μορφή, οπότε γίνεται :

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + S_1 &= 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - S_2 &= 3 \\ -2x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Εδώ όμως βλέπουμε ότι δεν υπάρχει αρχική βασική λύση, αφού δεν υπάρχει ο μοναδιαίος πίνακας 3×3 . Γι' αυτό θα εισάγουμε, κατά τη διάρκεια της φάσης I, δύο τεχνητές μεταβλητές στον 2ο και 3ο περιορισμό αντίστοιχα, για να δημιουργήσουμε τον μοναδιαίο πίνακα 3×3 .

Φάση Ι.

Εισάγουμε τις τεχνητές μεταβλητές R_1 και R_2 στον 2ο και 3ο περιορισμό αντίστοιχα, οπότε έχουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα :

$$\min r = R_1 + R_2$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + S_1 = 11$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - S_2 + R_1 = 3$$

$$-2x_1 + x_3 + R_2 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

Επειδή οι R_1 και R_2 είναι στην αρχική βασική λύση θα τις αντικαταστήσουμε στην αντικειμενική συνάρτηση από μη βασικές μεταβλητές με τη βοήθεια του 2ου και του 3ου περιορισμού. Αντικαθιστώντας η αντικειμενική μας συνάρτηση γίνεται :

$$\min r = (3 + 4x_1 - x_2 - 2x_3 + S_2) + (1 + 2x_1 - x_3) = 6x_1 - x_2 - 3x_3 + S_2 + 4.$$

Τότε ο πρώτος πίνακας Simplex της Φάσης Ι είναι :

βασικές μεταβλητές	r	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	β
S_1	0	1	-2	1	1	0	0	0	11
R_1	0	-4	1	2	0	-1	1	0	3
R_2	0	-2	0	1	0	0	0	1	1
r	1	-6	1	3	0	-1	0	0	4

Επειδή στην αντικειμενική συνάρτηση της φάσης Ι έχουμε min, ως εισερχόμενη μεταβλητή επιλέγουμε αυτή που έχει τον μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στην γραμμή της αντικειμενικής.

Δεύτερος πίνακας Simplex Φάσης Ι:

βασικές μεταβλητές	r	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	β
S_1	0	3	-2	0	1	0	0	-1	10
R_1	0	0	1	0	0	-1	1	-2	1
x_3	0	-2	0	1	0	0	0	1	1
r	1	0	1	0	0	-1	0	-3	1

Τρίτος πίνακας Simplex Φάσης Ι:

βασικές μεταβλητές	r	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	β
S_1	0	3	0	0	1	-2	2	-5	12
x_2	0	0	1	0	0	-1	1	-2	1
x_3	0	-2	0	1	0	0	0	1	1
r	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0

Επειδή $r=0$ και $R_1, R_2=0$ μπορούμε να περάσουμε στην Φάση II.

Φάση II.

Από το τελευταίο ταμπλό της Φάσης I αν αφαιρέσουμε τις στήλες των τεχνητών μεταβλητών παίρνουμε τους εξής περιορισμούς :

$$\begin{aligned} 3x_1 + S_1 - 2S_2 &= 12 \\ x_2 - S_2 &= 1 \\ -2x_1 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

που είναι ισοδύναμοι με τους αντίστοιχους του αρχικού προβλήματος στην τυποποιημένη μορφή του. Άρα το αρχικό πρόβλημα γίνεται :

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 3x_1 + S_1 - 2S_2 &= 12 \\ x_2 - S_2 &= 1 \\ -2x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Επειδή οι x_2 και x_3 είναι στην αρχική βασική λύση θα τις αντικαταστήσουμε στην αντικειμενική συνάρτηση από μη βασικές μεταβλητές με τη βοήθεια του 2ου και του 3ου περιορισμού. Αντικαθιστώντας η αντικειμενική μας συνάρτηση γίνεται :

$$\min z = -3x_1 + (1 + S_2) + (1 + 2x_1) = -x_1 + S_2 + 2$$

Τότε ο πρώτος πίνακας της Φάσης II είναι :

βασικές μεταβλητές	z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	β
S_1	0	3	0	0	1	-2	12
x_2	0	0	1	0	0	-1	1
x_3	0	-2	0	1	0	0	1
z	1	1	0	0	0	-1	2

Επειδή στην αντικειμενική συνάρτηση της φάσης II και άρα στην αντικειμενική συνάρτηση του αρχικού μας προβλήματος έχουμε $\min$, ως εισερχόμενη μεταβλητή επιλέγουμε αυτή που έχει τον μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στην γραμμή της αντικειμενικής.

Δεύτερος πίνακας Simplex Φάσης II:

βασικές μεταβλητές	z	x ₁	x ₂	x ₃	S ₁	S ₂	β
x ₁	0	1	0	0	1/3	-2/3	4
x ₂	0	0	1	0	0	-1	1
x ₃	0	0	0	1	2/3	-4/3	9
z	1	0	0	0	-1/3	-1/3	-2

Επειδή στην γραμμή της αντικειμενικής δεν υπάρχει κανένας θετικός συντελεστής δεν μπορούμε να επιλέξουμε νέα εισερχόμενη μεταβλητή στη βάση και άρα η βασική εφικτή λύση που έχουμε βρει είναι και η βέλτιστη.

Επομένως η βέλτιστη λύση του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι η εξής :

$$x_1=4, x_2=1, x_3=9, \text{ και } z=-2.$$

3.10 Δυσικότητα

Μια από τις μεγαλύτερες επιτεύξεις στα πρώτα στάδια ανάπτυξης του γραμμικού προγραμματισμού ήταν η έννοια της δυσικότητας (duality). Σύμφωνα με αυτή κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού συνδέεται με ένα άλλο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, που ονομάζεται δυϊκό (dual). Στη παράγραφο αυτή, αρχικά, θα δείξουμε πως προκύπτει το δυϊκό πρόβλημα από ένα αρχικό (primal) πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Στη συνέχεια θα λύσουμε το δυϊκό πρόβλημα και θα συγκρίνουμε τις λύσεις του με τις λύσεις του αρχικού προβλήματος.

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού υπό μορφή πινάκων:

$$\max z = C^T \cdot X$$

με περιορισμούς

$$\begin{aligned} A \cdot X &\leq B \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} C &= (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \\ X &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ A &= (a_{ij})_{m \times n} \\ B &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T \\ O &= (0)_{n \times 1}. \end{aligned}$$

Το δυϊκό πρόβλημα του παραπάνω αρχικού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θα έχει τόσες μεταβλητές $u \geq 0$, όσοι είναι και οι περιορισμοί του αρχικού και περιορισμούς όσες οι μεταβλητές του αρχικού προβλήματος. Γενικά το δυϊκό πρόβλημα του παραπάνω αρχικού προβλήματος θα είναι το εξής:

$$\min y = B^T \cdot U$$

με περιορισμούς

$$\begin{aligned} A^T \cdot U &\geq C \\ U &\geq 0 \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} C &= (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \\ U &= (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \\ A &= (a_{ij})_{m \times n} \\ B &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T \\ O &= (0)_{m \times 1}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε, με μια πρώτη, ότι το δυϊκό πρόβλημα είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης (ενώ το αρχικό πρόβλημα είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης), ενώ υπάρχει εναλλαγή ρόλων μεταξύ δευτέρου μέλους και συντελεστών αντικειμενικής συνάρτησης από το ένα πρόβλημα (αρχικό) στο άλλο (δυϊκό).

Τώρα θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα δημιουργίας δυϊκού προβλήματος από ένα αρχικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό του δυϊκού προβλήματος που είδαμε στην προηγούμενη σελίδα, το δυϊκό πρόβλημα του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θα είναι:

$$\min y = 6u_1 + 8u_2 + u_3 + 2u_4$$

με τους περιορισμούς

$$u_1 + 2u_2 - u_3 \geq 3$$

$$2u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \geq 2$$

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0.$$

Ο ορισμός του δυϊκού προβλήματος που δόθηκε στην προηγούμενη σελίδα και εφαρμόστηκε εδώ μπορεί να επεκταθεί εύκολα σε κάθε δυνατή μορφή προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού πέρα από τη τυποποιημένη. Αρκεί να παρατηρηθεί ότι μια ανισότητα της μορφής $\geq$ μπορεί να αλλάξει πρόσημο πολλαπλασιάζοντας επί -1 και μια ισότητα μπορεί να μετατραπεί σε δύο ανισότητες της μορφής $\geq$ και $\leq$. Στην πρώτη περίπτωση, η δυϊκή μεταβλητή είναι αρνητική ($u \leq 0$), ενώ στη δεύτερη πρέπει να οριστούν δύο μεταβλητές, μία θετική και μία αρνητική, για τον ίδιο περιορισμό και συνεπώς η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή δεν έχει περιορισμό ως προς το πρόσημο.

Γενικά, στη δημιουργία ενός δυϊκού προβλήματος από ένα αρχικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού ισχύουν οι αμφίδρομες αντιστοιχίες του παρακάτω πίνακα.

Αρχικό πρόβλημα	Δυϊκό πρόβλημα
πρόβλημα μεγιστοποίησης ($\max z$)	πρόβλημα ελαχιστοποίησης ($\min y$)
περιορισμός i της μορφής $\geq$	δυϊκή μεταβλητή $u_i \leq 0$
περιορισμός i της μορφής $\leq$	δυϊκή μεταβλητή $u_i \geq 0$
περιορισμός i της μορφής $=$	δυϊκή μεταβλητή u_i χωρίς περιορισμό προσήμου
μεταβλητή $x_i \geq 0$	περιορισμός j της μορφής $\geq$
μεταβλητή $x_i \leq 0$	περιορισμός j της μορφής $\leq$
μεταβλητή x_i χωρίς περιορισμό προσήμου	περιορισμός j της μορφής $=$
συντελεστής αντικειμενικής συνάρτησης	σταθερά του β' μέλους του περιορισμού
σταθερά του β' μέλους του περιορισμού	συντελεστής αντικειμενικής συνάρτησης

Σημείωση: Για πρόβλημα ελαχιστοποίησης ($\min z$) ισχύουν ακριβώς τα αντίστροφα ως προς τις φορές των ανισοτήτων.

Για παράδειγμα αν έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min z = 25x_1 + 2x_2 + 1,6x_3 + 6x_4 + 12x_5$$

με τους περιορισμούς

$$0,1x_1 + 0,05x_3 + x_5 = 0,08$$

$$0,8x_1 + 0,05x_2 + 0,06x_3 + 0,3x_4 = 0,22$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

τότε η δημιουργία του αντίστοιχου δυϊκού προβλήματος μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ο πρώτος συνίσταται στην απ' ευθείας εφαρμογή των αντιστοιχιών του προηγούμενου πίνακα. Δηλαδή, ορίζουμε δύο δυϊκές μεταβλητές u_1 και u_2 , μία για κάθε περιορισμό, οι οποίες είναι ελεύθερες ως προς το πρόσημο, αφού αντιστοιχούν και οι δύο σε ισότητες. Σ' αυτή την περίπτωση το αντίστοιχο δυϊκό πρόβλημα θα είναι το εξής:

$$\max y = 0,08u_1 + 0,22u_2$$

με τους περιορισμούς

$$0,1u_1 + 0,8u_2 \leq 25$$

$$0,05u_2 \leq 2$$

$$0,05u_1 + 0,06u_2 \leq 1,6$$

$$0,3u_2 \leq 6$$

$$u_1 \leq 12$$

Ο δεύτερος τρόπος, ενίοτε πιο πρακτικός από πλευράς επίλυσης με τη μέθοδο simplex, συνίσταται στη μετατροπή των ισοτήτων του αρχικού προβλήματος σε ανισότητες. Η πρώτη ισότητα γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\left. \begin{array}{l} 0,1x_1 + 0,05x_3 + x_5 \geq 0,08 \\ 0,1x_1 + 0,05x_3 + x_5 \leq 0,08 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0,1x_1 + 0,05x_3 + x_5 \geq 0,08 \\ -0,1x_1 - 0,05x_3 - x_5 \geq -0,08 \end{array} \right.$$

ενώ η δεύτερη ισότητα γράφεται ως εξής:

$$\left. \begin{array}{l} 0,8x_1 + 0,05x_2 + 0,06x_3 + 0,3x_4 \geq 0,22 \\ 0,8x_1 + 0,05x_2 + 0,06x_3 + 0,3x_4 \leq 0,22 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0,8x_1 + 0,05x_2 + 0,06x_3 + 0,3x_4 \geq 0,22 \\ -0,8x_1 - 0,05x_2 - 0,06x_3 - 0,3x_4 \geq -0,22 \end{array} \right.$$

Σ' αυτή τη περίπτωση το δυϊκό πρόβλημα θα είναι το εξής:

$$\max y = 0,08u_1 - 0,08u_2 + 0,22u_3 - 0,22u_4$$

με τους περιορισμούς

$$0,1u_1 - 0,1u_2 + 0,8u_3 - 0,8u_4 \leq 25$$

$$0,05u_3 - 0,05u_4 \leq 2$$

$$0,05u_1 - 0,05u_2 + 0,06u_3 - 0,06u_4 \leq 1,6$$

$$0,3u_3 - 0,3u_4 \leq 6$$

$$u_1 - u_1 \leq 12$$

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0.$$

Στη συνέχεια θα λύσουμε το πρώτο δυϊκό πρόβλημα (σελ. 61) που δημιουργήσαμε και θα συγκρίνουμε τις λύσεις του με τις αντίστοιχες λύσεις του αρχικού του προβλήματος.

Αρχικά μετατρέπουμε το δυϊκό πρόβλημα σε τυποποιημένη μορφή εισάγοντας βοηθητικές μεταβλητές, οπότε αυτό γίνεται :

$$\min y = 6u_1 + 8u_2 + u_3 + 2u_4$$

με τους περιορισμούς

$$u_1 + 2u_2 - u_3 - S_1 = 3$$

$$2u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - S_2 = 2$$

$$u_1, u_2, u_3, u_4, S_1, S_2 \geq 0.$$

Εδώ όμως βλέπουμε ότι δεν υπάρχει αρχική βασική λύση, αφού δεν υπάρχει ο μοναδιαίος πίνακας 2×2 , γι' αυτό θα επιλύσουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο των δύο φάσεων. Κατά τη διάρκεια της φάσης I, μία τεχνητή μεταβλητή στον 1ο περιορισμό, για να δημιουργήσουμε τον μοναδιαίο πίνακα 2×2 .

Φάση I

Εισάγουμε τη τεχνητή μεταβλητή R_1 στον 2ο περιορισμό, οπότε έχουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα :

$$\min r = R_1$$

με τους περιορισμούς

$$u_1 + 2u_2 - u_3 - S_1 + R_1 = 3$$

$$2u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - S_2 = 2$$

$$u_1, u_2, u_3, u_4, S_1, S_2, R_1 \geq 0.$$

Επειδή η R_1 είναι στην αρχική βασική λύση θα τις αντικαταστήσουμε στην αντικειμενική συνάρτηση από μη βασικές μεταβλητές με τη βοήθεια του 1ου περιορισμού. Αντικαθιστώντας η αντικειμενική μας συνάρτηση γίνεται :

$$\min r = 3 - u_1 - 2u_2 + u_3 + S_1$$

Τότε ο πρώτος πίνακας Simplex της Φάσης I είναι :

βασικές μεταβλητές	r	u_1	u_2	u_3	u_4	S_1	S_2	R_1	β
R_1	0	1	2	-1	0	-1	0	1	3
u_4	0	2	1	1	1	0	-1	0	2
r	1	1	2	-1	0	-1	0	0	3

Επειδή στην αντικειμενική συνάρτηση της φάσης I έχουμε min, ως εισερχόμενη μεταβλητή επιλέγουμε αυτή που έχει τον μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στην γραμμή της αντικειμενικής.

Δεύτερος πίνακας Simplex Φάσης I:

βασικές μεταβλητές	r	u_1	u_2	u_3	u_4	S_1	S_2	R_1	β
u_2	0	1/2	1	-1/2	0	-1/2	0	1/2	3/2
u_4	0	3/2	0	3/2	1	1/2	-1	-1/2	1/2
r	1	0	0	0	0	0	0	-1	0

Επειδή $r=0$ και $R_1=0$ μπορούμε να περάσουμε στην Φάση II.

Φάση II

Από το τελευταίο ταμπλό της Φάσης I αν αφαιρέσουμε τη στήλη της τεχνητής μεταβλητής παίρνουμε τους εξής περιορισμούς :

$$\begin{aligned} 1/2u_1 + u_2 - 1/2u_3 - 1/2S_1 &= 3/2 \\ 3/2u_1 + 3/2u_3 + u_4 + 1/2S_1 - S_2 &= 1/2 \end{aligned}$$

που είναι ισοδύναμοι με τους αντίστοιχους του δυϊκού προβλήματος στην τυποποιημένη μορφή του. Άρα το δυϊκό πρόβλημα γίνεται :

$$\min y = 6u_1 + 8u_2 + u_3 + 2u_4$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 1/2u_1 + u_2 - 1/2u_3 - 1/2S_1 &= 3/2 \\ 3/2u_1 + 3/2u_3 + u_4 + 1/2S_1 - S_2 &= 1/2 \\ u_1, u_2, u_3, u_4, S_1, S_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Επειδή οι u_2 και u_4 είναι στην αρχική βασική λύση θα τις αντικαταστήσουμε στην αντικειμενική συνάρτηση από μη βασικές μεταβλητές με τη βοήθεια του 1ου και του 2ου περιορισμού. Αντικαθιστώντας η αντικειμενική μας συνάρτηση γίνεται :

$$\min y = 13 - u_1 + 2u_3 + 3S_1 + 2S_2$$

Τότε ο πρώτος πίνακας της Φάσης II είναι :

βασικές μεταβλητές	y	u_1	u_2	u_3	u_4	S_1	S_2	β
u_2	0	1/2	1	-1/2	0	-1/2	0	3/2
u_4	0	3/2	0	3/2	1	1/2	-1	1/2
y	1	1	0	-2	0	-3	-2	13

Επειδή στην αντικειμενική συνάρτηση της φάσης II έχουμε min, ως εισερχόμενη μεταβλητή επιλέγουμε αυτή που έχει τον μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στην γραμμή της αντικειμενικής.

Δεύτερος πίνακας Simplex Φάσης II:

βασικές μεταβλητές	y	u_1	u_2	u_3	u_4	S_1	S_2	β
u_2	0	0	1	0	-1/3	-2/3	1/3	4/3
u_1	0	1	0	1	2/3	1/3	-2/3	1/3
y	1	0	0	-3	-2/3	-10/3	-4/3	38/3

Επειδή στην γραμμή της αντικειμενικής δεν υπάρχει κανένας θετικός συντελεστής δεν μπορούμε να επιλέξουμε νέα εισερχόμενη μεταβλητή στη βάση και άρα η βασική εφικτή λύση που έχουμε βρει είναι και η βέλτιστη.

Επομένως η βέλτιστη λύση του παραπάνω δυϊκού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι η εξής :

$$u_1 = 1/3, u_2 = 4/3, u_3 = 0, u_4 = 0, y = 38/3.$$

Τέλος συγκρίνοντας τον τελευταίο πίνακα (σελ. 64) που δίνει τη λύση στο δυϊκό πρόβλημα με τον πίνακα (σελ. 41) που δίνει τη λύση στο αρχικό πρόβλημα, μπορούμε να κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

1. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και στους δύο πίνακες είναι ίδια ($z = y = 38/3$).
2. Οι μη μηδενικοί συντελεστές στην γραμμή της αντικειμενικής στον πίνακα του αρχικού προβλήματος εμφανίζονται στη στήλη των σταθερών όρων στον πίνακα του δυϊκού προβλήματος.
3. Οι τιμές στη στήλη των σταθερών όρων στον πίνακα του αρχικού προβλήματος εμφανίζονται με αντίθετο πρόσημο στην γραμμή της αντικειμενικής στον πίνακα του δυϊκού προβλήματος

3.11 Ανάλυση Ευαισθησίας

Η δουλειά του ερευνητή επιχειρησιακής έρευνας δεν τελειώνει με την εύρεση της βέλτιστης λύσης ενός προβλήματος. Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 3.3 μια από τις υποθέσεις του γραμμικού προγραμματισμού είναι ότι όλοι οι παράμετροι του μοντέλου (τα a_{ij} , β_i και c_j) είναι γνωστές σταθερές. Στην πραγματικότητα όμως, οι τιμές των παραμέτρων είναι συνήθως εκτιμήσεις βασισμένες σε προβλέψεις μελλοντικών συνθηκών. Οι παράμετροι του μοντέλου που προέρχονται από αυτές οι εκτιμήσεις μπορεί για διάφορους λόγους να έχουν κάποιο βαθμό αβεβαιότητας. Γι' αυτό το λόγο ο ερευνητής της επιχειρησιακής έρευνας διατηρεί κάποιο βαθμό σκεπτικισμού για τα αποτελέσματα που βγαίνουν από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή και πολλές φορές τα θεωρεί ως το σημείο αναφοράς για μια παραπέρα ανάλυση του προβλήματος. Μια βέλτιστη λύση είναι βέλτιστη μόνο σε σχέση με το μοντέλο που χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει το πραγματικό πρόβλημα. Μια τέτοια λύση γίνεται αξιόπιστος οδηγός για τη λήψη των αποφάσεων μόνο εφόσον έχει επαληθευτεί ότι αποδίδει καλά και σε άλλες λογικές αναπαραστάσεις του προβλήματος.

Για τους παραπάνω λόγους είναι σπουδαίο να γίνει η ανάλυση ευαισθησίας για να διερευνηθεί η επίδραση που θα έχουν στην βέλτιστη λύση αλλαγές των τιμών των παραμέτρων. Με την ανάλυση ευαισθησίας υπολογίζεται το κατώτατο και το ανώτερο όριο του διαστήματος στο οποίο μπορεί να παίρνει τιμές μια σταθερά ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού (είτε αυτή είναι συντελεστής αντικειμενικής, είτε δεξιό μέλος περιορισμών) χωρίς να μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση.

Σύμφωνα με τη θεωρία της μεθόδου Simplex κάθε αλλαγή στις παραμέτρους του μοντέλου ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού αντιστοιχεί σε αλλαγή των τιμών στον τελευταίο πίνακα της Simplex. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα στην ανάλυση ευαισθησίας να μην χρειάζεται να εφαρμοστεί πάλι η μέθοδος Simplex για να διερευνηθεί κάθε νέα αλλαγή σε μια τιμή μιας παραμέτρου αλλά δουλεύουμε μόνο με τον τελευταίο πίνακα Simplex ο οποίος δίνει την βέλτιστη λύση.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις ανάλυσης ευαισθησίας που αναφέρονται σε μεταβολές των δεξιών μελών των περιορισμών και των συντελεστών της αντικειμενικής.

3.11.1 Μεταβολή των δεξιών μελών των περιορισμών

Σ' αυτή την παράγραφο θα καθορίσουμε το πεδίο μεταβολής των τιμών των δεξιών μελών των περιορισμών που αντιστοιχούν σε δυϊκές τιμές διάφορες του μηδενός. Οι λύσεις ενός δυϊκού προβλήματος είναι οι τιμές των βοηθητικών μεταβλητών στην γραμμή της αντικειμενικής του τελευταίου πίνακα του αντίστοιχου αρχικού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Επομένως εδώ εμείς θα μελετήσουμε την μεταβολή των δεξιών μελών των περιορισμών που οι αντίστοιχες βοηθητικές μεταβλητές στο τελικό πίνακα Simplex έχουν στην γραμμή της αντικειμενικής τιμή διάφορη του μηδενός, δηλαδή είναι μη βασικές μεταβλητές στην βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$+ x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Ο τελευταίος πίνακας της μεθόδου Simplex ο οποίος μας δίνει τη βέλτιστη λύση είναι ο ακόλουθος :

βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
x_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
x_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
s_3	0	0	-1	1	1	0	3
s_4	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3
z	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3

Άρα η λύση του αντίστοιχου δυϊκού προβλήματος είναι: $y_1=1/3$, $y_2=4/3$, $y_3=0$, $y_4=0$.

Εμείς τώρα θα προσπαθήσουμε να βρούμε το πεδίο μεταβολής του δεξιού μέλους του 1ου περιορισμού, έτσι ώστε να μην μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση.

Προσθέτουμε μια σταθερά d_1 στο δεξιό μέλος του πρώτου περιορισμού. Η σταθερά αυτή μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Τώρα στους πίνακες της μεθόδου Simplex η στήλη των δεξιών μελών θα έχει την εξής μορφή:

Εξισώσεις	Πίνακας 1	Πίνακας 2	Πίνακας 3 (τελικός)
1	$6+d_1$	$2+d_1$	$4/3+2/3d_1$
2	8	4	$10/3-1/3d_1$
3	1	5	$3-d_1$
4	2	2	$2/3-2/3d_1$
z	0	12	$38/3+1/3d_1$

Άρα οι λύσεις του νέου προβλήματος είναι:

$$x_2=4/3+2/3d_1$$

$$x_1=10/3-1/3d_1$$

$$s_3=3-d_1$$

$$s_4=2/3-2/3d_1$$

$$z=38/3+1/3d_1$$

Από τους περιορισμούς μη αρνητικότητας έχουμε :

$$x_2 = 4/3 + 2/3d_1 \geq 0 \quad (1)$$

$$x_1 = 10/3 - 1/3d_1 \geq 0 \quad (2)$$

$$s_3 = 3 - d_1 \geq 0 \quad (3)$$

$$s_4 = 2/3 - 2/3d_1 \geq 0. \quad (4)$$

Για να καθορίσουμε το πεδίο μεταβολής της d_1 εργαζόμαστε ως εξής :

Περίπτωση 1: $d_1 > 0$. Η (1) ισχύει πάντα. Από την ικανοποίηση των (2), (3) και (4) έχουμε $d_1 \leq 10$, $d_1 \leq 3$, $d_1 \leq 1$. Επομένως οι σχέσεις (2), (3) και (4) ικανοποιούνται για $d_1 \leq 1$.

Περίπτωση 2: $d_2 < 0$. Οι (2), (3) και (4) ισχύουν πάντα.. Από την ικανοποίηση της (1) έχουμε $d_1 \geq -2$.

Από τις περιπτώσεις 1 και 2 έχουμε ότι το πεδίο μεταβολής της d_1 είναι :

$$-2 \leq d_1 \leq 1.$$

Επομένως η λύση του δυϊκού προβλήματος $y_1 = 1/3$ (άρα και ο συντελεστής $1/3$ της μεταβλητής s_1 στην γραμμή της αντικειμενικής του τελευταίου πίνακα) παραμένει σταθερός όταν το δεξιό μέλος του περιορισμού μεταβάλλεται μεταξύ $6-2=4$ και $6+1=7$.

3.11.2 Μεταβολή των συντελεστών της αντικειμενικής

Στην περίπτωση αυτή δεν αλλάζουν οι τιμές της βέλτιστης λύσης, αλλάζει όμως η τιμή του z . Δηλαδή επηρεάζεται μόνο η τιμή της αντικειμενικής στον τελικό πίνακα της μεθόδου Simplex (ο οποίος δίνει και τη βέλτιστη λύση).

Βασικές μεταβλητές

Όποιες αλλαγές γίνουν στους αρχικούς συντελεστές των βέλτιστων βασικών μεταβλητών στην αντικειμενική θα επηρεάσουν τους συντελεστές των μη βασικών μεταβλητών στην γραμμή της αντικειμενικής και άρα την βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής.

Έστω ότι στο παραπάνω παράδειγμα προσθέτω μια σταθερά d_1 στον συντελεστή στην αντικειμενική της μεταβλητής x_1 . Η σταθερά αυτή μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Τώρα η αντικειμενική θα γίνει :

$$z = (3+d_1)x_1 + 2x_2,$$

ενώ ο τελευταίος πίνακας της μεθόδου Simplex που δίνει την βέλτιστη λύση θα έχει την μορφή:

βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	β
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	$4/3$
x_1	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	$10/3$
s_3	0	0	-1	1	1	0	3
s_4	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	$2/3$
z	0	0	$1/3-1/3d_1$	$4/3+2/3d_1$	0	0	$38/3+10/3d_1$

Οι μόνες αλλαγές που έχουν γίνει σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι στους συντελεστές των s_1 και s_2 (μη βασικές μεταβλητές). Αυτές οι αλλαγές υπολογίζονται εάν πολλαπλασιαστούν οι μη βασικοί συντελεστές της x_1 επί d_1 και προστεθούν στους αντίστοιχους συντελεστές της αντικειμενικής.

Για να διατηρηθεί η βέλτιστη λύση πρέπει $1/3-1/3d_1 \geq 0$ και $4/3+2/3d_1 \geq 0$. Δηλαδή $d_1 \leq 1$ και $d_1 \geq -2$.

Άρα το πεδίο μεταβολής της d_1 θα είναι:

$$-2 \leq d_1 \leq 1.$$

Επομένως για να μην μεταβληθεί η βέλτιστη λύση πρέπει ο συντελεστής στην αντικειμενική της μεταβλητής x_1 να μεταβάλλεται μεταξύ $3-2=1$ και $3+1=4$. Το z όμως αλλάζει ανάλογα με το d_1 .

Μη βασικές μεταβλητές

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$+ x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Ο τελευταίος πίνακας της μεθόδου Simplex ο οποίος μας δίνει τη βέλτιστη λύση είναι ο ακόλουθος :

βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	β
s_1	0	$3/2$	1	$-1/2$	0	0	2
x_1	1	$1/2$	0	$1/2$	0	0	4
s_3	0	$3/2$	0	$1/2$	1	0	5
s_4	0	1	0	0	0	1	2
z	0	$1/2$	0	$5/2$	0	0	20

Εδώ παρατηρούμε ότι η x_2 δεν είναι βασική.

Έστω ότι θέλουμε να αλλάξουμε τον συντελεστή στην αντικειμενική της μεταβλητής x_2 προσθέτοντας σ' αυτόν μια σταθερά d_2 , και θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο της d_2 για το οποίο η συγκεκριμένη βέλτιστη λύση παραμένει ίδια.

Σ' αυτή την περίπτωση κάθε αλλαγή στον συντελεστή στην αντικειμενική μιας μη βασικής μεταβλητής επηρεάζει μόνο τον συντελεστή της μη βασικής μεταβλητής στην γραμμή αντικειμενικής στον τελευταίο πίνακα που δίνει τη βέλτιστη λύση, δηλαδή από $1/2$ θα γίνει $1/2-d_2$. Γενικά η αλλαγή d_2 στην αρχική αντικειμενική ενός συντελεστή μιας μη βασικής μεταβλητής καταλήγει σε μείωση του αντίστοιχου συντελεστή στην γραμμή της αντικειμενικής στον τελευταίο πίνακα που δίνει τη βέλτιστη λύση κατά d_2 .

Ο συγκεκριμένος τελευταίος πίνακας θα δίνει πάλι την βέλτιστη λύση εάν $1/2-d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \leq 1/2$.

Επομένως για να μην μεταβληθεί η βέλτιστη λύση πρέπει ο συντελεστής στην αντικειμενική της μεταβλητής x_2 να είναι μικρότερος από $1/2+2=5/2$.

Εάν τώρα το d_2 πάρει τιμές μεγαλύτερες από $1/2$ τότε η x_2 γίνεται «κερδοφόρα» διότι ο συντελεστής της στην αντικειμενική γίνεται αρνητικός (περίπτωση max). Χωρίς αλλαγές όμως για κάθε μονάδα της x_2 που παρασκευάζεται χάνονται $1/2$ μονάδες από τη βέλτιστη τιμή του z . Οι συντελεστές στην γραμμή της αντικειμενικής των μη βασικών μεταβλητών ονομάζονται γι' αυτό το λόγο reduced costs.

3.12 Το Πρόβλημα της Μεταφοράς

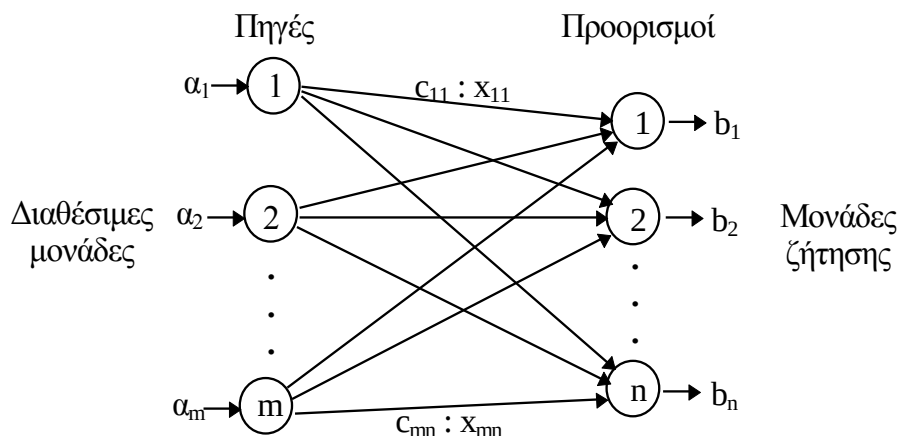
Σ' αυτή την παράγραφο και στις επόμενες μέχρι το τέλος του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με μερικά σπουδαία είδη προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Οι ειδικές αυτές περιπτώσεις έχουν ορισμένα χαρακτηριστικά. Όλες τους εμφανίζονται συχνά στη πράξη και χρειάζονται ένα μεγάλο αριθμό περιορισμών και μεταβλητών έτσι ώστε η εφαρμογή της μεθόδου Simplex με ηλεκτρονικούς υπολογιστές να γίνεται μη συμφέρουσα ή ακόμη και υπολογιστικά απαγορευμένη. Ευτυχώς, ένα άλλο χαρακτηριστικό είναι ότι οι περισσότεροι συντελεστές a_{ij} στους περιορισμούς είναι μηδέν, με αποτέλεσμα να έχουν αναπτυχθεί ειδικές παραλλαγές της μεθόδου Simplex, με τις οποίες πετυχαίνεται μεγάλη εξοικονόμηση υπολογισμών στην επίλυση των προβλημάτων αυτών. Ο συντελεστής a_{ij} είναι ο συντελεστής της j μεταβλητής στον i περιορισμό.

Σ' αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε την πιο σπουδαία ειδική περίπτωση προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού που είναι το πρόβλημα της μεταφοράς (transportation problem). Στις επόμενες παραγράφους, θα εξετάσουμε το πρόβλημα της μεταφόρτωσης (transshipment problem) και το πρόβλημα της εκχώρησης (assignment problem).

Το γενικό πρόβλημα της μεταφοράς αναφέρεται στη μεταφορά ενός οποιουδήποτε προϊόντος από μια ομάδα κέντρων παραγωγής, που ονομάζονται πηγές σε μια ομάδα κέντρων κατανάλωσης, που ονομάζονται προορισμοί με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς. Σ' ένα πρόβλημα μεταφοράς δίνονται τα εξής στοιχεία:

- Ένα συγκεκριμένο προϊόν
- Ένα σύνολο κέντρων παραγωγής ή πηγών $i = 1, 2, \dots, m$ και ένα σύνολο κέντρων κατανάλωσης ή προορισμών $j = 1, 2, \dots, n$.
- Η διαθέσιμη ποσότητα a_i του i κέντρου παραγωγής ή πηγής, $i = 1, 2, \dots, m$.
- Η ζητούμενη ποσότητα b_j του j κέντρου κατανάλωσης ή προορισμού, $j = 1, 2, \dots, n$.
- Το κόστος μεταφοράς c_{ij} μιας μονάδας του προϊόντος από την i πηγή στον j προορισμό.

Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει το μοντέλο του προβλήματος της μεταφοράς ως ένα δίκτυο με m πηγές και n προορισμούς. Μια πηγή ή ένας προορισμός αναπαρίστανται από ένα κόμβο του δικτύου. Το τόξο που ενώνει μια πηγή με έναν προορισμό αναπαριστά τη διαδρομή μέσω της οποίας το προϊόν μεταφέρεται.



Η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος έχει ως εξής:

Έστω x_{ij} η ποσότητα του προϊόντος που μεταφέρεται από το i κέντρο παραγωγής (πηγή) στο j κέντρο κατανάλωσης (προορισμός), π.χ. για $i = 2$ και $j = 4$, x_{24} είναι η ποσότητα του προϊόντος που μεταφέρεται από το κέντρο παραγωγής 2 στο κέντρο κατανάλωσης 4. Τότε το άθροισμα των ποσοτήτων που θα μεταφερθούν από το i κέντρο παραγωγής στα 1, 2, ..., n κέντρα κατανάλωσης, θα πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο με τη διαθέσιμη ποσότητα a_i του i κέντρου παραγωγής, αφού δεν είναι δυνατόν να μεταφερθεί από ένα κέντρο παραγωγής μεγαλύτερη ποσότητα από τη διαθέσιμη. Έτσι για τα $i = 1, 2, \dots, m$ κέντρα παραγωγής έχουμε το εξής σύστημα m ανισοτήτων:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (\alpha)$$

Ακόμη, το άθροισμα των ποσοτήτων που θα μεταφερθούν στο j κέντρο κατανάλωσης από τα 1, 2, ..., m κέντρα παραγωγής θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με την ποσότητα b_j που ζητείται από το j κέντρο κατανάλωσης, αφού πρέπει η ζήτηση κάθε κέντρου κατανάλωσης να καλύπτεται. Έτσι για τα $j = 1, 2, \dots, n$ κέντρα κατανάλωσης έχουμε το εξής σύστημα n ανισοτήτων:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (\beta)$$

Μια και η μεταφορά αρνητικών ποσοτήτων δεν έχει νόημα στους παραπάνω περιορισμούς προστίθενται και οι περιορισμοί μη αρνητικότητας των μεταβλητών x_{ij} . Έχουμε δηλαδή:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (\gamma)$$

Οι περιορισμοί (α), (β) και (γ) αποτελούν τους περιορισμούς του προβλήματος μεταφοράς.

Για την μοντελοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης z έστω c_{ij} το κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος από την πηγή i στον προορισμό j , π.χ. αν $c_{23} = 5$ τότε η μεταφορά μιας μονάδας προϊόντος από την πηγή 2 στον προορισμό 3 κοστίζει 5 χρηματικές μονάδες. Έστω ότι ακόμη ότι το ολικό κόστος μεταφοράς είναι ανάλογο (υπόθεση αναλογικότητας για προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού) της μεταφερόμενης ποσότητας, δηλαδή το κόστος μεταφοράς x_{ij} μονάδων προϊόντος από την πηγή i στον προορισμό j είναι ίσο με $c_{ij}x_{ij}$. Το ολικό κόστος S_i μεταφοράς x_{ij} μονάδων προϊόντος από την πηγή i στους προορισμούς $j = 1, 2, \dots, n$ ισούται με

$$S_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \quad (\delta)$$

Έτσι η συνάρτηση ολικού κόστους μεταφοράς z από τις πηγές $i = 1, 2, \dots, m$ στους προορισμούς $j = 1, 2, \dots, n$ είναι:

$$z = \sum_{i=1}^m S_i.$$

Αντικαθιστώντας την (δ) στην τελευταία σχέση έχουμε:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}.$$

Έτσι το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος της μεταφοράς μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

με τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Το πρόβλημα της μεταφοράς λύνεται με την βοήθεια της μεθόδου Simplex. Όμως λόγω της δομής του προσφέρεται για την ανάπτυξη πιο αποτελεσματικών αλγορίθμων, όπως η μέθοδος της βορειοδυτικής γωνίας, η μέθοδος ελαχίστου κόστους και η μέθοδος προσέγγισης του Vogel.

Μια βασική προϋπόθεση για να έχει το πρόβλημα εφικτές λύσεις είναι ότι:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

δηλαδή το άθροισμα των ποσοτήτων που διαθέτουν οι πηγές είναι ίσο με το άθροισμα των ποσοτήτων που απαιτούν οι προορισμοί. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι το σύστημα είναι σε ισορροπία και οι περιορισμοί του προβλήματος έχουν μετατραπεί από ανισότητες σε ισότητες. Δηλαδή το μοντέλο του προβλήματος όταν το σύστημά μας είναι σε ισορροπία εκφράζεται ως εξής:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

με τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Αυτή η προϋπόθεση που πρέπει να ισχύει για να έχει το πρόβλημα της μεταφοράς εφικτές λύσεις, δεν μας εμποδίζει την επεξεργασία πραγματικών προβλημάτων όπου η προσφορά των πηγών είναι διαφορετική από τη ζήτηση των προορισμών. Σ' αυτές τις περιπτώσεις γίνεται η χρήση μιας εικονικής πηγής με εικονική προσφορά ή ενός εικονικού προορισμού με εικονική ζήτηση ανάλογα με το αν υπάρχει μεγαλύτερη ζήτηση ή προσφορά αντίστοιχα. Το κόστος της εικονικής προσφοράς και της εικονικής ζήτησης είναι μηδέν.

Παράδειγμα

Ένα κατασκευαστής ηλεκτρικών συσκευών έχει 3 εργοστάσια και 5 αποθήκες διανομής στις οποίες μεταφέρει τα προϊόντα για αποθήκευση και διανομή στους πελάτες. Τα τρία εργοστάσια παράγουν τις ακόλουθες μονάδες κάθε εβδομάδα:

Εργοστάσιο	1	2	3
Διαθέσιμες μονάδες	600	400	500

Οι αποθήκες έχουν τις ακόλουθες απαιτήσεις για διανομή κάθε εβδομάδα:

Αποθήκη	1	2	3	4	5
Μονάδες που απαιτούνται	200	250	300	550	200

Το κόστος μεταφορά ανά μονάδα προϊόντος από κάθε εργοστάσιο σε κάθε αποθήκη είναι:

Αποθήκη Εργοστάσιο	1	2	3	4	5
1	2	1	3	1	2
2	4	2	1	3	1
3	2	1	1	3	4

Να διατυπωθεί το πρόβλημα σαν πρόβλημα μεταφοράς.

Διατύπωση:

Παρατηρούμε ότι οι ποσότητες του προϊόντος που διαθέτουν τα εργοστάσια ($600 + 400 + 500 = 1500$) είναι ίσες με τις ποσότητες που απαιτούν οι αποθήκες ($200 + 250 + 300 + 550 + 200 = 1500$). Επομένως το σύστημά μας είναι σε ισορροπία και άρα οι περιορισμοί του μοντέλου μας θα είναι ισότητες.

Έστω x_{ij} οι μονάδες που μεταφέρονται από το εργοστάσιο $i=1,2,3$ στην αποθήκη $j=1,2,3,4,5$. Τότε το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος θα διατυπώνεται ως εξής:

$$\min z = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + x_{14} + 2x_{15} + 4x_{21} + 2x_{22} + x_{23} + 3x_{24} + x_{25} + 2x_{31} + x_{32} + x_{33} + 3x_{34} + 4x_{35}$$

με τους περιορισμούς:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 600$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 400$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 500$$

(από την διαθέσιμες ποσότητες των εργοστασίων)

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 200$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 250$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 300$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 550$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 200$$

(από τις ποσότητες που απαιτούν οι αποθήκες).

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \text{ και } j = 1, 2, 3, 4, 5$$

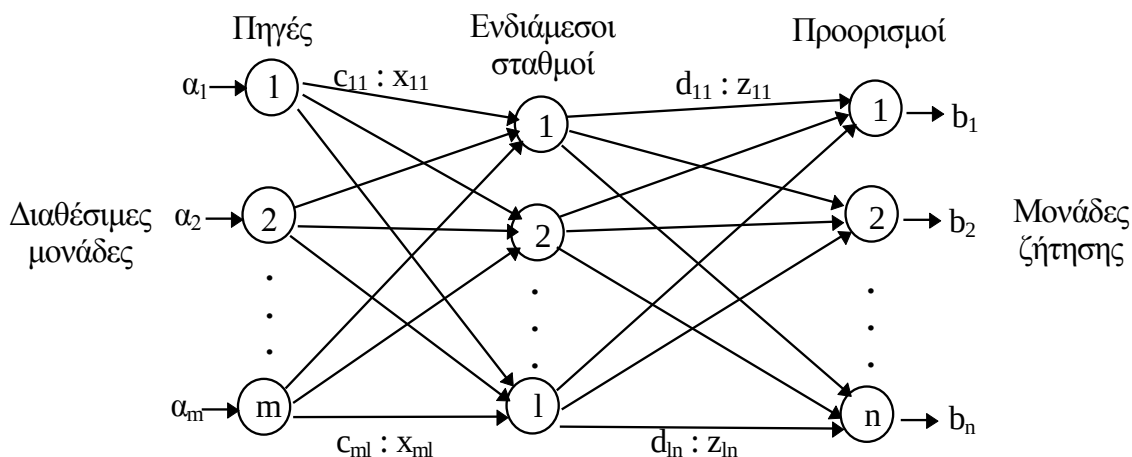
3.13 Το Πρόβλημα της Μεταφόρτωσης

Στο πρόβλημα μεταφοράς ο τρόπος με τον οποίο οι μονάδες μεταφέρονται από κάθε πηγή i σε κάθε προορισμό j είναι γνωστός έτσι ώστε τα αντίστοιχα στοιχεία κόστους ανά μονάδα προϊόντος (c_{ij}) μπορούν να προσδιοριστούν. Όμως μερικές φορές δεν είναι φανερό ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος μεταφοράς λόγω μεταφορτώσεων, δηλαδή φορτώσεων μέσω ενδιάμεσων σημείων μεταφοράς, που μπορεί να είναι άλλες πηγές ή άλλοι προορισμοί. Παραδείγματος χάριν, αντί να μεταφέρουμε τα εμπορεύματα με ειδικό φορτίο από το λιμάνι 1 στο λιμάνι 3, μπορεί να είναι φθηνότερο να τα στείλουμε με κανονικό φορτίο από το λιμάνι 1 στο λιμάνι 2 και μετά από το λιμάνι 2 στο λιμάνι 3. Τέτοιες δυνατότητες πρέπει να διερευνηθούν προκαταβολικά για να προσδιορισθεί η φθηνότερη διαδρομή από κάθε πηγή σε κάθε προορισμό. Σε περίπτωση που υπάρχουν πολλά ενδιάμεσα σημεία μεταφοράς, αυτό μπορεί να γίνει ένα αρκετά πολύπλοκο πρόβλημα. Έτσι, ίσως είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιήσουμε έναν αλγόριθμο για να βρίσκει τη λύση για τις ποσότητες που μεταφέρονται από κάθε πηγή σε κάθε προορισμό και για τη διαδρομή που θα ακολουθήσει κάθε αποστολή με τρόπο που να ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος μεταφοράς. Η επέκταση αυτή του προβλήματος μεταφοράς που συμπεριλαμβάνει και αποφάσεις διαδρομών ονομάζεται πρόβλημα μεταφόρτωσης (transshipment problem).

Το γενικό πρόβλημα της μεταφόρτωσης αναφέρεται στο προσδιορισμό της μεταφοράς ενός οποιουδήποτε προϊόντος από μια ομάδα κέντρων παραγωγής, που ονομάζονται πηγές σε μια ομάδα κέντρων κατανάλωσης, που ονομάζονται προορισμοί μέσω κάποιων ενδιάμεσων σταθμών μεταφόρτωσης με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς. Σ' ένα πρόβλημα μεταφόρτωσης δίνονται τα εξής στοιχεία:

- Ένα συγκεκριμένο προϊόν
- Ένα σύνολο κέντρων παραγωγής ή πηγών $i=1,2,\dots,m$, ένα σύνολο ενδιάμεσων σταθμών μεταφόρτωσης $k=1,2,\dots,l$ και ένα σύνολο κέντρων κατανάλωσης ή προορισμών $j=1,2,\dots,n$.
- Η διαθέσιμη ποσότητα a_i του i κέντρου παραγωγής ή πηγής, $i = 1, 2, \dots, m$.
- Η ζητούμενη ποσότητα b_j του j κέντρου κατανάλωσης ή προορισμού, $j = 1, 2, \dots, n$.
- Το κόστος μεταφοράς c_{ik} μιας μονάδας του προϊόντος από την i πηγή στο k ενδιάμεσο στάδιο μεταφοράς.
- Το κόστος μεταφοράς d_{kj} μιας μονάδας του προϊόντος από το k ενδιάμεσο στάδιο μεταφοράς στον j προορισμό.

Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει το μοντέλο του προβλήματος της μεταφόρτωσης ως ένα δίκτυο με m πηγές, k ενδιάμεσους σταθμούς μεταφόρτωσης και n προορισμούς. Μια πηγή ή ένας ενδιάμεσος σταθμός ή ένας προορισμός αναπαρίστανται από ένα κόμβο του δικτύου. Τα τόξα που ενώνουν μια πηγή με έναν ενδιάμεσο σταθμό μεταφόρτωσης ή έναν ενδιάμεσο σταθμό μεταφόρτωσης με έναν προορισμό αναπαριστούν τη διαδρομή μέσω της οποίας το προϊόν μεταφέρεται.



Το πρόβλημα της μεταφόρτωσης μπορεί να διαμορφωθεί ως πρόβλημα μεταφοράς αν θεωρήσουμε τις μεταφορές από πηγή σε ενδιάμεσο σταθμό και από ενδιάμεσο σταθμό σε προορισμό ως μεταφορές από μια πηγή σε έναν προορισμό και να θεωρήσουμε όλες τις τοποθεσίες (πηγές, ενδιάμεσοι σταθμοί, προορισμοί) ως δυνατές πηγές ή δυνατούς προορισμούς.

Η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος έχει ως εξής:

Έστω x_{ik} η ποσότητα του προϊόντος που μεταφέρεται από το i κέντρο παραγωγής (πηγή) στο k ενδιάμεσο σταθμό μεταφόρτωσης, π.χ. για $i = 2$ και $k = 4$, x_{24} είναι η ποσότητα του προϊόντος που μεταφέρεται από το κέντρο παραγωγής 2 στον ενδιάμεσο σταθμό μεταφόρτωσης 4. Τότε το άθροισμα των ποσοτήτων που θα μεταφερθούν από το i κέντρο παραγωγής στους $1, 2, \dots, l$ ενδιάμεσους σταθμούς μεταφόρτωσης, θα πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο με τη διαθέσιμη ποσότητα α_i του i κέντρου παραγωγής, αφού δεν είναι δυνατόν να μεταφερθεί από ένα κέντρο παραγωγής μεγαλύτερη ποσότητα από τη διαθέσιμη. Η ισότητα, όπως και στο πρόβλημα της μεταφοράς, ισχύει όταν το σύστημα μας βρίσκεται σε ισορροπία. Αυτό είναι φυσικό αφού όπως είπαμε το πρόβλημα της μεταφόρτωσης διαμορφώνεται τελικά σε ένα πρόβλημα μεταφοράς.

Έστω z_{kj} η ποσότητα του προϊόντος που μεταφέρεται από τον k ενδιάμεσο σταθμό μεταφόρτωσης στον j προορισμό. Τότε το άθροισμα των ποσοτήτων που έρχονται σε ένα ενδιάμεσο σταθμό μεταφόρτωσης k από τις $i = 1, 2, \dots, m$ πηγές είναι ίσο με το άθροισμα των ποσοτήτων που φεύγουν από αυτόν τον ενδιάμεσο σταθμό μεταφόρτωσης προς τους $j = 1, 2, \dots, n$ προορισμούς.

Ακόμη, το άθροισμα των ποσοτήτων που θα μεταφερθούν στον j προορισμό από τους $k = 1, 2, \dots, l$ ενδιάμεσους σταθμούς παραγωγής θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με την ποσότητα b_j που ζητείται από τον j προορισμό, αφού πρέπει η ζήτηση κάθε προορισμού να καλύπτεται. Η ισότητα, όπως και στο πρόβλημα της μεταφοράς, ισχύει όταν το σύστημα μας βρίσκεται σε ισορροπία.

Μια και η μεταφορά αρνητικών ποσοτήτων δεν έχει νόημα στους παραπάνω περιορισμούς προστίθενται και οι περιορισμοί μη αρνητικότητας των μεταβλητών x_{ik} , και z_{kj} .

Αφού το πρόβλημα της μεταφόρτωσης σπάει σε δύο προβλήματα μεταφοράς, το πρώτο από τις πηγές στους ενδιάμεσους σταθμούς μεταφόρτωσης και το δεύτερο από τους ενδιάμεσους

σταθμούς μεταφόρτωσης στους προορισμούς, η αντικειμενική συνάρτηση του γενικού προβλήματος μεταφόρτωσης θα είναι το άθροισμα των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο προβλημάτων μεταφοράς.

Μια βασική προϋπόθεση για να έχει το πρόβλημα της μεταφόρτωσης εφικτές λύσεις είναι ότι:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

δηλαδή το άθροισμα των ποσοτήτων που διαθέτουν οι πηγές είναι ίσο με το άθροισμα των ποσοτήτων που απαιτούν οι προορισμοί. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι το σύστημα είναι σε ισορροπία και οι περιορισμοί του προβλήματος έχουν μετατραπεί από ανισότητες σε ισότητες. Δηλαδή το μοντέλο του προβλήματος όταν το σύστημά μας είναι σε ισορροπία εκφράζεται ως εξής:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^n d_{kj} z_{kj}$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l x_{ik} &= \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ik} &= \sum_{j=1}^n z_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, l \\ \sum_{k=1}^l z_{kj} &= b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$x_{ik}, z_{kj} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, l \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Αυτή η προϋπόθεση που πρέπει να ισχύει για να έχει το πρόβλημα της μεταφόρτωσης εφικτές λύσεις, δεν μας εμποδίζει την επεξεργασία πραγματικών προβλημάτων όπου η προσφορά των πηγών είναι διαφορετική από τη ζήτηση των προορισμών. Σ' αυτές τις περιπτώσεις γίνεται η χρήση μιας εικονικής πηγής με εικονική προσφορά ή ενός εικονικού προορισμού με εικονική ζήτηση ανάλογα με το αν υπάρχει μεγαλύτερη ζήτηση ή προσφορά αντίστοιχα. Το κόστος της εικονικής προσφοράς και της εικονικής ζήτησης είναι μηδέν.

Παράδειγμα:

Ένας οργανισμός, ο οποίος χρησιμοποιεί ξυλεία για την κατασκευή χαρτιού, έχει στην ιδιοκτησία του 3 δάση τα οποία προμηθεύουν ξύλο 2 εργοστάσιά του που παράγουν χαρτί. Το χαρτί μεταφέρεται σε 3 αποθήκες από όπου διατίθεται στην αγορά. Το κάθε δάσος μπορεί να δώσει μέχρι μια ποσότητα ξύλου S_i , $i = 1, 2, 3$, ενώ κάθε αποθήκη ζητάει μια ποσότητα ξύλου Δ_j , $j = 1, 2, 3$. Το κόστος μεταφοράς του ξύλου από το δάσος i στο εργοστάσιο $k = 1, 2$ είναι c_{ik} ανά μονάδα ξύλου, ενώ το κόστος μεταφοράς του χαρτιού από το εργοστάσιο k στην αποθήκη j είναι d_{kj} ανά μονάδα χαρτιού. Υποθέτουμε ότι μια μονάδα ξύλου σε κάθε δάσος αντιστοιχεί στο ισοδύναμο ποσό ξύλου που αντιστοιχεί για να κατασκευασθεί ένα ρολό χαρτιού. Να διατυπωθεί το πρόβλημα ως πρόβλημα μεταφόρτωσης.

Διατύπωση:

Υποθέτουμε ότι το σύστημά μας είναι σε ισορροπία. Αν δεν είναι τότε προσθέτουμε μια εικονική πηγή με εικονική προσφορά ή έναν εικονικό προορισμό με εικονική ζήτηση ανάλογα με το αν υπάρχει μεγαλύτερη ζήτηση ή προσφορά αντίστοιχα.

Έστω x_{ik} οι μονάδες του χαρτιού που μεταφέρονται από το δάσος $i = 1, 2, 3$ στο εργοστάσιο $k = 1, 2$, και z_{kj} οι μονάδες του χαρτιού που μεταφέρονται από το εργοστάσιο $k = 1, 2$ στην αποθήκη $j = 1, 2, 3$. Τότε το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος διαμορφώνεται ως εξής:

$$\min z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + \\ d_{11}z_{11} + d_{12}z_{12} + d_{13}z_{13} + d_{21}z_{21} + d_{22}z_{22} + d_{23}z_{23}$$

με τους περιορισμούς

$$x_{11} + x_{12} = S_1$$

$$x_{21} + x_{22} = S_2$$

$$x_{31} + x_{32} = S_3$$

(από τις διαθέσιμες ποσότητες ξύλου των δασών)

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = z_{11} + z_{12} + z_{13}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = z_{21} + z_{22} + z_{23}$$

(από τον περιορισμό ότι έρχεται σε ένα σταθμό μεταφόρτωσης πρέπει να φεύγει)

$$z_{11} + z_{21} = \Delta_1$$

$$z_{12} + z_{22} = \Delta_2$$

$$z_{13} + z_{23} = \Delta_3$$

(από τις ποσότητες χαρτιού που ζητούν οι αποθήκες)

$$x_{ik}, z_{kj} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Με τον ίδιο τρόπο ο περιορισμός ότι κάθε δραστηριότητα εκτελείται από ένα μόνο άτομα εκφράζεται με το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\sum_{i=1}^n x_{i1} = x_{11} + x_{21} + \dots + x_{n1} = 1$$

.....

$$\sum_{i=1}^n x_{in} = x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{nn} = 1.$$

Τέλος ζητείται η βελτιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

Έτσι το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος της μεταφοράς μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\max (\text{ή } \min) z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

με τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Το σημαντικό όμως είναι ότι η επίλυση του προβλήματος της εκχώρησης ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού δίνει πάντα βέλτιστες λύσεις οι μεταβλητές των οποίων παίρνουν τιμές 0 ή 1. Αυτή η ιδιότητα έχει αποδειχθεί από τον Birkhoff το 1946.

Στον ορισμό του προβλήματος της εκχώρησης κάναμε την υπόθεση ότι ο αριθμός m των ατόμων είναι ίσος με τον αριθμό n των δραστηριοτήτων. Προφανώς σε πραγματικές εφαρμογές του προβλήματος της εκχώρησης η συνθήκη αυτή σπάνια ικανοποιείται και ο κανόνας είναι $m \neq n$. Όπως όμως και στα προβλήματα της μεταφοράς και της μεταφόρτωσης η περίπτωση $m \neq n$ αντιμετωπίζεται με πολύ απλό τρόπο και δεν δημιουργείται κανένα ουσιαστικό πρόβλημα:

- Αν $m > n$ τότε προστίθενται οι $n+1, n+2, \dots, m$ εικονικές δραστηριότητες και τίθεται $c_{ij} = 0$ για $i = 1, 2, \dots, m$, και $j = n+1, n+2, \dots, m$.
- Αν $m < n$ τότε προστίθενται οι $m+1, m+2, \dots, n$ εικονικά άτομα και τίθεται $c_{ij} = 0$ για $i = m+1, m+2, \dots, n$, και $j = 1, 2, \dots, n$.

3.15 Ασκήσεις

1. Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού γραφικά:

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned}x_2 &\leq 10 \\2x_1 + 5x_2 &\leq 60 \\x_1 + x_2 &\leq 18 \\3x_1 + x_2 &\leq 44 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

2. Δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 10x_1 + 20x_2$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned}-x_1 &+ 2x_2 \leq 10 \\x_1 &+ x_2 \leq 8 \\5x_1 &+ 3x_2 \leq 30 \\x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Να λυθεί γραφικά.

3. Δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned}x_1 &+ 2x_2 \leq 10 \text{ (πόρος 1)} \\3x_1 &+ x_2 \leq 15 \text{ (πόρος 2)} \\&+ x_2 \leq 4 \text{ (πόρος 3)} \\x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

α) Να λυθεί γραφικά.

β) Να λυθεί με τη μέθοδο Simplex.

γ) Προσδιορίστε τις τιμές των βοηθητικών μεταβλητών για τους τρεις πόρους από τον τελικό πίνακα Simplex.

δ) Να γίνει ανάλυση ευαισθησίας ως προς την μεταβολή των δεξιών μελών των περιορισμών.

ε) Να γίνει ανάλυση ευαισθησίας ως προς την μεταβολή των συντελεστών της αντικειμενικής.

4. Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού γραφικά:

$$\max z = 6x_1 + 5x_2$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned}3x_1 &+ x_2 \leq 160 \\x_1 &\leq 40 \\&x_2 \leq 130 \\x_1 &\geq 80 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

5. Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού γραφικά:

$$\max z = 7x_1 + 10x_2$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcll} x_1 & & \leq & 36 \\ & x_2 & \leq & 12 \\ x_1 & + & 4x_2 & \leq 60 \\ 2x_1 & + & x_2 & \geq 30 \\ x_1 & - & x_2 & \geq 0 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

6. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 6x_1 - 2x_2$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcll} x_1 & - & x_2 & \leq 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & \leq 6 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

α) Να γίνει η γραφική επίλυση του προβλήματος.

β) Να λυθεί με τη μέθοδο Simplex.

γ) Να γίνει ανάλυση ευαισθησίας ως προς την μεταβολή των δεξιών μελών των περιορισμών.

δ) Να γίνει ανάλυση ευαισθησίας ως προς την μεταβολή των συντελεστών της αντικειμενικής.

7. Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού γραφικά:

$$\max z = 5x_1 + 6x_2$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcll} x_1 & - & -2x_2 & \geq 2 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & \geq 2 \\ & x_1, x_2 & \text{μη περιορισμένες ως προς το πρόσημο.} \end{array}$$

8. Να γίνει η γραφική επίλυση του παρακάτω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcll} 2x_1 & + & x_2 & \leq 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & \geq 12 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

9. Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού γραφικά:

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcll} x_1 & + & x_2 & \leq 10 \\ x_1 & & = & 5 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

10. Μετατρέψτε το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού στην τυποποιημένη μορφή:

$$\min z = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4$$

με τους περιορισμούς

$$4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 14$$

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 2$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ και x_4 μη περιορισμένη ως προς το πρόσημο.

11. Να μετατραπεί το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε τυποποιημένη μορφή:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq -5$$

$$-6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 10$$

$x_1, x_2 \geq 0$, x_3 μη περιορισμένη ως προς το πρόσημο.

12. Να μετατραπεί το προηγούμενο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε τυποποιημένη μορφή σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Ο πρώτος περιορισμός γίνεται $x_1 + x_2 - x_3 \leq -5$.

β) Ο δεύτερος περιορισμός γίνεται $-6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \geq 4$.

γ) Ο τρίτος περιορισμός γίνεται $x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 10$.

δ) Η μεταβλητή x_3 περιορίζεται ως προς το πρόσημο, δηλαδή $x_3 \geq 0$.

ε) Η μεταβλητή x_1 είναι μη περιορισμένη ως προς το πρόσημο.

στ) Η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται $\min z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$.

13. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

με τους περιορισμούς

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

α) Να λυθεί με τη μέθοδο Simplex.

β) Να γίνει ανάλυση ευαισθησίας ως προς την μεταβολή των δεξιών μελών των περιορισμών.

γ) Να γίνει ανάλυση ευαισθησίας ως προς την μεταβολή των συντελεστών της αντικειμενικής.

14. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

με τους περιορισμούς

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 180 \quad (\text{πόρος 1})$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 30 \quad (\text{πόρος 2})$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 60 \quad (\text{πόρος 3})$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

α) Λύστε το πρόβλημα με τη μέθοδο Simplex.

- β) Προσδιορίστε τις τιμές των βοηθητικών μεταβλητών για τους τρεις πόρους και περιγράψτε τη σημασία τους.
- γ) Να γίνει ανάλυση ευαισθησίας ως προς την μεταβολή των δεξιών μελών των περιορισμών.
- δ) Να γίνει ανάλυση ευαισθησίας ως προς την μεταβολή των συντελεστών της αντικειμενικής.

15. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 20x_1 + 25x_2 - 5x_3 + 30x_4$$

με τους περιορισμούς

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 45 \quad (\text{πόρος 1})$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \leq 30 \quad (\text{πόρος 2})$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

α) Λύστε το πρόβλημα με τη μέθοδο Simplex.

- β) Προσδιορίστε τις τιμές των βοηθητικών μεταβλητών για τους τρεις πόρους και περιγράψτε τη σημασία τους.

16. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = x_1 + x_2$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 \leq 5$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

α) Να λυθεί με τη μέθοδο Simplex.

- β) Να γίνει ανάλυση ευαισθησίας ως προς την μεταβολή των δεξιών μελών των περιορισμών.
- γ) Να γίνει ανάλυση ευαισθησίας ως προς την μεταβολή των συντελεστών της αντικειμενικής.

17. Έστω το σύνολο των περιορισμών ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού:

$$x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 46$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 10.$$

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Simplex για να λύσετε το πρόβλημα υποθέτοντας ότι η αντικειμενική συνάρτηση δίνεται ως ακολούθως:

α) $\max z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4.$

β) $\max z = -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4.$

γ) $\max z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4.$

δ) $\min z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 8x_4.$

ε) $\min z = 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4.$

18.Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Simplex για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 16x_1 + 15x_2$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcl} 40x_1 & + & 31x_2 \leq 124 \\ -x_1 & + & x_2 \leq 1 \\ x_1 & & \leq 3 \\ & & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

19.Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Simplex για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \\ 2x_1 & + & x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

20.Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Simplex για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 & - & 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 \leq 50 \\ 5x_1 & + & 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 \leq 40 \\ 4x_1 & - & 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 20 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

21.Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Simplex για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & & \leq 3 \\ & x_3 + x_4 & \leq 2 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

22.Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Simplex για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 & + & 3x_2 \leq 12 \\ 4x_1 & + & x_2 \leq 8 \\ 4x_1 & - & x_2 \leq 8 \\ & & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

23.Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Simplex για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

24.Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Simplex για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

25.Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Simplex για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 3x_1 + x_2$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

26.Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Simplex για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 20x_1 + 10x_2 + x_3$$

με τους περιορισμούς

$$3x_1 - 3x_2 + 5x_3 \leq 50$$

$$x_1 + x_3 \leq 10$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

27.Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο δύο φάσεων για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

με τους περιορισμούς

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

28. Έστω το σύνολο των περιορισμών:

$$-2x_1 + 3x_2 = 3 \quad (1)$$

$$4x_1 + 5x_2 \geq 10 \quad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5 \quad (3)$$

$$6x_1 + 7x_2 \leq 3 \quad (4)$$

$$4x_1 + 8x_2 \geq 5 \quad (5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (6).$$

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των δύο φάσεων για να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού:

α) $\max z = 5x_1 + 6x_2$ με τους περιορισμούς (1), (3), (4) και (6).

β) $\max z = 2x_1 - 7x_2$ με τους περιορισμούς (1), (2), (4), (5) και (6).

γ) $\min z = 3x_1 + 6x_2$ με τους περιορισμούς (3), (4), (5) και (6).

δ) $\min z = 4x_1 + 6x_2$ με τους περιορισμούς (1), (2), (5) και (6).

ε) $\min z = 3x_1 + 2x_2$ με τους περιορισμούς (1), (5) και (6).

29. Έστω το σύνολο των περιορισμών:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των δύο φάσεων για να λύσετε το πρόβλημα που ορίζει το σύνολο των περιορισμών υποθέτοντας ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι ως ακολούθως:

α) $\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$.

β) $\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$.

γ) $\max z = x_1 + 2x_2 + x_3$.

δ) $\min z = 4x_1 - 8x_2 + 3x_3$.

30. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των δύο φάσεων για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

31. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των δύο φάσεων για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 30$$

$$3x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 0$$

$$x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

32.Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των δύο φάσεων για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 2x_2 \leq 4 \\ x_1 & + & x_2 = 3 \\ & & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

33.Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των δύο φάσεων για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 20x_1 + 15x_2$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & + & x_2 \geq 5 \\ -3x_1 & + & 2x_2 \leq 3 \\ x_1 & + & x_2 \geq 3 \\ & & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

34.Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των δύο φάσεων για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 45x_1 + 27x_2 + 18x_3 + 36x_4$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 & + & x_2 + x_3 + 8x_4 = 30 \\ 2x_1 & + & 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 30 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

35.Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των δύο φάσεων για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 4x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ 3x_1 & + & 2x_2 \geq 6 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

36.Μια βιομηχανία αυτοκινήτων έχει τρία εργοστάσια τα οποία παράγουν 100, 80, 50 αυτοκίνητα αντίστοιχα κάθε μέρα. Τα αυτοκίνητα εξάγονται σε τέσσερις χώρες που απαιτούν 40, 80, 60 και 50 αυτοκίνητα αντίστοιχα. Το κόστος μεταφοράς ανά αυτοκίνητο, δίνεται από τον πίνακα:

	Χώρα			
Εργοστάσιο	1	2	3	4
1	75	90	65	70
2	63	72	74	75
3	74	88	75	88

Διατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα μεταφοράς.

37.Μια χώρα καλύπτει τις ετήσιες ανάγκες της σε πετρέλαιο, από τρεις πετρελαιοπαραγωγικές χώρες. Η ποσότητα που διαθέτουν οι χώρες αυτές είναι 3, 6, και 7 εκατομμύρια τόνοι αντίστοιχα το χρόνο. Η παράδοση θα γίνει σε τρία διυλιστήρια σε ποσότητες 5, 5 και 6 εκατομμύρια τόνους αντίστοιχα. Το κόστος μεταφοράς σε χιλιάδες δραχμές για κάθε τόνο δίνεται από τον επόμενο πίνακα:

Πετρελαιοπαραγωγικές χώρες	Διυλιστήρια		
	1	2	3
1	3	3.5	2.8
2	3.6	3.7	3.1
3	2.7	3.2	3.4

Διατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα μεταφοράς.

38.Η ελληνική εταιρεία σιδηροδρόμων (Ο.Σ.Ε.) έχει στη διάθεσή της 3 ατμομηχανές στην Αθήνα, 2 στη Λάρισα και 3 στη Θεσσαλονίκη. Για να καλύψει τις ανάγκες που δημιουργήθηκαν από τις εκλογές χρειάζονται 2 ατμομηχανές στην Αλεξανδρούπολη, 3 στη Καλαμάτα και 3 στη Λαμία. Οι αποστάσεις σε χιλιόμετρα ανάμεσα στις διάφορες πόλεις δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

	Αθήνα	Λάρισα	Θεσσαλονίκη
Αλεξανδρούπολη	880	525	341
Λαμία	215	146	328
Καλαμάτα	283	579	764

Διατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα μεταφοράς ώστε η ολική απόσταση που θα διατρέξουν οι ατμομηχανές να είναι η ελάχιστη.

39.Μια επιχείρηση έχει τρία εργοστάσια, που παράγουν ένα προϊόν, που διανέμεται σε τέσσερα κέντρα κατανάλωσης. Τα εργοστάσια 1, 2 και 3 παράγουν 12, 17 και 11 φορτία προϊόντος αντίστοιχα κάθε μήνα. Κάθε κέντρο κατανάλωσης χρειάζεται το μήνα 10 φορτία. Η απόσταση, σε χιλιόμετρα, από κάθε εργοστάσιο σε κάθε κέντρο κατανάλωσης δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	Κέντρο Κατανάλωσης			
Εργοστάσιο	1	2	3	4
1	800	1300	400	700
2	1100	1400	600	1000
3	600	1200	800	900

Το κόστος μεταφοράς κάθε φορτίου είναι 100 χρηματικές μονάδες συν 0.5 χρηματικές μονάδες ανά χιλιόμετρο. Ποιες ποσότητες πρέπει να αποσταλούν από κάθε εργοστάσιο σε κάθε κέντρο κατανάλωσης για να είναι το συνολικό κόστος μεταφοράς ελάχιστο.

Διαμορφώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα μεταφοράς.

40.Ο Κώστας θέλει 3 ακριβώς δοχεία μύρας σήμερα και τουλάχιστον 4 δοχεία αύριο. Ο Δημήτρης μπορεί να του πουλήσει το πολύ 4 δοχεία με τιμή 1,54 χρηματικές μονάδες ανά δοχείο σήμερα και 1,50 χρηματικές μονάδες αύριο, ενώ ο Γιάννης μπορεί του πουλήσει το πολύ 5 δοχεία με τιμή 1,60 χρηματικές μονάδες ανά δοχείο σήμερα και 1,44 χρηματικές μονάδες αύριο. Ο Κώστας επιθυμεί να προσδιορίσει πως θα κάνει τις αγορές του, για να ικανοποιήσει τη ζήτησή του με το ελάχιστο κόστος.

Διατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα μεταφοράς.

41.Η διοίκηση μιας συνεταιριστικής εταιρείας αποφάσισε να παραχθούν τρία νέα προϊόντα από τη διαθέσιμη παραγωγική δυνατότητα των πέντε εργοστασίων της. Το ανά μονάδα κόστος παραγωγής του πρώτου προϊόντος θα είναι 90, 82, 92, 84 και 86 χρηματικές μονάδες στα εργοστάσια 1, 2, 3, 4, και 5 αντίστοιχα. Το ανά μονάδα κόστος παραγωγής του δεύτερου προϊόντος θα είναι 62, 58, 64, 56 και 58 χρηματικές μονάδες 1, 2, 3, 4 και 5 αντίστοιχα. Το ανά μονάδα κόστος παραγωγής του τρίτου προϊόντος θα είναι 76, 70 και 80 χρηματικές μονάδες στα εργοστάσια 1, 2 και 3 αντίστοιχα, ενώ τα εργοστάσια 4 και 5 δεν έχουν την δυνατότητα να παράγουν το προϊόν αυτό. Οι προβλέψεις των πωλήσεων δείχνουν ότι πρέπει να παράγονται κάθε μέρα 5000, 3000 και 4000 μονάδες των προϊόντων 1, 2 και 3 αντίστοιχα. Τα εργοστάσια 1, 2, 3, 4 και 5 μπορούν να παράγουν 2000, 3000, 2000, 3000 και 5000 μονάδες τη μέρα, άσχετα από το προϊόν ή το συνδυασμό προϊόντων. Η διοίκηση θέλει να μάθει πως να καταναείμει τα νέα προϊόντα στα εργοστάσια για να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος παραγωγής.

Διατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα μεταφοράς.

42.Ας υποθέσουμε ότι η Αγγλία, η Γαλλία και η Ισπανία παράγουν όλη την παγκόσμια σταριού, κριθαριού και βρώμης. Για την παγκόσμια ζήτηση σταριού χρειάζεται να καλλιεργηθούν 125 εκατομμύρια εκτάρια. Όμοια για το κριθάρι χρειάζονται 60 εκατομμύρια εκτάρια και για τη βρώμη 75 εκατομμύρια εκτάρια. Η διαθέσιμη έκταση εδάφους για το σκοπό αυτό είναι στην Αγγλία, τη Γαλλία και την Ισπανία 70, 110 και 80 εκατομμύρια εκτάρια αντίστοιχα. Ο αριθμός των ωρών εργασίας που χρειάζονται στις τρεις χώρες για την παραγωγή ενός εκταρίου προϊόντος είναι:

Χώρα	Προϊόν		
	Στάρι	Κριθάρι	Βρώμη
Αγγλία	18	15	12
Γαλλία	13	12	10
Ισπανία	16	12	16

Ακόμη το κόστος εργασίας ανά ώρα για την παραγωγή των προϊόντων δίνεται στον παρακάτω πίνακα σε χρηματικές μονάδες:

Χώρα	Προϊόν		
	Στάρι	Κριθάρι	Βρώμη
Αγγλία	3.00	2.70	2.30
Γαλλία	2.40	3.00	2.50
Ισπανία	3.30	2.80	2.10

Διατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα μεταφοράς.

43.Τέσσερις υποψήφιοι έδωσαν εξετάσεις σε τέσσερις διαγωνισμούς του δημοσίου για μια θέση στη νομαρχία, στην εθνική τράπεζα, στο υπουργείο δικαιοσύνης και στο υπουργείο μεταφορών. Η βαθμολογία των τεσσάρων υποψηφίων στους τέσσερις διαγωνισμούς δίνεται από τον επόμενο πίνακα:

Υποψήφιος	Νομαρχία	Εθν. Τράπεζα	Υπ. Δικαιοσύνης	Υπ. Μεταφορών
1	9	8	7	6
2	5	4	3	2
3	3	4	5	6
4	7	8	9	10

Να βρεθεί η καλύτερη τοποθέτηση των τεσσάρων υποψηφίων στις τέσσερις θέσεις.

Διατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα εκχώρησης.

44. Μια επιχείρηση έχει να εκτελέσει πέντε έργα. Τα έργα αυτά μπορούν να εκτελεστούν σε επτά από τα εργοστάσιά της. Επειδή το μέγεθος των έργων είναι πολύ μεγάλο δεν είναι δυνατή η εκτέλεση περισσότερων από ένα έργο σε κάθε εργοστάσιο. Οι εκτιμήσεις του κόστους εκτέλεσης των έργων σε χρηματικές μονάδες στα διάφορα εργοστάσια δίνονται από τον παρακάτω πίνακα κόστους:

	Εργοστάσιο						
Έργο	1	2	3	4	5	6	7
1	85	62	74	53	73	76	45
2	62	44	59	48	61	50	60
3	59	69	62	38	49	56	43
4	60	70	55	47	64	70	58
5	39	45	60	50	50	60	48

Ζητείται να προσδιοριστεί η αντιστοιχία έργων και εργοστασίων έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το ολικό κόστος εκτέλεσής τους.

Διατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα εκχώρησης.

45. Ο Εκπολιτιστικός σύλλογος οργανώνει σεμινάρια πάνω σε θέματα Πολεοδομίας, Ενέργειας, Οικολογίας, Ρύπανσης και Αθλητισμού. Κάθε μέρα της εβδομάδας γίνεται και ένα διαφορετικό σεμινάριο. Η προσέλευση του κοινού στις διάφορες ημέρες της εβδομάδας σε αριθμό συμμετεχόντων στα διάφορα θέματα συνοψίζεται στον παρακάτω πίνακα:

	Σεμινάριο				
Ημέρα	Ενέργειας	Οικολογίας	Ρύπανσης	Πολεοδομίας	Αθλητισμού
Δευτέρα	40	50	25	45	30
Τρίτη	50	20	45	35	40
Τετάρτη	30	40	35	25	35
Πέμπτη	25	30	60	50	20
Παρασκευή	45	60	30	45	50

Ο σύλλογος ενδιαφέρεται να προσδιορίσει την αντιστοιχία εκείνη των σεμιναρίων και ημερών της εβδομάδας έτσι ώστε να μεγιστοποιείται ο ολικός αριθμός των ατόμων που παρακολουθούν τα σεμινάρια.

Διατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα εκχώρησης.

46. Τέσσερις καινούργιοι σταθμοί εξυπηρέτησης οι Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 και Σ_4 , πρόκειται να τοποθετηθούν σε μια περιοχή. Υπάρχουν πέντε δυνατές θέσεις οι Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 , Θ_4 και Θ_5 . Σε κάθε ζεύγος (Σ_i, Θ_j) , $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ αντιστοιχεί και ένας αριθμός ατόμων που εξυπηρετούνται. Τα στοιχεία αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Σταθμοί Εξυπηρέτησης	Θέσεις				
	Θ_1	Θ_2	Θ_3	Θ_4	Θ_5
Σ_1	180	200	195	150	170
Σ_2	140	130	150	120	145
Σ_3	150	140	135	150	130
Σ_4	200	180	180	190	160

Ζητείται να προσδιοριστεί η αντιστοιχία σταθμών εξυπηρέτησης, και θέσεων εγκατάστασης έτσι ώστε καμιά θέση εγκατάστασης να μην αντιστοιχείται με περισσότερους από έναν σταθμούς εξυπηρέτησης, κανένας σταθμός εξυπηρέτησης να μην αντιστοιχείται σε περισσότερες από μία θέσεις εγκατάστασης και να μεγιστοποιείται ο ολικός αριθμός εξυπηρετούμενων ατόμων.

Διατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα εκχώρησης.

47. Δίνεται το πρόβλημα 21, όπου οι προβλέψεις έχουν μειωθεί σε 2000, 1200 και 1600 μονάδες τη μέρα για τα προϊόντα 1, 2 και 3 αντίστοιχα. Έτσι, κάθε εργοστάσιο τώρα μπορεί να παράγει όλη τη ζητούμενη ποσότητα για κάθε προϊόν. Για το λόγο αυτό, η διοίκηση της εταιρείας αποφάσισε κάθε προϊόν να παράγεται σ' ένα μόνο εργοστάσιο, δηλαδή να εκχωρηθεί από ένα προϊόν σ' ένα από τα τρία εργοστάσια και κανένα προϊόν στα άλλα δύο. Αντικειμενικός σκοπός της διοίκησης είναι να γίνουν οι εκχωρήσεις αυτές έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος παραγωγής των ποσοτήτων των τριών προϊόντων.

Διατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα εκχώρησης.

48. Ο προπονητής της εθνικής μας κολυμβητικής ομάδας πρέπει να επιλέξει τους κολυμβητές για τα αγωνίσματα των 100 μέτρων, που θα αποσταλούν σε μια διεθνή συνάντηση. Επειδή οι περισσότεροι από τους κολυμβητές είναι γρήγοροι σε περισσότερα από ένα αγωνίσματα των 100 μέτρων δεν είναι φανερό ποιος κολυμβητής θ' αγωνίζεται σε κάθε είδος. Οι πέντε πιο γρήγοροι κολυμβητές και οι καλύτεροι τους χρόνοι σε δευτερόλεπτα για κάθε είδος (για τα 50 μέτρα) δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Είδος	Κολυμβητές				
	A	B	Γ	Δ	E
Ύπτιο	37.7	32.9	33.8	37.0	35.4
Πρόσθιο	43.4	33.1	42.2	34.7	41.8
Πεταλούδα	33.3	28.5	38.9	30.4	33.6
Ελεύθερο	29.2	26.4	29.6	28.5	31.1

Διατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα εκχώρησης.

Κεφάλαιο 4ο: Δικτυωτή Ανάλυση

4.1 Εισαγωγή

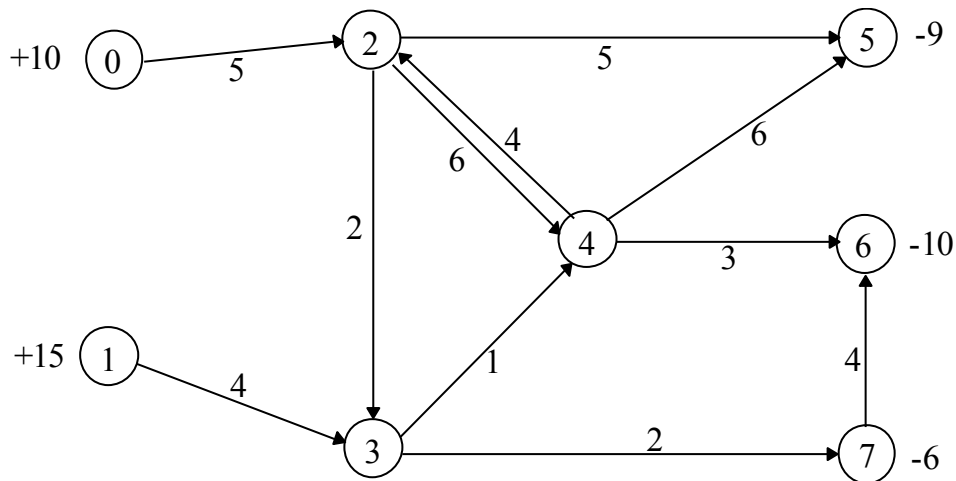
Η δικτυωτή ανάλυση έχει παίξει σημαντικό ρόλο στην Ηλεκτρολογία. Όμως, ορισμένες έννοιες και τεχνικές της δικτυωτής ανάλυσης είναι πολύ χρήσιμες και σε άλλες επιστήμες. Για παράδειγμα, σπουδαίες εφαρμογές της έχουν γίνει στην κυβερνητική, στη μελέτη συστημάτων μεταφορών καθώς και στον προγραμματισμό και στον έλεγχο των προγραμμάτων έρευνας και ανάπτυξης. Άλλες περιοχές εφαρμογών είναι οι δομές των κοινωνικών ομάδων, τα συστήματα επικοινωνίας, η σχεδίαση παραγωγής και άλλα. Έτσι, ορισμένες απόψεις της δικτυωτής ανάλυσης (γνωστές ως θεωρία δικτύων ροής) έγιναν χρήσιμα εργαλεία της επιχειρησιακής έρευνας.

Ένα βασικό πρόβλημα της δικτυακής θεωρίας, που συχνά συναντιέται στα συστήματα μεταφοράς, είναι η εύρεση της συντομότερης διαδρομής σε ένα δίκτυο. Ένα παραπλήσιο πρόβλημα είναι η επιλογή των ακμών ενός δικτύου, που έχουν το συντομότερο συνολικό μήκος και δίνουν μία διαδρομή για κάθε ζεύγος κορυφών. Ένα άλλο πρόβλημα είναι η μεγιστοποίηση της ροής σ' ένα δίκτυο που συνδέει μία προέλευση με ένα προορισμό. Τέλος, ο προγραμματισμός και ο έλεγχος των έργων είναι μία τέταρτη περιοχή προβλημάτων, όπου γίνεται εφαρμογή των τεχνικών της δικτυωτής ανάλυσης και ειδικότερα της μεθόδου CPM (Critical Path Method).

4.2 Το πρόβλημα του ελάχιστου κόστους ροής σ' ένα δίκτυο

Το πρόβλημα του ελάχιστου κόστους ροής σ' ένα δίκτυο το οποίο μπορεί να θεωρηθεί και ως ένα πρόβλημα μεταφόρτωσης ορίζεται ως εξής:

Δίνεται ένα δίκτυο μεταφόρτωσης το οποίο είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα κόμβων και τόξων όπως αυτό του σχήματος 4.1.



Σχήμα 4.1

Σε κάθε κόμβο j αντιστοιχεί ένας αριθμός b_j όπου αν:

- $b_j > 0$, τότε ο κόμβος j ονομάζεται πηγή ή προέλευση με διαθέσιμη ποσότητα ίση με b_j .
- $b_j < 0$, τότε ο κόμβος j ονομάζεται δέκτης ή σημείο ζήτησης ή σημείο προορισμού με ζητούμενη ποσότητα ίση με $|b_j|$.
- $b_j = 0$, τότε ο κόμβος j ονομάζεται ενδιάμεσος κόμβος ή σημείο μεταφόρτωσης.

Για παράδειγμα στο δίκτυο του σχήματος 4.1, οι κόμβοι 0 και 1 είναι πηγές, οι κόμβοι 5, 6 και 7 είναι σημεία προορισμού και οι κόμβοι 2, 3 και 4 είναι ενδιάμεσοι κόμβοι.

Σε κάθε τόξο (i,j) που συνδέει δύο κόμβους (i και j) αντιστοιχεί ένας αριθμός c_{ij} που αναπαριστά το κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος από το κόμβο i στον κόμβο j .

Έστω x_{ij} η ποσότητα του προϊόντος που μεταφέρεται από τον κόμβο i στον κόμβο j .

Μια βασική προϋπόθεση για να έχει το πρόβλημα εφικτές λύσεις είναι ότι στο δίκτυο η ολική ζήτηση είναι ίση με την ολική προσφορά. Υποθέτουμε, δηλαδή ότι $\sum_{j=1}^m b_j = 0$ για ένα δίκτυο

m κόμβων. Η υπόθεση αυτή που βοηθά σημαντικά τη μαθηματική διατύπωση και επεξεργασία του προβλήματος θα δούμε παρακάτω ότι δεν περιορίζει καθόλου τις εφαρμογές του προβλήματος του ελάχιστου κόστους ροής.

Σ' ένα δίκτυο μεταφόρτωσης ένα πρόγραμμα φόρτωσης $x = \{x_{ij} : (i, j) \text{ τόξο του δικτύου}\}$ ονομάζεται εφικτό αν και μόνο αν, $x_{ij} \geq 0$, $\forall (i, j)$ τόξο του δικτύου και

$$\sum_{(i,j)} x_{ij} - \sum_{(j,i)} x_{ji} = b_i, \text{ για κάθε κόμβο } i.$$

Με άλλα λόγια το x είναι εφικτό, αν και μόνο αν οι διακινούμενες ποσότητες x_{ij} πέρα από τον περιορισμό μη αρνητικότητας ικανοποιούν και τους παρακάτω περιορισμούς:

i. Η εισερχόμενη ποσότητα σε κάθε σημείο ζήτησης μείον την εξερχόμενη ποσότητα από το σημείο αυτό να είναι ίση με τη ζητούμενη ποσότητα στο σημείο αυτό. Π.χ. στο σημείο ζήτησης 7 του δικτύου του σχήματος 4.1 έχουμε ότι:

$$x_{37} - x_{76} = 6.$$

ii. Η εξερχόμενη ποσότητα από κάθε πηγή μείον την εισερχόμενη ποσότητα στο σημείο αυτό είναι ίση με την προσφερόμενη ποσότητα στο σημείο αυτό.

iii. Η εισερχόμενη ποσότητα σε κάθε ενδιάμεσο κόμβο είναι ίση με την εξερχόμενη ποσότητα στο σημείο αυτό. Π.χ. στο κόμβο 2 του δικτύου του σχήματος 4.1 έχουμε ότι:

$$x_{02} + x_{42} = x_{23} + x_{24} + x_{25}.$$

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα το πρόβλημα του ελάχιστου κόστους ροής σ' ένα δίκτυο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Να προσδιοριστεί ένα εφικτό πρόγραμμα φόρτωσης που να ελαχιστοποιεί το ολικό κόστος διακίνησης ενός προϊόντος μέσα σ' ένα δίκτυο.

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος του ελάχιστου κόστους ροής σ' ένα δίκτυο έχει ως εξής:

$$\min z(x) = \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij}$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)} x_{ij} - \sum_{(j,i)} x_{ji} &= b_i, \text{ για κάθε κόμβο } i \\ x_{ij} &\geq 0, \text{ για κάθε τόξο του δικτύου } (i, j). \end{aligned} \quad (1)$$

Οι περιορισμοί (1) στη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος που είναι η μαθηματική αναπαράσταση των περιορισμών (i), (ii) και (iii) ονομάζονται εξισώσεις συντήρησης της ροής ή εξισώσεις ισορροπίας της ροής και εκφράζουν το γεγονός ότι η ροή δεν δημιουργείται ούτε καταστρέφεται μέσα στο δίκτυο.

Π.χ. η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος του ελάχιστου κόστους ροής για το δίκτυο του σχήματος 4.1 θα είναι η ακόλουθη:

$$\min z(x) = 5x_{02} + 4x_{13} + 2x_{23} + 6x_{24} + 5x_{25} + x_{34} + 2x_{37} + 4x_{42} + 6x_{45} + 3x_{46} + 4x_{76}$$

με τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{rcccccccc} x_{02} & & & & & & & & = 10 \\ & x_{13} & & & & & & & = 15 \\ x_{02} & & -x_{23} & -x_{24} & -x_{25} & & & +x_{42} & = 0 \\ & x_{13} & +x_{23} & & & -x_{34} & -x_{37} & & = 0 \\ & & & x_{24} & & +x_{34} & & -x_{42} & -x_{45} & -x_{46} & = 0 \\ & & & & x_{25} & & & & +x_{45} & & = 9 \\ & & & & & & & x_{46} & +x_{76} & & = 10 \\ & & & & & & x_{37} & & & -x_{76} & = 6 \end{array}$$

$$X_{02}, X_{13}, X_{23}, X_{24}, X_{25}, X_{34}, X_{37}, X_{42}, X_{45}, X_{46}, X_{76} \geq 0.$$

Θα πρέπει να τονιστεί ότι η υποθέση

προσφερόμενη ποσότητα = ζητούμενη ποσότητα

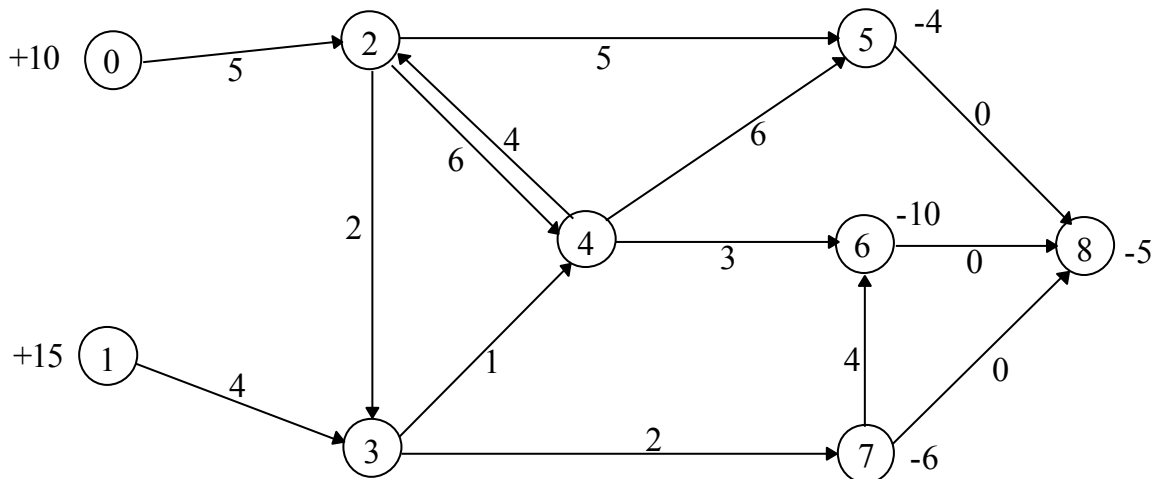
δεν εισάγει κανένα ουσιαστικό περιορισμό στις δυνατότητες εφαρμογής του προβλήματος του ελάχιστου κόστους ροής. Αυτό γιατί αν

- η προσφερόμενη ποσότητα είναι μεγαλύτερη από τη ζητούμενη ποσότητα τότε έχουμε

$\sum_{j=1}^m b_j > 0$ και προσθέτουμε έναν εικονικό κόμβο ζήτησης $m+1$ με ζητούμενη ποσότητα

$-\sum_{j=1}^m b_j$ και για κάθε κόμβο ζήτησης i εισάγουμε το τόξο $(i, m+1)$ με κόστος $c_{i, m+1} = 0$. Π.χ.

αν στο δίκτυο του σχήματος 4.1 ο κόμβος 5 είχε ζήτηση 4, η προσφερόμενη ποσότητα (25) θα ήταν μεγαλύτερη από την ζητούμενη (20) και άρα θα έπρεπε να εισάγουμε έναν κόμβο 8 με ζήτηση 5 όπως φαίνεται στον σχήμα 4.2



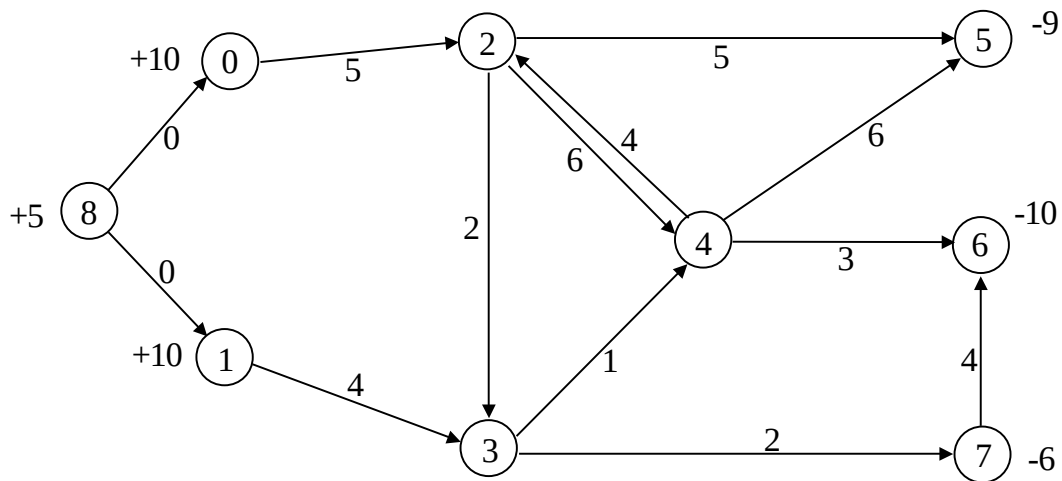
Σχήμα 4.2

- η ζητούμενη ποσότητα είναι μεγαλύτερη από τη προσφερόμενη ποσότητα τότε έχουμε

$\sum_{j=1}^m b_j < 0$ και προσθέτουμε έναν εικονικό κόμβο προσφοράς $m+1$ με προσφερόμενη

ποσότητα ίση με $-\sum_{j=1}^m b_j$ και για κάθε κόμβο προσφοράς i εισάγουμε το τόξο $(m+1, i)$ με

κόστος $c_{m+1, i} = 0$. Π.χ. αν στο δίκτυο του σχήματος 4.1 ο κόμβος 1 είχε ζήτηση 10, η ζητούμενη ποσότητα (25) θα ήταν μεγαλύτερη από την προσφερόμενη (20) και άρα θα έπρεπε να εισάγουμε έναν κόμβο 8 με προσφορά 5 όπως φαίνεται στον σχήμα 4.3



Σχήμα 4.3

Ανάλογα με τα είδη των κόμβων, της ροής και των τόξων το γενικό πρόβλημα του ελάχιστου κόστους ροής σε δίκτυα παρουσιάζει πολλές και ενδιαφέρουσες εφαρμογές. Ο παρακάτω πίνακας δίνει μια συνοπτική εικόνα των δυνατών εφαρμογών.

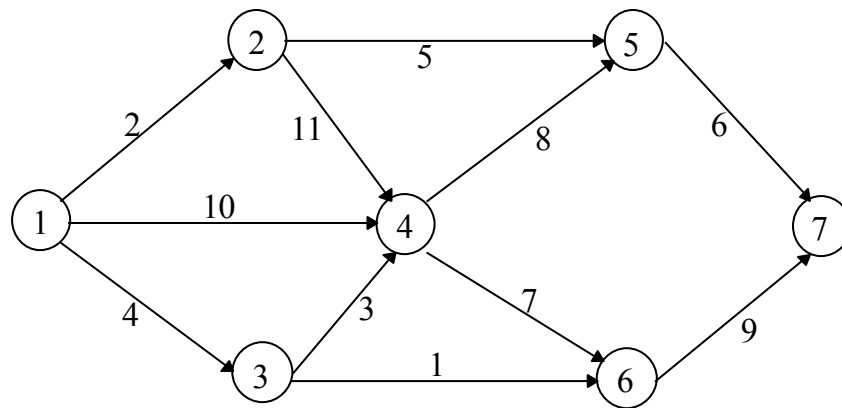
	Περιφερειακά δίκτυα μεταφοράς	Δίκτυα επικοινωνίας	Υδάτινα δίκτυα
Κόμβοι i	αποθήκες, εργοστάσια, λιμάνια, στάσεις αυτοκινήτων, σταθμοί εξυπηρέτησης, κ.λ.π.	κέντρα τηλεφωνικά, κέντρα επικοινωνίας, κέντρα αναμετάδοσης, δορυφορικά κέντρα, κ.λ.π.	δεξαμενές, κόμβοι διανομής, λίμνες, κ.λ.π.
Τόξα (i, j)	δρόμοι, σιδηροδρομικές γραμμές, ακτοπλοϊκά δίκτυα, κ.λ.π.	κανάλια και πιο γενικά μέσα επικοινωνίας	αρδευτικά κανάλια, ποτάμια και γενικά μέσα μεταφοράς και διανομής νερού
Ροές x_{ij}	Διάφορα είδη εμπορευμάτων, αυτοκίνητα, κ.λ.π.	Διάφορα είδη πληροφοριών	Νερό

Προφανώς ο αριθμός των δυνατών δικτύων δεν εξαντλείται με τον παραπάνω πίνακα με τον οποίο επιχειρείται να δοθεί μια γεύση μόνο των δικτύων στα οποία το πρόβλημα του ελάχιστου κόστους ροής μπορεί να εφαρμοστεί.

4.3 Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής αφορά την εύρεση της συντομότερης διαδρομής μεταξύ μιας πηγής (προέλευσης) και ενός προορισμού (σημείο ζήτησης) διαμέσου ενός δικτύου, όταν είναι γνωστές οι αποστάσεις των αντίστοιχων ακμών του δικτύου. Αν και έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι επίλυσης (αλγόριθμοι), εκείνη που θα παρουσιάσεται είναι ίσως η πιο γρήγορη και η πιο εύκολη. Ο αλγόριθμος αυτός ξεκινάει από την αρχή του δικτύου και προσδιορίζει διαδοχικά τη συντομότερη διαδρομή για κάθε ένα από τους κόμβους του δικτύου.

Έστω ότι έχουμε το δίκτυο του σχήματος 4.4



Σχήμα 4.4

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Να ευρεθεί η συντομότερη διαδρομή μεταξύ των κόμβων 1 και 7.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να μετατραπεί σε ένα πρόβλημα ελάχιστου κόστους ροής ως ακολούθως:

- Ο κόμβος 1 αποκτά διαθεσιμότητα μιας μονάδας και ο κόμβος 7 την απαίτηση μίας μονάδας.
 - Κάθε ακμή αποκτά ανώτατο όριο δυνατότητας ροής την μονάδα.
- και να λυθεί με τη μέθοδο Simplex.

Σ' αυτή την παράγραφο όπως είπαμε και πιο πάνω θα παρουσιαστεί ένας αλγόριθμος εύρεσης της συντομότερης διαδρομής που είναι πιο αποτελεσματικός από τη μέθοδο Simplex.

Σ' αυτόν το αλγόριθμο ορίζονται δύο μεταβλητές, τις:

d_{ij} = η απόσταση μεταξύ γειτονικών κόμβων i και j

u_j = η συντομότερη απόσταση του κόμβου j από τον κόμβο 1 και u_1 (αρχικός κόμβος) = 0.

Η διαδικασία του αλγορίθμου σταματάει όταν το u_T (τελευταίος κόμβος) έχει υπολογισθεί.

Το u_j υπολογίζεται ως εξής:

$u_j = \min \{ \text{συντομότερη απόσταση σε ένα αμέσως προηγούμενο κόμβο } i + \text{την απόσταση του παρόντος κόμβου } j \text{ από τον προηγούμενο κόμβο } i \} = \min_i \{ u_i + d_{ij} \}.$

Δηλαδή η συντομότερη απόσταση u_j του κόμβου j από την αρχή μπορεί να υπολογισθεί μόνο μετά τον υπολογισμό των συντομότερων αποστάσεων από την αρχή των προηγούμενων κόμβων i που συνδέονται με τον j με μία μόνο ακμή. Έτσι η διαδικασία του αλγορίθμου ξεκινάει από την αρχή και για κάθε κόμβο υπολογίζει την συντομότερη διαδρομή από την αρχή και από ποιον προηγούμενο κόμβο αυτή προέρχεται.

Φτάνοντας στο τέλος, ακολουθούμε αντίστροφη πορεία για να βρούμε την συντομότερη διαδρομή. Δηλαδή για τον τελευταίο κόμβο βρίσκουμε μέσω ποιου προηγούμενου κόμβου έχουμε την συντομότερη διαδρομή. Στη συνέχεια κάνουμε την ίδια δουλειά για αυτόν το κόμβο μέχρι να φτάσουμε στην αρχή. Έτσι έχουμε βρει τους κόμβους που συνθέτουν την συντομότερη διαδρομή στο δίκτυο.

Αν εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο στο δίκτυο του σχήματος 4.4 θα έχουμε:

$$u_1 \text{ (αρχικός κόμβος)} = 0$$

$$u_2 = u_1 + d_{12} = 0 + 2 = 2 \text{ (από τον κόμβο 1)}$$

$$u_3 = u_1 + d_{13} = 0 + 4 = 4 \text{ (από τον κόμβο 1)}$$

$$u_4 = \min \{u_1 + d_{14}, u_2 + d_{24}, u_3 + d_{34}\} = \min \{0 + 10, 2 + 11, 4 + 3\} = 7 \text{ (από τον κόμβο 3)}$$

$$u_5 = \min \{u_2 + d_{25}, u_4 + d_{45}\} = \min \{2 + 5, 7 + 8\} = 7 \text{ (από τον κόμβο 2)}$$

$$u_6 = \min \{u_3 + d_{36}, u_4 + d_{46}\} = \min \{4 + 1, 7 + 7\} = 5 \text{ (από τον κόμβο 3)}$$

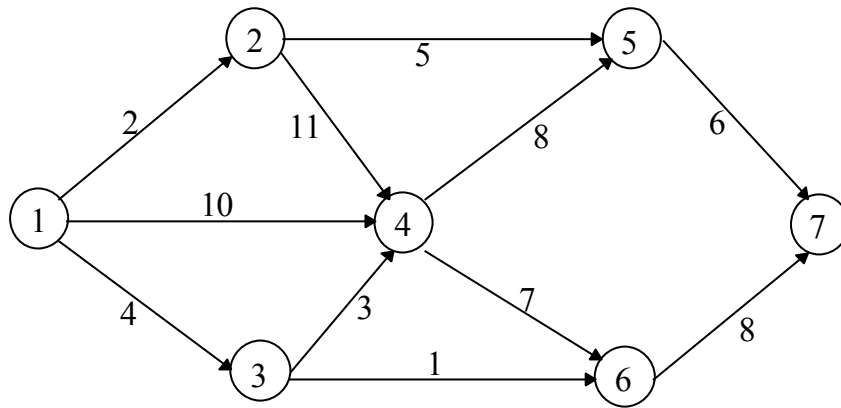
$$u_7 \text{ (τελικός κόμβος)} = \min \{u_5 + d_{57}, u_6 + d_{67}\} = \min \{7 + 6, 5 + 9\} = 13 \text{ (από τον κόμβο 5)}$$

Ξεκινώντας τώρα από το τέλος προς την αρχή έχουμε ότι:

- η συντομότερη διαδρομή του κόμβου 7 από τον κόμβο 1 είναι 13 και επιτυγχάνεται αν πάμε στον κόμβο 7 από τον κόμβο 5.
- η συντομότερη διαδρομή του κόμβου 5 από τον κόμβο 1 επιτυγχάνεται αν πάμε στον κόμβο 5 από τον κόμβο 2.
- η συντομότερη διαδρομή του κόμβου 2 από τον κόμβο 1 επιτυγχάνεται αν πάμε στον κόμβο 2 από τον κόμβο 1 που είναι και αρχικός κόμβος.

Άρα η ελάχιστη απόσταση από τον κόμβο 1 στον κόμβο 7 είναι 13 και ακολουθεί την διαδρομή $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7$.

Έστω ότι στο δίκτυο του σχήματος 4.4 η ακμή (6,7) είχε τιμή 8 αντί για 9 δηλαδή έχουμε το δίκτυο του σχήματος 4.5



Σχήμα 4.5

Αν εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο στο νέο δίκτυο θα έχουμε:

$$u_1 \text{ (αρχικός κόμβος)} = 0$$

$$u_2 = u_1 + d_{12} = 0 + 2 = 2 \text{ (από τον κόμβο 1)}$$

$$u_3 = u_1 + d_{13} = 0 + 4 = 4 \text{ (από τον κόμβο 1)}$$

$$u_4 = \min \{u_1 + d_{14}, u_2 + d_{24}, u_3 + d_{34}\} = \min \{0 + 10, 2 + 11, 4 + 3\} = 7 \text{ (από τον κόμβο 3)}$$

$$u_5 = \min \{u_2 + d_{25}, u_4 + d_{45}\} = \min \{2 + 5, 7 + 8\} = 7 \text{ (από τον κόμβο 2)}$$

$$u_6 = \min \{u_3 + d_{36}, u_4 + d_{46}\} = \min \{4 + 1, 7 + 7\} = 5 \text{ (από τον κόμβο 3)}$$

$$u_7 \text{ (τελικός κόμβος)} = \min \{u_5 + d_{57}, u_6 + d_{67}\} = \min \{7 + 6, 5 + 8\} = 13 \text{ (από τον κόμβο 5 και 6)}$$

Ξεκινώντας τώρα από το τέλος προς την αρχή έχουμε ότι:

- η συντομότερη διαδρομή του κόμβου 7 από τον κόμβο 1 είναι 13 και επιτυγχάνεται αν πάμε στον κόμβο 7 από τον κόμβο 5 ή από τον κόμβο 6. Αφού η συντομότερη διαδρομή επιτυγχάνεται αν πάμε στον τελευταίο κόμβο από δύο κόμβους (5 και 6) θα έχουμε δύο συντομότερες διαδρομές με μήκος 13. Πρώτα θα βρούμε την συντομότερη διαδρομή που επιτυγχάνεται αν πάμε στον κόμβο 7 από τον κόμβο 5 και μετά αν πάμε από τον κόμβο 6.
- η συντομότερη διαδρομή του κόμβου 5 από τον κόμβο 1 επιτυγχάνεται αν πάμε στον κόμβο 5 από τον κόμβο 2.
- η συντομότερη διαδρομή του κόμβου 2 από τον κόμβο 1 επιτυγχάνεται αν πάμε στον κόμβο 2 από τον κόμβο 1 που είναι και αρχικός κόμβος.
- η συντομότερη διαδρομή του κόμβου 6 από τον κόμβο 1 επιτυγχάνεται αν πάμε στον κόμβο 6 από τον κόμβο 3.
- η συντομότερη διαδρομή του κόμβου 3 από τον κόμβο 1 επιτυγχάνεται αν πάμε στον κόμβο 3 από τον κόμβο 1 που είναι και αρχικός κόμβος.

Άρα η ελάχιστη απόσταση από τον κόμβο 1 στον κόμβο 7 είναι 13 και ακολουθεί δύο διαδρομές τη διαδρομή $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ και τη διαδρομή $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7$.

Αυτό που θα πρέπει να τονιστεί είναι ότι αν και μέχρι τώρα το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής έχει περιγραφεί σε σχέση με την ελαχιστοποίηση της απόστασης μεταξύ της αρχής και του τέλους ενός δικτύου, αυτό δεν σημαίνει ότι οι τιμές των ακμών πρέπει οποσδήποτε να είναι αποστάσεις. Για παράδειγμα, οι ακμές μπορεί να αντιστοιχούν σε δραστηριότητες κάποιου είδους, όπου η τιμή για κάθε ακμή είναι το κόστος της δραστηριότητας. Το πρόβλημα τότε θα είναι να βρεθεί η ακολουθία των δραστηριοτήτων που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος. Ακόμη η τιμή της ακμής μπορεί να είναι χρόνος που χρειάζεται για την εκτέλεση της δραστηριότητας. Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα θα είναι να βρεθεί η ακολουθία των δραστηριοτήτων που ελαχιστοποιεί το συνολικό χρόνο. Έτσι, η λέξη “απόσταση” μπορεί να θεωρηθεί και ως κόστος ή χρόνος ή κάποια άλλη ποσότητα.

4.4 Το πρόβλημα του ελάχιστου “ζευγνύοντος” δένδρου

Σ’ αυτή την παράγραφο θα εξεταστεί μια παραλλαγή του προβλήματος της συντομότερης διαδρομής, το πρόβλημα του ελάχιστου ζευγνύοντος δένδρου. Σ’ αυτό το πρόβλημα αντί να βρεθεί η συντομότερη διαδρομή ενός δικτύου, επιλέγονται οι ακμές του δικτύου, που έχουν το συντομότερο συνολικό μήκος και δίνουν μία διαδρομή για κάθε ζεύγος κόμβων. Για να γίνει αυτό οι ακμές θα πρέπει να επιλεχθούν με τέτοιο τρόπο, ώστε το δίκτυο που θα προκύψει να σχηματίζει ένα δένδρο (δηλαδή να υπάρχει μία διαδρομή που να συνδέει κάθε ζεύγος κόμβων και να μην δημιουργούνται κύκλοι) που “ζευγνύει” (δηλαδή συνδέει) όλους τους κόμβους. Με άλλα λόγια, το πρόβλημα είναι να βρεθεί το ζευγνύον δένδρο με το ελάχιστο συνολικό μήκος.

Το πρόβλημα αυτό έχει ορισμένες πολύ σπουδαίες πρακτικές εφαρμογές. Για παράδειγμα, μπορεί να είναι πολύ χρήσιμο στον προγραμματισμό δικτύων μεταφοράς, όπου πρέπει να βρεθεί κάποια διαδρομή, που να συνδέει όλους τους κόμβους με τον πιο οικονομικό τρόπο. Οι κόμβοι θα είναι σταθμοί, οι ακμές θα είναι λωρίδες μεταφοράς (αυτοκινητόδρομοι, αεροδιάδρομοι, κ.λ.π.) και οι αποστάσεις θα είναι το κόστος των λωρίδων μεταφοράς. Στα πλαίσια αυτά, το πρόβλημα του ελάχιστου ζευγνύοντος δένδρου είναι ο προσδιορισμός εκείνων των λωρίδων μεταφοράς, που εξυπηρετούν όλους τους σταθμούς με το ελάχιστο συνολικό κόστος. Άλλο παράδειγμα είναι ο προγραμματισμός μεγάλων δικτύων επικοινωνίας.

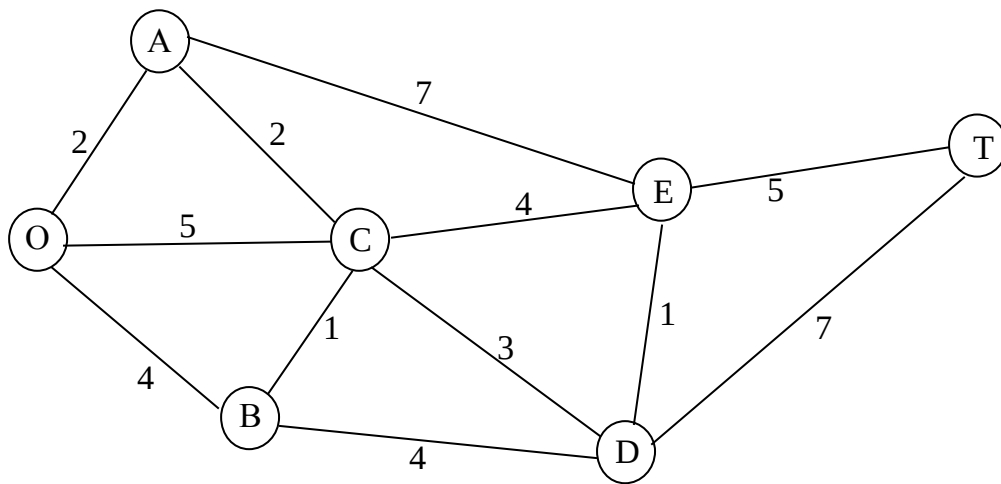
Το πρόβλημα του ελάχιστου ζευγνύοντος δένδρου μπορεί να λυθεί απ’ ευθείας, επειδή συμβαίνει να είναι ένα από τα λίγα προβλήματα της επιχειρησιακής έρευνας που αρχίζοντας από οποιαδήποτε κορυφή (κόμβο) θα οδηγηθούμε στο τέλος στην άριστη λύση. Έτσι, στο πρώτο στάδιο, αρχίζοντας από έναν οποιοδήποτε κόμβο, επιλέγουμε τη συντομότερη δυνατή ακμή με κάποιο άλλο κόμβο, χωρίς να ανησυχούμε για την επίδραση που μπορεί να έχει στις επόμενες αποφάσεις. Στο δεύτερο στάδιο προσδιορίζουμε τον μη συνδεδεμένο κόμβο, που είναι πλησιέστερα σε οποιοδήποτε από τους συνδεδεμένους κόμβους και μετά προσθέτουμε την αντίστοιχη ακμή στο δίκτυο. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται, μέχρι να συνδεθούν όλοι οι κόμβοι. Το δίκτυο που προκύπτει εξασφαλίζεται ότι είναι ένα ελάχιστο ζευγνύον δένδρο.

Δηλαδή, ο αλγόριθμος του ελάχιστου ζευγνύοντος δένδρου είναι ο εξής:

1. Επέλεξε έναν κόμβο αυθαίρετα και σύνδεσέ τον με τον πλησιέστερο κόμβο.
2. Βρες μη συνδεδεμένο κόμβο που είναι πλησιέστερος σε έναν συνδεδεμένο κόμβο και σύνδεσε αυτούς τους κόμβους.
3. Επανάλαβε το βήμα 2 μέχρι να συνδεθούν όλοι οι κόμβοι του δικτύου.

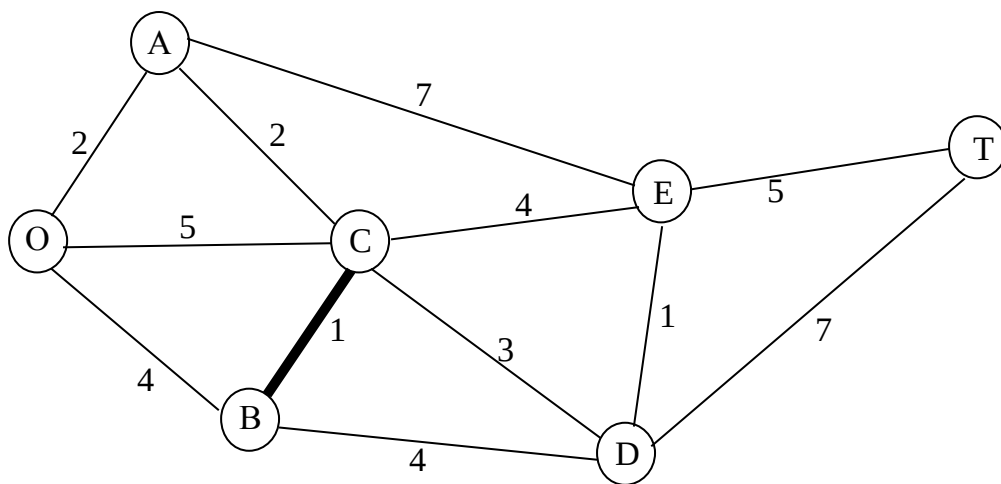
Σημείωση: Ισοβαθμίες για τον πλησιέστερο κόμβο στο βήμα 1 ή τον πλησιέστερο μη συνδεδεμένο κόμβο στο βήμα 2 μπορούν να λυθούν αυθαίρετα και ο αλγόριθμος να δώσει την βέλτιστη λύση. Όμως, τέτοιες ισοβαθμίσεις είναι μια ένδειξη ότι μπορεί να υπάρχουν (αλλά όχι απαραίτητα) περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις.

Ας δούμε τώρα πως εφαρμόζεται ο αλγόριθμος του ελάχιστου ζευγνύοντος δένδρου στην πράξη. Έστω ότι έχουμε το δίκτυο του σχήματος 4.6



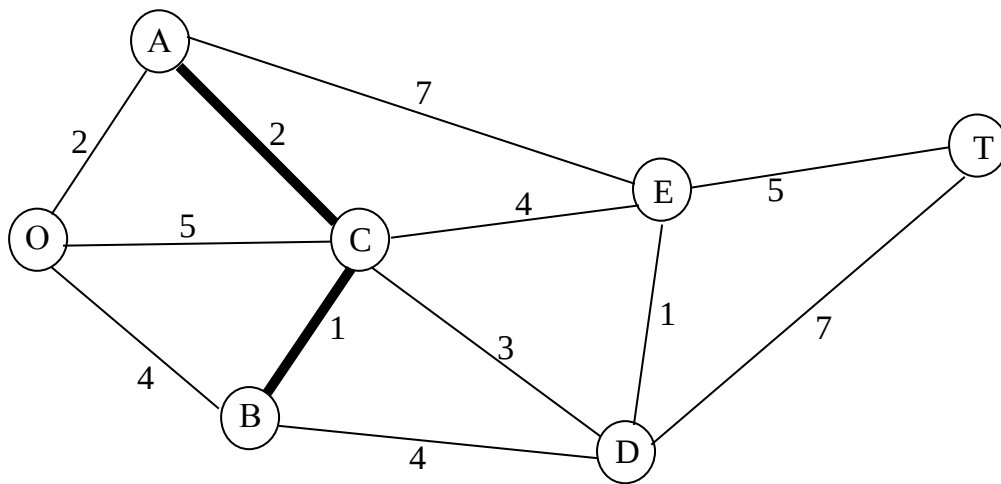
Σχήμα 4.6

Επιλέγουμε ως πρώτο κόμβο του ελαχίστου ζευγνύον δένδρου τον κόμβο C. Ο πλησιέστερος μη συνδεδεμένος κόμβος στον κόμβο C είναι ο B. Άρα συνδέουμε τον κόμβο C με τον κόμβο B όπως φαίνεται στο σχήμα 4.7.



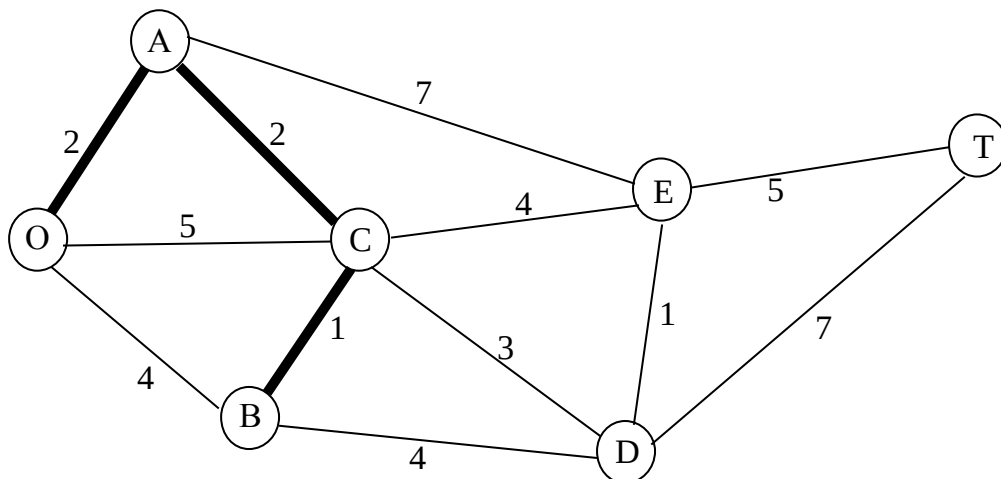
Σχήμα 4.7

Ο πλησιέστερος μη συνδεδεμένος κόμβος στον κόμβο C ή στον κόμβο B είναι ο A (πλησιέστερος στον C). Άρα συνδέουμε τον κόμβο C με τον κόμβο A όπως φαίνεται στο σχήμα 4.8.



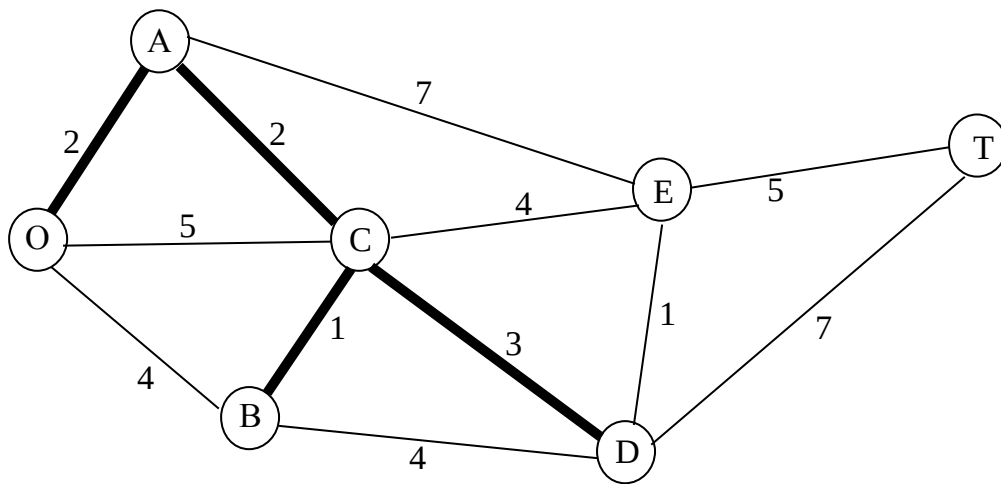
Σχήμα 4.8

Ο πλησιέστερος μη συνδεδεμένος κόμβος στους κόμβους C, B ή A είναι ο O (πλησιέστερος στον A). Άρα συνδέουμε τον κόμβο A με τον κόμβο O όπως φαίνεται στο σχήμα 4.9.



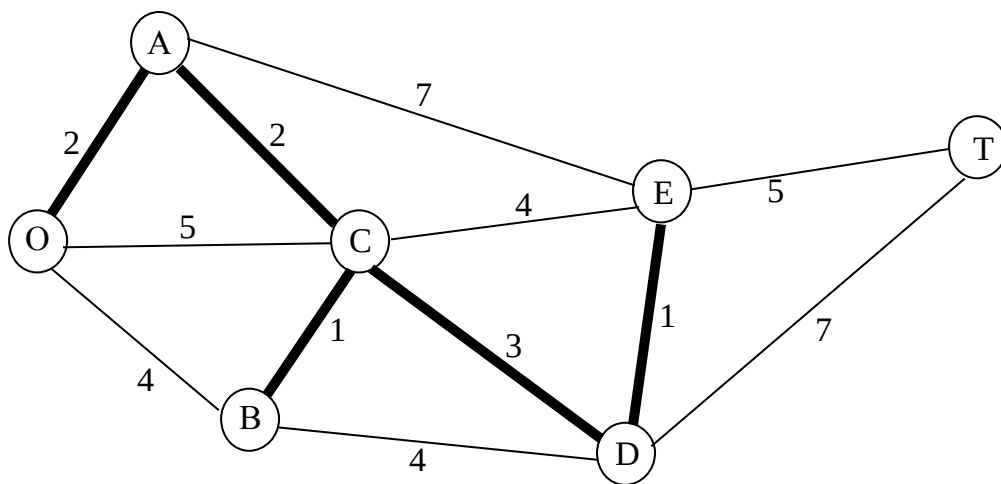
Σχήμα 4.9

Ο πλησιέστερος μη συνδεδεμένος κόμβος στους κόμβους C, B, A ή O είναι ο D (πλησιέστερος στον C). Άρα συνδέουμε τον κόμβο C με τον κόμβο D όπως φαίνεται στο σχήμα 4.10.



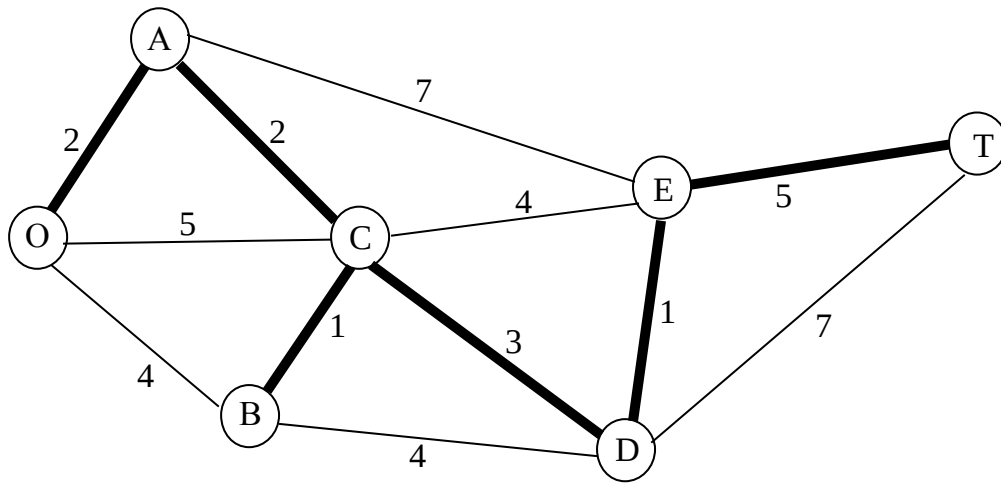
Σχήμα 4.10

Ο πλησιέστερος μη συνδεδεμένος κόμβος στους κόμβους C, B, A, O ή D είναι ο E (πλησιέστερος στον D). Άρα συνδέουμε τον κόμβο D με τον κόμβο E όπως φαίνεται στο σχήμα 4.11.



Σχήμα 4.11

Ο πλησιέστερος μη συνδεδεμένος κόμβος στους κόμβους C, B, A, O, D ή E είναι ο T (πλησιέστερος στον E). Άρα συνδέουμε τον κόμβο E με τον κόμβο T όπως φαίνεται στο σχήμα 4.12.



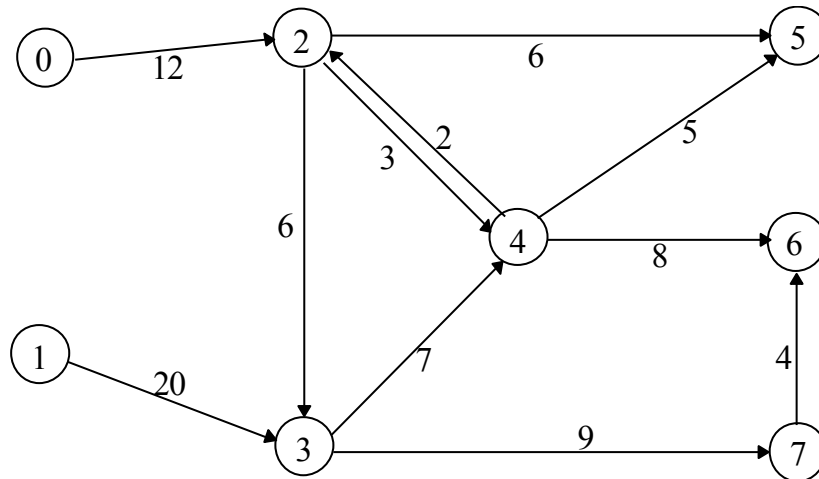
Σχήμα 4.12

Τώρα όλοι οι κόμβοι είναι συνδεδεμένοι και επομένως το δίκτυο των συνδεδεμένων κόμβων του σχήματος 4.12 ορίζει και το ελάχιστο ζευγνύον δένδρο του δικτύου του σχήματος 4.6.

4.5 Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής διατυπώνεται ως εξής:

Δίνεται ένα δίκτυο κόμβων, το οποίο περιέχει μία ή περισσότερες πηγές και έναν ή περισσότερους δέκτες όπως αυτό του σχήματος 4.13. Για κάθε τόξο (i, j) του δικτύου υπάρχει ανώτατο όριο στην ποσότητα που μπορεί να σταλεί από τον κόμβο i στον κόμβο j που ονομάζεται δυναμικότητα (capacity) του τόξου (i, j) και συμβολίζεται b_{ij} .



Σχήμα 4.13

Ροή στο δίκτυο είναι ένα διάνυσμα $x = \{x_{ij} : (i, j) \text{ τόξο του δικτύου}\}$ τα στοιχεία του οποίου ικανοποιούν τους περιορισμούς:

- $0 \leq x_{ij} \leq b_{ij}$ για κάθε τόξο (i, j) του δικτύου
- $\sum_{(i,j)} x_{ij} - \sum_{(j,i)} x_{ji} = 0$ για κάθε κόμβο i του δικτύου.

Με τον περιορισμό (i) εκφράζεται η υπόθεση ότι η ροή κάθε τόξου (i, j) του δικτύου είναι μη αρνητικός αριθμός και μικρότερος ή ίσος της δυναμικότητας b_{ij} και με τον περιορισμό (ii) ότι η ροή διατηρείται σε κάθε κόμβο i . Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε κόμβο i η ποσότητα εκροής $\sum_{(i,j)} x_{ij}$ είναι ίση με την ποσότητα εισροής $\sum_{(j,i)} x_{ji}$. Έτσι για τις πηγές η ολική εκροή είναι ίση

με την εισροή στο δίκτυο, η οποία ονομάζεται τιμή της ροής, ενώ για τους δέκτες η ολική εισροή είναι ίση με την εκροή από το δίκτυο. Με άλλα λόγια επειδή η ροή διατηρείται σε κάθε κόμβο η εισροή στο δίκτυο θα πρέπει να είναι ίση με την εκροή από το δίκτυο.

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα το πρόβλημα της μέγιστης ροής σ' ένα δίκτυο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Προσδιόρισε μια ροή με μέγιστη τιμή.

Π.χ. για το δίκτυο του σχήματος 4.13 η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος της μέγιστης ροής θα είναι η ακόλουθη:

Έστω ότι το δίκτυο έχει δύο πηγές (0 και 1) και δύο δέκτες (5, 6) και η εισροή στο δίκτυο στις πηγές 0 και 1 να είναι x_{S0} και x_{S1} ενώ η εκροή από το δίκτυο στους δέκτες 5 και 6 είναι x_{5T} και x_{6T} τότε θα έχουμε

$$\max z = x_{S0} + x_{S1}$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcl}
X_{S0} & -X_{02} & = 0 \\
X_{S1} & -X_{13} & = 0 \\
X_{02} & -X_{23} & -X_{24} & -X_{25} & +X_{42} & = 0 \\
X_{13} & +X_{23} & & -X_{34} & -X_{37} & = 0 \\
& & X_{24} & +X_{34} & -X_{42} & -X_{45} & -X_{46} & = 0 \\
& & & X_{25} & & +X_{45} & & -X_{5T} & = 0 \\
& & & & & & X_{46} & +X_{76} & -X_{6T} & = 0 \\
& & & & & & & & -X_{76} & -X_{7T} & = 0 \\
& & & & X_{37} & & & & & &
\end{array}$$

$$x_{02} \leq 12, x_{13} \leq 20, x_{23} \leq 6, x_{24} \leq 3, x_{25} \leq 6, x_{34} \leq 7, x_{37} \leq 9, x_{42} \leq 2, x_{45} \leq 5, x_{46} \leq 8, x_{76} \leq 4$$

καὶ

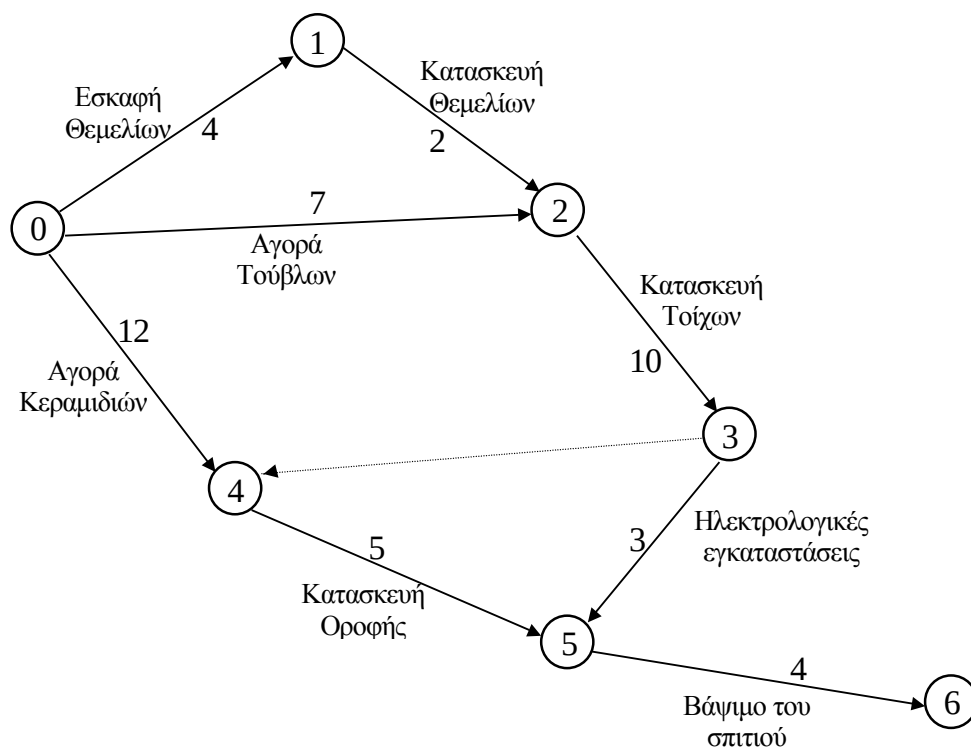
$$X_{02}, X_{13}, X_{23}, X_{24}, X_{25}, X_{34}, X_{37}, X_{42}, X_{45}, X_{46}, X_{76} \geq 0.$$

4.6 Critical Path Analysis (Μέθοδος του κρίσιμου μονοπατιού)

Η πετυχημένη διοίκηση των μεγάλων έργων χρειάζεται προσεχτικό προγραμματισμό, σχεδιασμό και συντονισμό αλληλοσυνδεόμενων δραστηριοτήτων (εργασιών). Για να γίνει αυτό, αλγόριθμοι βασισμένοι στη χρησιμοποίηση των δικτύων αναπτύχθηκαν κυρίως στο τέλος της δεκαετίας του 1950. Μια από τις πιο γνωστές μεθόδους είναι η μέθοδος του κρίσιμου μονοπατιού (Critical Path Method - CPM).

Αν και αρχικά η CPM χρησιμοποιήθηκε στην αξιολόγηση των προγραμμάτων έρευνας και ανάπτυξης στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε για τον έλεγχο πολλών άλλων ειδικών περιπτώσεων. Για παράδειγμα χρησιμοποιήθηκε σε έργα προγραμματισμού κατασκευών, προγραμματισμού ηλεκτρονικών υπολογιστών, σχεδίασης προγραμμάτων συντήρησης, εγκατάστασης συστημάτων Η/Υ κ.α. Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε επίσης στην παραγωγή κινηματογραφικών ταινιών, σε προεκλογικές εκστρατείες καθώς και σε σύνθετες χειρουργικές επεμβάσεις.

Η CPM χρησιμοποιεί ένα δίκτυο για την γραφική αναπαράσταση των αλληλεξαρτήσεων μεταξύ των δραστηριοτήτων (εργασιών) του έργου, όπως αυτό του σχήματος 4.14 που δείχνει το αρχικό δίκτυο για την κατασκευή ενός σπιτιού. Η δικτυωτή αυτή αναπαράσταση δείχνει όλες τις προτεραιότητες των αλληλεξαρτήσεων όσον αφορά τη σειρά με την οποία πρέπει να γίνουν οι εργασίες.



Σχήμα 4.14

Κάθε τόξο του δικτύου αντιπροσωπεύει μια δραστηριότητα, που είναι μια εργασία που απαιτείται από το έργο (π.χ. κατασκευή σπιτιού). Κάθε κόμβος αντιπροσωπεύει ένα γεγονός, που συνήθως ορίζεται ως τη χρονική στιγμή κατά την οποία τελειώνουν όλες οι δραστηριότητες που κατευθύνονται στον κόμβο αυτό. Τα τόξα δείχνουν την ακολουθία με την

οποία πρέπει να γίνουν τα γεγονότα. Ακόμα, ένα γεγονός πρέπει να προηγείται της έναρξης των δραστηριοτήτων που ξεκινούν από αυτό τον κόμβο. Ο κόμβος προς τον οποίο οδηγούνται όλες οι δραστηριότητες είναι το γεγονός του τέλους του προγραμματισμού έργου (π.χ. η κατασκευή του σπιτιού). Τα διακεκομμένα τόξα δεν αντιπροσωπεύουν πραγματικές δραστηριότητες, αλλά σχέσεις προτεραιότητας που ονομάζονται εικονικές δραστηριότητες. Για παράδειγμα υπάρχει μια εικονική δραστηριότητα από τον κόμβο 3 στον κόμβο 4, αφού η κατασκευή της οροφής δεν μπορεί να αρχίσει πριν κατασκευασθούν οι τοίχοι.

Μετά την κατασκευή του δικτύου για ένα έργο, το επόμενο βήμα είναι η εκτίμηση του χρόνου που χρειάζεται για καθεμία δραστηριότητα. Οι εκτιμήσεις αυτές για το παράδειγμά μας είναι οι αριθμοί που βρίσκονται δίπλα στα τόξα του σχήματος 4.14 (στο συγκεκριμένο παράδειγμα η μονάδα του χρόνου είναι η ημέρα). Οι χρόνοι αυτοί χρησιμοποιούνται για να υπολογιστούν δύο βασικές ποσότητες για κάθε γεγονός, ο νωρίτερος χρόνος του και ο αργότερος χρόνος του.

- Ο νωρίτερος χρόνος για ένα γεγονός είναι ο εκτιμηθείς χρόνος κατά τον οποίο θα πραγματοποιηθεί το γεγονός, εφόσον οι προηγούμενες δραστηριότητες αρχίσουν όσο το δυνατό γρηγορότερα.

Οι νωρίτεροι χρόνοι βρίσκονται εφόσον κάνουμε ένα προς τα εμπρός πέρασμα διαμέσου του δικτύου. Αρχίζοντας με τα αρχικά γεγονότα και εργαζόμενοι προς την κατεύθυνση των τελικών γεγονότων, υπολογίζουμε διαδοχικά το χρόνο στον οποίο θα πραγματοποιηθεί κάθε γεγονός, αν κάθε άμεσα προηγούμενο γεγονός πραγματοποιηθεί στον νωρίτερο χρόνο του και κάθε ενδιάμεση δραστηριότητα καταναλώνει μόνο τον εκτιμηθέντα χρόνο της, σύμφωνα με την διαδικασία που παρουσιάζεται στο πίνακα 4.1 (η διαδικασία εφαρμόζεται στο δίκτυο εργασιών 4.14).

Γεγονός	Άμεσα προηγούμενο γεγονός	Νωρίτερος χρόνος + Χρόνος δραστηριότητας	Μέγιστος νωρίτερος χρόνος
0	-	-	0
1	0	0 + 4	4
2	0 1	0 + 7 4 + 2	7
3	2	7 + 10	17
4	0 3	0 + 12 17 + 0	17
5	3 4	17 + 3 17 + 5	22
6	5	22 + 4	26

Πίνακας 4.1: Υπολογισμός νωρίτερων χρόνων

Επομένως ο νωρίτερος χρόνος στον οποίο μπορεί να τελειώσει το έργο (η κατασκευή του σπιτιού) είναι 26 ημέρες.

- Ο αργότερος χρόνος για ένα γεγονός είναι ο εκτιμηθείς χρόνος κατά τον οποίο μπορεί να πραγματοποιηθεί το γεγονός, χωρίς να καθυστερήσει η αποπεράτωση του έργου πέρα από τον ενωρίτερο χρόνο του.

Οι αργότεροι χρόνοι βρίσκονται διαδοχικά για τα γεγονότα, κάνοντας ένα προς τα πίσω πέρασμα διαμέσου του δικτύου. Αρχίζοντας με τα τελικά γεγονότα και εργαζόμενοι προς την κατεύθυνση των αρχικών γεγονότων, υπολογίζουμε κάθε φορά τον χρόνο κατά τον οποίο μπορεί να πραγματοποιηθεί το γεγονός, αν κάθε άμεσα επόμενο γεγονός πραγματοποιείται στον αργότερο χρόνο του και κάθε ενδιάμεση δραστηριότητα καταναλώνει μόνο τον εκτιμηθέντα χρόνο της, σύμφωνα με την διαδικασία που παρουσιάζεται στο πίνακα 4.2 (η διαδικασία εφαρμόζεται στο δίκτυο εργασιών 4.14) με νωρίτερο χρόνο για την αποπεράτωση του έργου τις 26 ημέρες.

Γεγονός	Άμεσα επόμενο γεγονός	Αργότερος χρόνος - Χρόνος δραστηριότητας	Ελάχιστος αργότερος χρόνος
6	-	-	26
5	6	26 - 4	22
4	5	22 - 5	17
3	4 5	17 - 0 22 - 3	17
2	3	17 - 10	7
1	2	7 - 2	5
0	1 2	5 - 4 7 - 7	0

Πίνακας 4.2: Υπολογισμός αργότερων χρόνων

- Ο χαλαρός χρόνος για ένα γεγονός είναι η διαφορά μεταξύ του αργότερου και του νωρίτερου χρόνου του. Ο χαλαρός χρόνος για μια δραστηριότητα (i, j) είναι η διαφορά μεταξύ του αργότερου χρόνου του γεγονότος j και του αθροίσματος του νωρίτερου χρόνου του γεγονότος i και του εκτιμηθέντος χρόνου της δραστηριότητας (i, j).

Δηλαδή, υποθέτοντας ότι δεν αλλάζει τίποτα στο πρόγραμμα, ο χαλαρός χρόνος για ένα γεγονός είναι ο χρόνος που μπορεί να καθυστερήσει το γεγονός χωρίς να καθυστερήσει η αποπεράτωση του έργου, ενώ ο χαλαρός χρόνος για μια δραστηριότητα είναι ο χρόνος που μπορεί να καθυστερήσει η δραστηριότητα χωρίς να καθυστερήσει το έργο. Ο υπολογισμός των χαλαρών χρόνων για το δίκτυο εργασιών 4.14 παρουσιάζεται στον πίνακα 4.3.

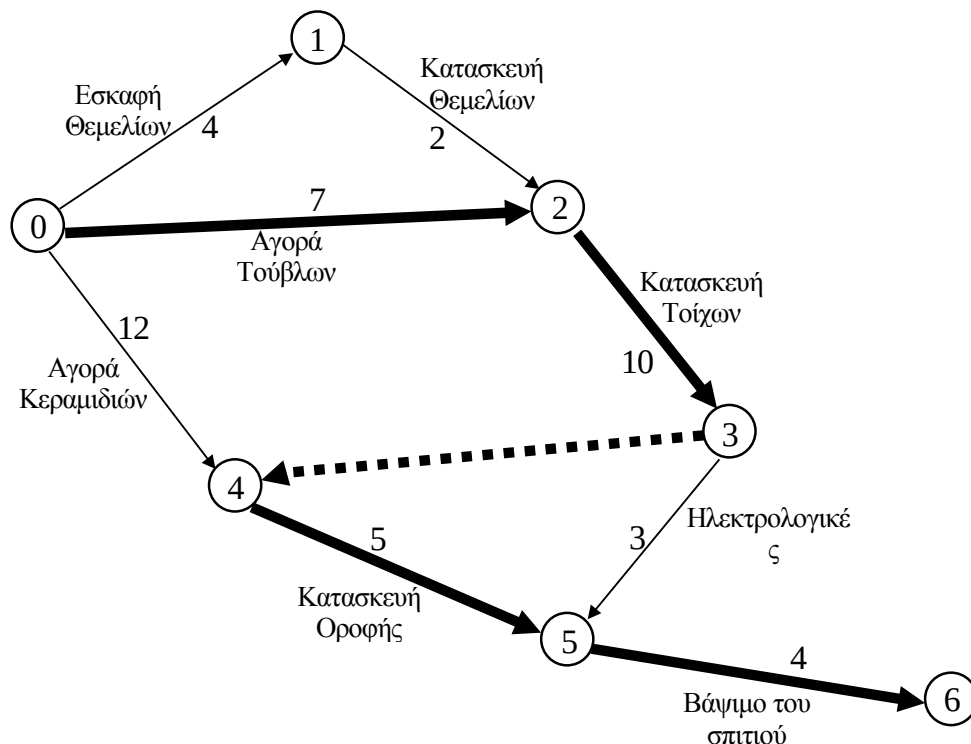
Γεγονός	Χαλαρός χρόνος	Δραστηριότητα	Χαλαρός χρόνος
0	$0 - 0 = 0$	(0, 1)	$5 - (0 + 4) = 1$

1	$5 - 4 = 1$	(0, 2)	$7 - (0 + 7) = 0$
2	$7 - 7 = 0$	(0, 4)	$17 - (0 + 12) = 5$
3	$17 - 17 = 0$	(1, 2)	$7 - (4 - 2) = 1$
4	$17 - 17 = 0$	(2, 3)	$17 - (7 + 10) = 0$
5	$22 - 22 = 0$	(3, 4)	$17 - (17 + 0) = 0$
6	$26 - 26 = 0$	(3, 5)	$22 - (17 + 3) = 2$
		(4, 5)	$22 - (17 + 5) = 0$
		(5, 6)	$26 - (22 + 4) = 0$

Πίνακας 4.3: Υπολογισμός χαλαρών χρόνων

- Ένα κρίσιμο μονοπάτι (Critical Path) για ένα έργο είναι ένας δρόμος διαμέσου του δικτύου τέτοιος ώστε όλες οι δραστηριότητες του δρόμου να έχουν μηδενικούς χαλαρούς χρόνους. (Όλες οι δραστηριότητες και τα γεγονότα που έχουν μηδενικούς χαλαρούς χρόνους πρέπει να βρίσκονται πάνω στο κρίσιμο μονοπάτι, ενώ τα άλλα δεν μπορούν).

Παρατηρώντας τα δεδομένα του πίνακα 4.3 βλέπουμε ότι στο δίκτυο εργασιών 4.14 υπάρχει ένα μόνο κρίσιμο μονοπάτι το $0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ το οποίο φαίνεται και στο σχήμα 4.15 με έντονα τόξα.



Σχήμα 4.15

Παρατήρηση: Είναι δυνατόν σε κάποιο έργο να υπάρχουν περισσότερα από ένα κρίσιμα μονοπάτια. Για παράδειγμα αν στο δίκτυο εργασιών 4.14 ο χρόνος της δραστηριότητας (1, 2) είναι 3 ημέρες αντί 2 ημέρες, τότε στο δίκτυο εργασιών θα έχουμε δύο κρίσιμα μονοπάτια το $0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ και το $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$.

Έτσι με τη μέθοδο του κρίσιμου μονοπατιού μπορούμε να απαντήσουμε σε δύο κύρια ερωτήματα του διευθυντή του έργου: ποιος είναι ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για την αποπεράτωση του έργου και ποιες εργασίες μπορούν να καθυστερήσουν και πόσο χωρίς να καθυστερήσει το έργο.

Τέλος η πληροφορία σχετικά με τους νωρίτερους και τους αργότερους χρόνους, τους χαλαρούς χρόνους και το κρίσιμο μονοπάτι είναι μεγάλης σημασίας για τον διευθυντή του έργου, αφού μεταξύ των άλλων, μπορεί να διερευνήσει την επίδραση των πιθανών βελτιώσεων στο σχέδιο του έργου, να προσδιορίσει που πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή για να παραμείνει το έργο στα χρονικά πλαίσια που έχουν οριστεί και να εκτιμήσει την επίδραση διάφορων αλλαγών στο πρόγραμμα.

Το πρόβλημα της εύρεσης του κρίσιμου μονοπατιού είναι πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να διατυπωθεί σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και λύθει με τις γενικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, αν και λόγω της ειδικής μορφής του, όπως είδαμε πιο πάνω, υπάρχουν ειδικοί αλγόριθμοι επίλυσής του.

Για να εκφρασθεί το πρόβλημα της εύρεσης του κρίσιμου μονοπατιού για το δίκτυο εργασιών 4.14 σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού πρέπει να οριστούν οι παρακάτω μεταβλητές απόφασης:

- t_0 : να είναι η αρχή για τις δραστηριότητες (εργασίες) (0, 1), (0, 2), (0, 4)
- t_1 : να είναι η αρχή για την δραστηριότητα (εργασία) (1, 2)
- t_2 : να είναι η αρχή για την δραστηριότητα (εργασία) (2, 3)
- t_3 : να είναι η αρχή για τις δραστηριότητες (εργασίες) (3, 4), (3, 5)
- t_4 : να είναι η αρχή για την δραστηριότητα (εργασία) (4, 5)
- t_5 : να είναι η αρχή για την δραστηριότητα (εργασία) (5, 6)

και

z : να είναι ο χρόνος αποπεράτωσης του έργου.

Τότε έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\text{minimize } z$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rrrrrrr} -t_0 & +t_1 & & & & & \geq 4 \\ -t_0 & & +t_2 & & & & \geq 7 \\ -t_0 & & & & +t_4 & & \geq 12 \\ & -t_1 & +t_2 & & & & \geq 2 \\ & & -t_2 & +t_3 & & & \geq 10 \\ & & & -t_3 & +t_4 & & \geq 0 \\ & & & -t_3 & & +t_5 & \geq 3 \\ & & & & -t_4 & +t_5 & \geq 5 \\ & & & & & -t_5 & +z \geq 4 \end{array}$$

και

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, z \geq 0.$$

Ο κάθε περιορισμός αναπαριστά την σχέση προτεραιότητας συγκεκριμένων δραστηριοτήτων (εργασιών), π.χ. η δραστηριότητα (2, 3) δεν μπορεί να αρχίσει πριν από το τέλος της δραστηριότητας (1, 2) άρα έχουμε τον περιορισμό $t_2 \geq t_1 + 2 \Rightarrow -t_1 + t_2 \geq 2$.

Η λύση του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι:

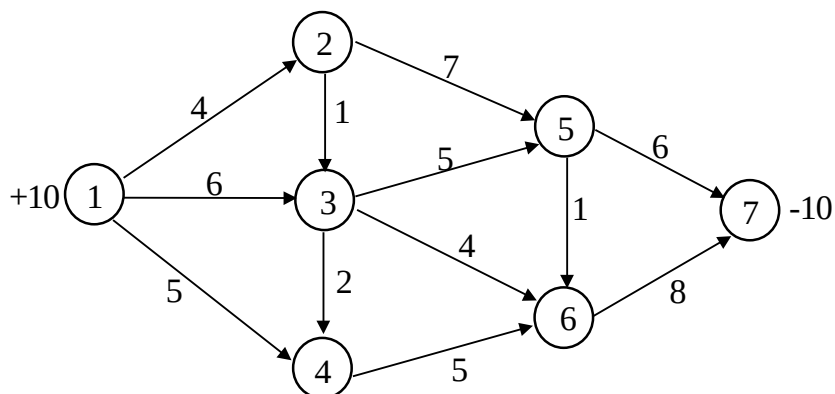
$$\begin{aligned} z &= 26 \text{ ημέρες και} \\ t_0 &= 0, t_1 = 5, t_2 = 7, \\ t_3 &= 17, t_4 = 17, t_5 = 22, \end{aligned}$$

Επομένως το κρίσιμο μονοπάτι για το δίκτυο εργασιών 4.14 είναι το

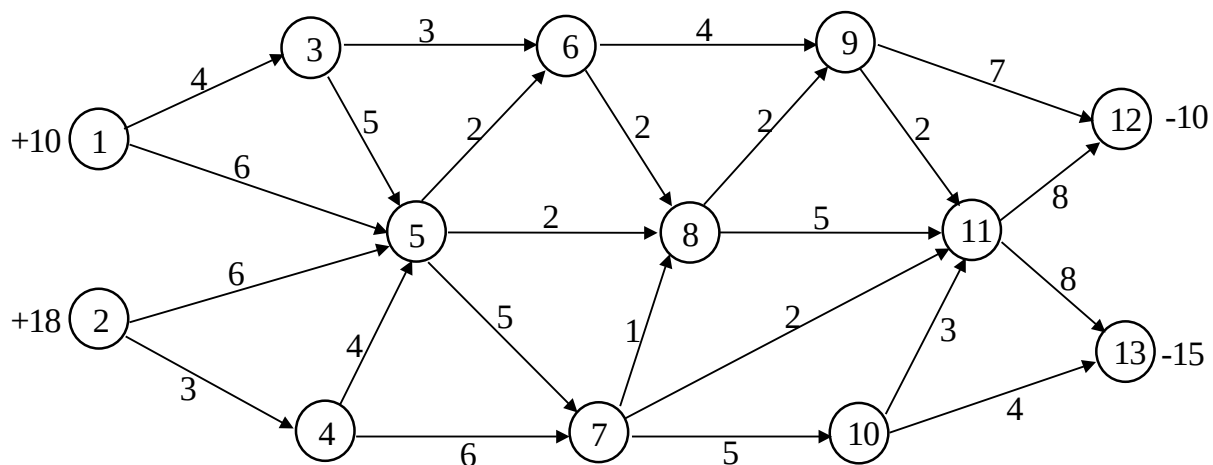
$$0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6.$$

4.7 Ασκήσεις

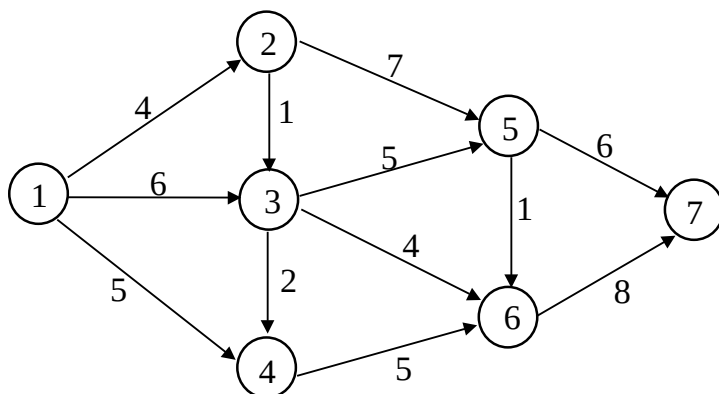
1. Να διατυπωθούν ως προβλήματα ελάχιστου κόστους ροής τα παρακάτω δίκτυα:



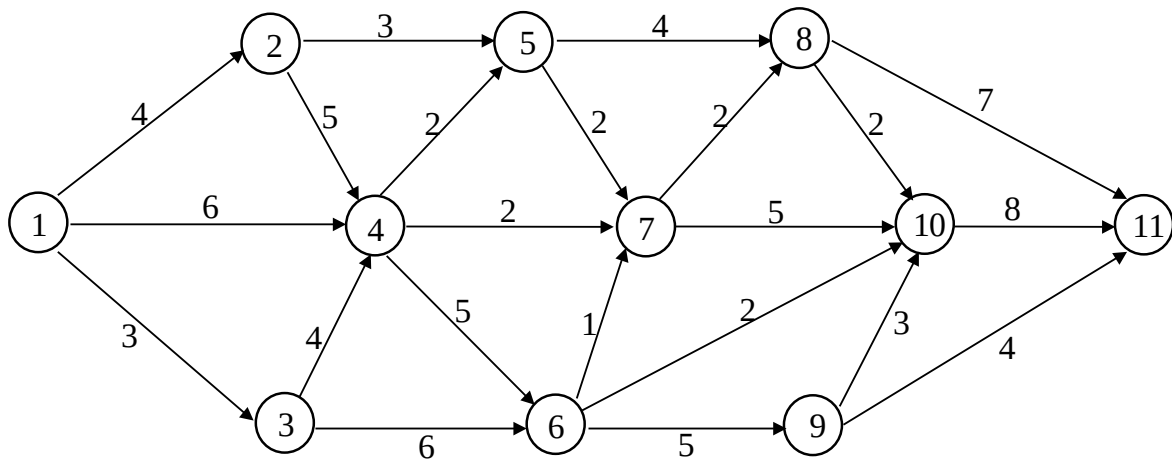
και



2. Να βρεθεί με τη χρήση γνωστού αλγορίθμου η συντομότερη διαδρομή στα παρακάτω δίκτυα:



και



Να διατυπωθούν τα παραπάνω δίκτυα ως προβλήματα ελάχιστου κόστους ροής.

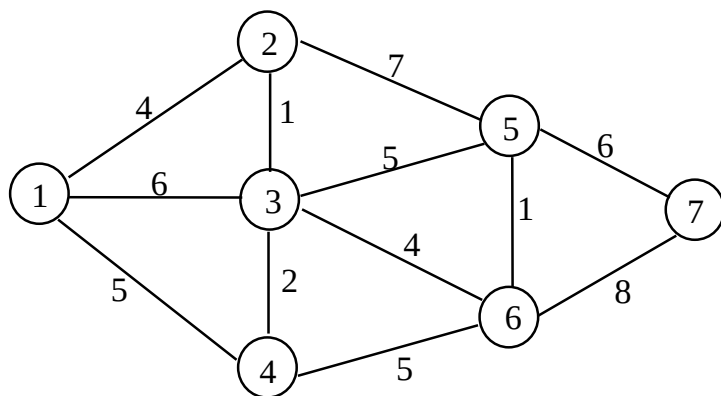
3. Σ' ένα μικρό αλλά αναπτυσσόμενο αερόδρομιο η τοπική αεροπορική εταιρεία αγόρασε ένα νέο ελκυστήριο για τη μεταφορά των εμπορευμάτων από και προς τα αεροπλάνα. Σε τρία χρόνια θα εγκατασταθεί ένα μηχανικό σύστημα μεταφοράς αποσκευών και έτσι ο ελκυστήρας δεν θα χρειάζεται. Όμως, λόγω της χρησιμοποίησης το κόστος λειτουργίας και συντήρησης του ελκυστήρα θα αυξηθεί σημαντικά και ίσως είναι πιο οικονομικό να αντικατασταθεί μετά ένα ή δύο χρόνια. Ο παρακάτω πίνακας δίνει την καθαρή παρούσα αξία του συνολικού κόστους από την αγορά ενός ελκυστήρα στο τέλος του χρόνου i και πώλησή του στο τέλος του χρόνου j .

		j		
		1	2	3
i	0	12	27	47
	1		15	32
	2			18

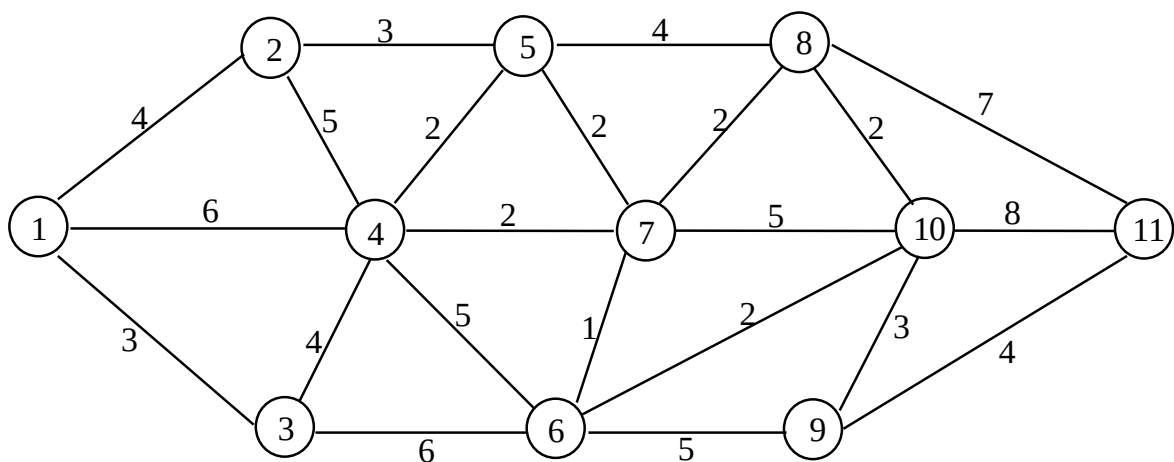
Το πρόβλημα είναι να προσδιοριστεί σε ποιο χρόνο πρέπει να αντικατασταθεί ο εκλυστήρας, για να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό του κόστος.

Διατυπώστε το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής και λύστε το με τη βοήθεια ενός γνωστού αλγορίθμου.

4. Να βρεθεί το ελάχιστο ζευγνύον δένδρο σε καθένα από τα παρακάτω δίκτυα:



και



5. Μια επιχείρηση πρόκειται να αρχίσει σύντομα την κοπή δένδρων σε οκτώ περιοχές ενός μεγάλου δάσους. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να ανοίξει ένα σύστημα χωματόδρομων έτσι, ώστε κάθε περιοχή να είναι προσιτή από κάποια άλλη. Η απόσταση μεταξύ κάθε ζεύγους περιοχών είναι:

	Απόσταση							
Περιοχή	1	2	3	4	5	6	7	8
1	...	1.6	1.4	0.5	1.2	1.5	1.8	2.3
2	1.6	...	0.9	1.8	1.2	2.6	2.3	1.1
3	1.4	0.9	...	2.6	1.7	2.5	1.9	1.0
4	0.5	1.8	2.6	...	0.7	1.6	1.5	0.9
5	1.2	1.2	1.7	0.7	...	0.9	1.1	0.8
6	1.5	2.6	2.5	1.6	0.9	...	0.6	1.0
7	1.8	2.3	1.9	1.5	1.1	0.6	...	0.5
8	2.3	1.1	1.0	0.9	0.8	1.0	0.5	...

Το πρόβλημα είναι να προσδιοριστούν τα ζεύγη των περιοχών μεταξύ των οποίων θα κατασκευασθούν οι χωματόδρομοι, που θα συνδέουν όλες τις περιοχές με τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

Διατυπώστε το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα ελάχιστου ζευγνύοντος δένδρου και λύστε το με τη βοήθεια γνωστού αλγορίθμου.

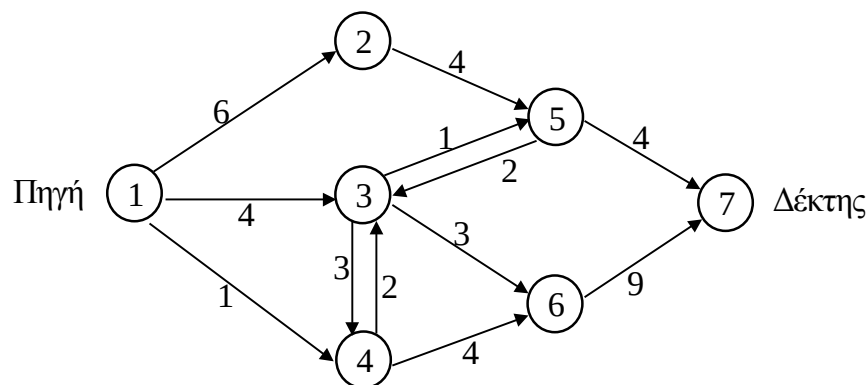
6. Μια τράπεζα πρόκειται να συνδέσει τους τερματικούς σταθμούς Η/Υ των υποκαταστημάτων της με τον Η/Υ των κεντρικών της γραφείων, με τη χρήση μιας ειδικής τηλεφωνικής γραμμής. Η τηλεφωνική γραμμή από ένα υποκατάστημα δεν χρειάζεται να είναι άμεσα συνδεδεμένη με τα κεντρικά γραφεία. Μπορεί να συνδεθεί έμμεσα με ένα άλλο υποκατάστημα, το οποίο είναι άμεσα ή έμμεσα συνδεδεμένο με τα κεντρικά γραφεία. Φυσικά κάθε υποκατάστημα πρέπει να είναι συνδεδεμένο με τα κεντρικά γραφεία με κάποιου είδους σύνδεση. Η επιβάρυνση για την ειδική τηλεφωνική γραμμή είναι ανάλογη με την απόσταση μεταξύ κάθε ζεύγους γραφείων που είναι (σε χιλιόμετρα):

	Απόσταση					
	Κεντρικό	Υ1	Υ2	Υ3	Υ4	Υ5
Κεντρικό	...	160	270	115	70	190
Υ1	160	...	310	80	220	50
Υ2	270	310	...	175	120	215
Υ3	115	80	175	...	140	240
Υ4	70	220	120	140	...	100
Υ5	190	50	215	240	100	...

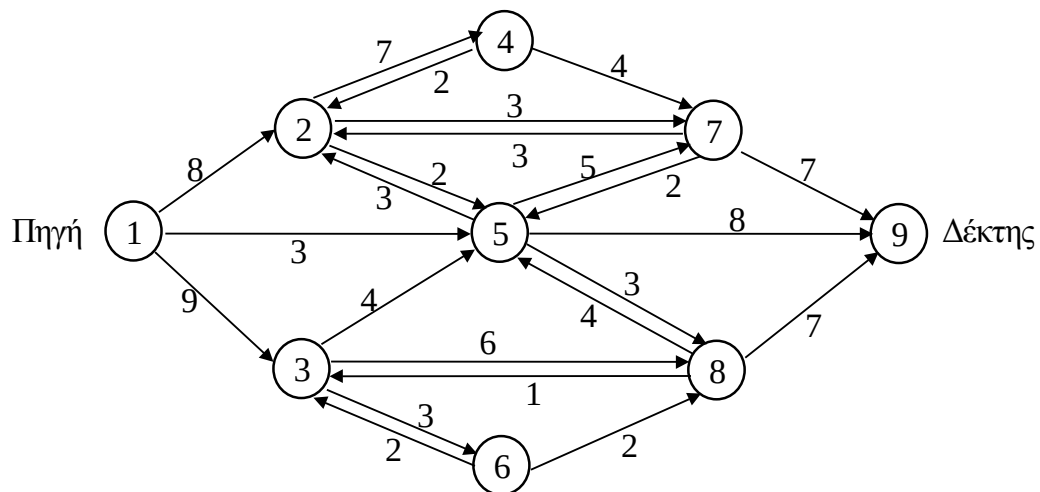
Το πρόβλημα είναι να προσδιοριστούν τα ζεύγη των γραφείων που θα συνδεθούν με την τηλεφωνική γραμμή, έτσι ώστε να συνδεθεί το κάθε υποκατάστημα (άμεσα ή έμμεσα) με τα κεντρικά γραφεία με το ελάχιστο συνολικό κόστος.

Διατυπώστε το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα ελάχιστου ζευγνύοντος δένδρου και λύστε το με τη βοήθεια γνωστού αλγορίθμου.

7. Έστω ότι έχουμε τα δίκτυα:

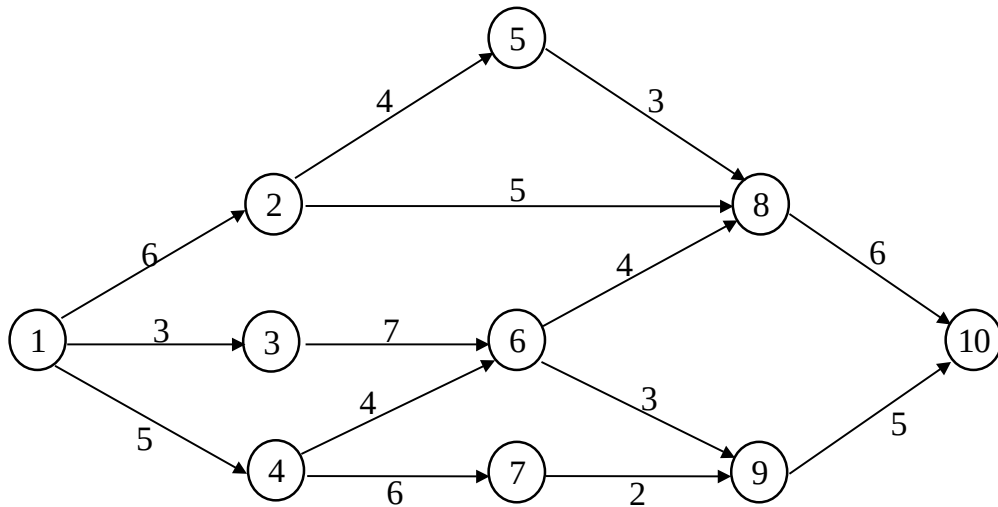


και



Να διατυπωθούν τα παραπάνω δίκτυα ως προβλήματα μέγιστης ροής.

8. Δίνεται το παρακάτω δίκτυο εργασιών. Υποθέστε ότι ο χρόνος που χρειάζεται κάθε εργασία (σε ημέρες) είναι σταθερός και ότι είναι ο αριθμός δίπλα σε κάθε τόξο. Βρείτε τον νωρίτερο χρόνο, τον αργότερο χρόνο και το χαλαρό χρόνο για κάθε γεγονός. Προσδιορίστε ακόμα το κρίσιμο μονοπάτι του δικτύου εργασιών.



Κεφάλαιο 5ο: Ακέραιος προγραμματισμός

5.1 Εισαγωγή

Ο ακέραιος προγραμματισμός ασχολείται με προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού στα οποία μερικές ή όλες οι μεταβλητές είναι ακέραιες. Ένα γενικό πρόβλημα θα έχει την εξής μορφή:

$$\max (\min) z = c_1x + c_2u$$

με περιορισμούς

$$A_1x + A_2u \geq (\leq, =) b$$
$$u \geq 0 \text{ και ακέραιο } x \geq 0.$$

Όπου A_1 είναι ένας $m \times n_1$ πίνακας και A_2 ένας $m \times n_2$ πίνακας. Όταν $n_1 = 0$ τότε το πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, ενώ αν $n_2 = 0$ τότε το πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα ακεραίου προγραμματισμού. Τέλος αν $n_1 \neq 0$ και $n_2 \neq 0$ τότε το πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα μικτού ακεραίου προγραμματισμού.

Αν και αρκετοί αλγόριθμοι έχουν αναπτυχθεί για προβλήματα ακεραίου προγραμματισμού, καμμία από αυτές τις μεθόδους δεν είναι αξιόπιστη από υπολογιστική άποψη, ειδικότερα όταν ο αριθμός των μεταβλητών αυξάνει, σε αντίθεση με τον γραμμικό προγραμματισμό όπου προβλήματα με εκατοντάδες μεταβλητές και εκατοντάδες περιορισμούς μπορούν να λυθούν σε λογικό χρονικό διάστημα.

Η υπολογιστική αυτή δυσκολία που παρατηρείται στους αλγορίθμους επίλυσης προβλημάτων ακεραίου προγραμματισμού έχει οδηγήσει τους χρήστες να βρουν άλλες μεθόδους επίλυσης τέτοιων προβλημάτων. Μια τέτοια προσέγγιση είναι να λυθεί το πρόβλημα σαν ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και στη συνέχεια να στρογγυλοποιηθεί η βέλτιστη λύση στις κοντινότερες ακέραιες τιμές. Πάντως, δεν υπάρχει καμμία εγγύηση ότι η στρογγυλοποιημένη λύση θα ικανοποιεί τους περιορισμούς, ειδικότερα στην περίπτωση που υπάρχει ένας ή περισσότεροι περιορισμοί - ισότητες.

Από τη θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού, μία στρογγυλοποιημένη λύση δεν μπορεί να είναι εφικτή αφού αυτό θα σήμαινε ότι μία βάση (με όλες τις μη βασικές μεταβλητές μηδέν) οδηγεί σε δύο διαφορετικές λύσεις. Η μη εφικτότητα που δημιουργείται από την στρογγυλοποίηση μπορεί να είναι ανεκτή εφόσον οι παράμετροι του προβλήματος δεν είναι σαφής. Αλλά, συνήθως σε ένα πρόβλημα ακεραίου προγραμματισμού υπάρχουν χαρακτηριστικοί τυπικοί περιορισμοί - ισότητες στις οποίες οι παράμετροι είναι σαφής. Ένας τέτοιος περιορισμός είναι ο $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, με $x_j = 0$ ή 1 για $j = 1, 2, \dots, n$. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, η στρογγυλοποίηση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί και τότε ένας αλγόριθμος επίλυσης προβλημάτων ακεραίου προγραμματισμού είναι απαραίτητος.

Επί πλέον στην ακαταλληλότητα της στρογγυλοποίησης δίνει έμφαση το γεγονός ότι αν και οι ακέραιες μεταβλητές θεωρούνται κοινώς ως αναπαράσταση ενός διακριτού αριθμού αντικειμένων (μηχανών, ανθρώπων, κ.τ.λ.), διάφοροι κωδικοποιήσεις χρησιμοποιούνται για να

αναπαραστήσουν τις ποσοτικοποιήσεις. Για παράδειγμα, μια απόφαση για χρηματοδότηση ή όχι ενός προγράμματος μπορεί να αναπαρασταθεί από την δυαδική μεταβλητή $x = 0$ αν το πρόγραμμα απορρίπτεται ή $x = 1$ αν αυτό γίνεται αποδεκτό. Σ' αυτή την περίπτωση δεν θα ήταν λογικό να ασχοληθούμε με κλασματικές τιμές της μεταβλητής x , και η χρήση της στρογγυλοποίησης σαν μια προσέγγιση είναι λογικά μη αποδεκτή.

Για να δείξουμε την σημαντικότητα των προβλημάτων στα οποία τέτοιες μεταβλητές χρησιμοποιούνται, στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζονται χαρακτηριστικές εφαρμογές σ' αυτή την περιοχή.

5.2 Μοντελοποίηση χαρακτηριστικών προβλημάτων ακεραίου προγραμματισμού

5.2.1 Η επιλογή μεταξύ δύο περιορισμών που αποτελούν μέρος μεγαλύτερου προβλήματος και δεν είναι δυνατόν να ισχύουν και οι δύο ταυτόχρονα.

Για παράδειγμα, οι περιορισμοί:

$$\begin{aligned} \text{είτε } 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ \text{ή } x_1 + 4x_2 &\leq 16 \end{aligned} \quad (1)$$

Έστω M ένας πολύ μεγάλος αριθμός, τότε η (1) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 + yM \\ x_1 + 4x_2 &\leq 16 + (1 - y)M \\ y &= 0 \text{ ή } 1. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Εάν $y = 0$ τότε ο δεύτερος περιορισμός ισχύει για κάθε τιμή των x_1, x_2 , άρα δεν ισχύει ο περιορισμός, ενώ εάν $y = 1$ τότε ο πρώτος περιορισμός ισχύει για κάθε τιμή των x_1, x_2 , άρα δεν ισχύει ο περιορισμός, δηλαδή έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{είτε } (y = 0) \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 16 + M \\ \text{ή } (y = 1) \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 + M \\ x_1 + 4x_2 &\leq 16. \end{aligned}$$

5.2.2 Έστω ότι σε μια κατάσταση ενός προβλήματος πρέπει μόνο k από τους m περιορισμούς του προβλήματος να ισχύουν.

Αυτό το πρόβλημα της επιλογή k περιορισμών από m περιορισμούς μπορεί να διατυπωθεί με τη βοήθεια των μεταβλητών του τύπου 0 ή 1 ως εξής:

Έστω m είναι οι δυνατοί περιορισμοί του προβλήματος της μορφής:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_m \end{aligned}$$

και έστω ότι απαιτείται να ισχύουν k ($k < m$) από αυτούς. Τότε για M πολύ μεγάλο έχουμε:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_1 + y_1M \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_2 + y_2M \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m + y_m M$$

με

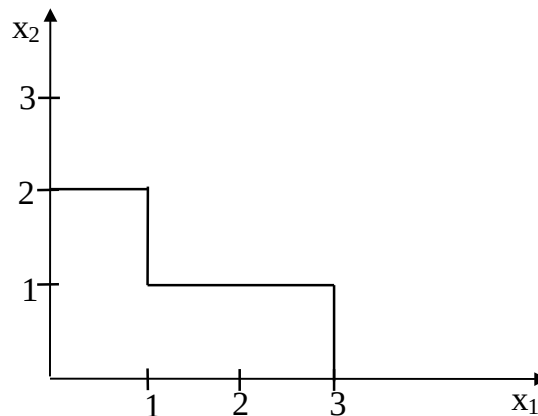
$$\sum_{i=1}^m y_i = m - k$$

και

$$y_i = 0 \text{ ή } 1, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

5.2.3 Έστω ότι έχουμε μια μη κυρτή εφικτή περιοχή και ζητείται να περιγραφεί αυτή με τη βοήθεια περιορισμών.

Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε την παρακάτω μη κυρτή εφικτή περιοχή



Το πρόβλημα της αναπαράστασης μη κυρτής περιοχής από περιορισμούς μπορεί να διατυπωθεί με τη χρήση μεταβλητών του τύπου 0 ή 1 ως εξής:

Έστω η μεταβλητή δ με τιμές 0 ή 1 και M ένας πολύ μεγάλος αριθμός τότε για το συγκεκριμένο παράδειγμα μη κυρτής περιοχής έχουμε τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 - 1 &\leq \delta M \\ x_1 - 2\delta &\leq 1 \\ x_2 - 1 &\leq (1 - \delta)M \\ x_2 + \delta &\leq 2 \end{aligned}$$

που αναπαριστούν τη συγκεκριμένη μη κυρτή περιοχή. Συγκεκριμένα, εάν $\delta = 0$ τότε οι περιορισμοί αναπαριστούν την περιοχή $x_1 \leq 1$ και $x_2 \leq 2$ της μη κυρτής περιοχής, ενώ εάν $\delta = 1$ τότε οι περιορισμοί αναπαριστούν την περιοχή $x_1 \leq 3$ και $x_2 \leq 1$ της μη κυρτής περιοχής.

5.2.4 Fixed - Charge problem

Σ' ένα τυπικό πρόβλημα σχεδιασμού παραγωγής N προϊόντων, το κόστος παραγωγής για την παραγωγή του προϊόντος j αποτελείται από ένα σταθερό κόστος K_j που δεν εξαρτάται από τη

ποσότητα του προϊόντος που παράγεται και από ένα μεταβλητό κόστος c_j ανά μονάδα προϊόντος που παράγεται. Έτσι, αν x_j είναι οι μονάδες του προϊόντος j που παράγονται η συνάρτηση του κόστους παραγωγής του προϊόντος j μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$C_j(x_j) = \begin{cases} K_j + c_j x_j, & x_j > 0 \\ 0, & x_j = 0 \end{cases}$$

Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος τότε θα έχει την μορφή:

$$\text{minimize } z = \sum_{j=1}^N C_j(x_j)$$

και θα είναι μία μη γραμμική συνάρτηση του x_j , αφού οι συναρτήσεις $C_j(x_j)$ είναι δικλαδικές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η αντικειμενική συνάρτηση να μην είναι εύχρηστη από αναλυτική άποψη.

Το πρόβλημα μπορεί να γίνει περισσότερο εύχρηστο από αναλυτική άποψη με την εισαγωγή των βοηθητικών δυαδικών μεταβλητών:

$$y_j = \begin{cases} 0, & x_j = 0 \\ 1, & x_j > 0 \end{cases}$$

Τότε ο αντικειμενικός σκοπός του προβλήματος μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\text{minimize } z = \sum_{j=1}^N c_j x_j + K_j y_j$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_j(1 - y_j) &= 0 \\ y_j &= 0 \text{ ή } 1 \\ x_j &\geq 0. \end{aligned}$$

Ο πρώτος περιορισμός μπορεί να αντικατασταθεί από τον περιορισμό

$$x_j \leq y_j M$$

όπου M είναι ένα γνωστό πεπερασμένο άνω φράγμα των x_j .

5.2.5 Το πρόβλημα του ταξιδιώτη

Ένας ταξιδιώτης διαθέτει ένα σακίδιο που μπορεί να χωρέσει αντικείμενα μέχρι ένα ορισμένο βάρος b . Πριν ξεκινήσει για το ταξίδι του ο ταξιδιώτης πρέπει να αποφασίσει μεταξύ απαραίτητων αντικειμένων ποια θα πάρει μαζί του αφού δεν μπορεί να υπερβεί το βάρος b που αντέχει το σακίδιό του. Κάθε αντικείμενο έχει ένα βάρος a_j και μία αξία για τον ταξιδιώτη c_j . Ο σκοπός του ταξιδιώτη είναι να μεγιστοποιήσει την ολική αξία των αντικειμένων που θα πάρει μαζί του.

Το πρόβλημα του ταξιδιώτη μπορεί να διατυπωθεί ως πρόβλημα ακεραίου προγραμματισμού με την εισαγωγή μίας δυαδικής μεταβλητής της μορφής:

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{εάν το αντικείμενο } j \text{ δεν επιλεχθηκε} \\ 1, & \text{εάν το αντικείμενο } j \text{ επιλεχθηκε} \end{cases}$$

Τότε το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\max z = \sum_{j=1}^N c_j x_j$$

με τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^N a_j x_j \leq b$$

$$x_j = 0 \text{ ή } 1, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

όπου N ο αριθμός των διαθέσιμων αντικειμένων.

5.2.6 Set covering problem (Το πρόβλημα της εύρεσης του καλύμματος ενός συνόλου)

Έστω S ένα σύνολο αντικειμένων $S = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ και L μία δεδομένη κλάση υποσυνόλων του S . Κάθε υποσύνολο στη κλάση L σχετίζεται με ένα κόστος. Το πρόβλημα είναι να καλυφθούν όλα τα μέλη του S με το ελάχιστο κόστος, από τα μέλη της L .

Για παράδειγμα, έστω ότι το σύνολο των αντικειμένων είναι το $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και η κλάση υποσυνόλων του S είναι η $L = \{(1, 2), (1, 3, 5), (2, 4, 5), (3), (1), (4, 5)\}$ με όλα τα μέλη της L να έχουν το ίδιο κόστος a . Το $\{(1, 2), (1, 3, 5), (2, 4, 5)\}$ είναι ένα κάλυμμα του S αλλά δεν ξέρουμε αν είναι το κάλυμμα με το ελάχιστο κόστος.

Το πρόβλημα της εύρεσης του καλύμματος του συνόλου S με το ελάχιστο κόστος από τα μέλη της L με τη χρήση της δυαδικής μεταβλητής

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{εαν το } i \text{ μέλος της } L \text{ ανηκει στο κάλυμμα του } S \\ 0, & \text{εαν το } i \text{ μέλος της } L \text{ δεν ανηκει στο κάλυμμα του } S \end{cases}$$

διατυπώνεται ως εξής:

$$\text{minimize } z = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{ccccccc} \delta_1 & +\delta_2 & & & +\delta_5 & & \geq 1 \\ \delta_1 & & & +\delta_3 & & & \geq 1 \\ & \delta_2 & & & +\delta_4 & & \geq 1 \\ & & \delta_3 & & & +\delta_6 & \geq 1 \\ & \delta_2 & +\delta_3 & & & +\delta_6 & \geq 1 \end{array}$$

Οι περιορισμοί εξασφαλίζουν ότι κάθε μέλος του S είναι καλυμμένο.

Σημείωση: Οι συντελεστές της αντικειμενικής θα μπορούσαν να είναι $\neq 1$, όπως και οι αριθμοί στα δεξιά μέλη των περιορισμών στην περίπτωση που μερικά στοιχεία του S θα πρέπει να καλυφθούν περισσότερες από μία φορές.

5.2.7 Set packing problem (Το πρόβλημα της εύρεσης του περιβλήματος ενός συνόλου)

Έστω S να είναι πάλι ένα σύνολο αντικειμένων $S = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ και L μία δεδομένη κλάση υποσυνόλων του S . Κάθε υποσύνολο στη κλάση L σχετίζεται με μία αξία. Το πρόβλημα είναι να “πακεταριστούν” όσο το δυνατόν περισσότερα μέλη της L έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η ολική αξία αλλά να μην υπάρχει επικάλυψη.

Για παράδειγμα, έστω ότι το σύνολο των αντικειμένων είναι το $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και η κλάση υποσυνόλων του S είναι η $L = \{(1, 2, 5), (1, 3), (2, 4), (3, 6), (2, 3, 6)\}$ με όλα τα μέλη της L να έχουν το ίδιο κόστος α.. Το $\{(1, 2, 5), (3, 6)\}$ είναι ένα περίβλημα του S αλλά δεν ξέρουμε αν είναι το περίβλημα με τη μέγιστη αξία.

Το πρόβλημα της εύρεσης του περιβλήματος του συνόλου S με τη μέγιστη αξία από τα μέλη της L με τη χρήση της δυαδικής μεταβλητής

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{εαν το } i \text{ μέλος της } L \text{ ανηκει στο περιβλημα του } S \\ 0, & \text{εαν το } i \text{ μέλος της } L \text{ δεν ανηκει στο περιβλημα του } S \end{cases}$$

διατυπώνεται ως εξής:

$$\text{maximize } z = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{cccccc} \delta_1 & +\delta_2 & & & & \leq 1 \\ \delta_1 & & +\delta_3 & & +\delta_5 & \leq 1 \\ & \delta_2 & & +\delta_4 & +\delta_5 & \leq 1 \\ & & \delta_3 & & & \leq 1 \\ \delta_1 & & & & & \leq 1 \\ & & & \delta_4 & +\delta_5 & \leq 1 \end{array}$$

Οι περιορισμοί εξασφαλίζουν ότι κάθε μέλος του S είναι επικαλύπτεται από δύο μέλη της L .

5.2.8 Set partitioning problem (Το πρόβλημα του διαμερισμού ενός συνόλου)

Έστω S ένα σύνολο αντικειμένων $S = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ και L μία δεδομένη κλάση υποσυνόλων του S όπως και στα προηγούμενα προβλήματα. Το πρόβλημα είναι να καλύπτονται όλα τα μέλη του S από τα μέλη του L αλλά συγχρόνως να μην υπάρχει επικάλυψη. Τότε έχουμε συνδυασμό των δύο προηγούμενων περιπτώσεων. Σ’ αυτή την περίπτωση η αντικειμενική μπορεί να είναι $\max$ ή $\min$ ανάλογα με την περίπτωση.

Για παράδειγμα, έστω ότι το σύνολο των αντικειμένων είναι το $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και η κλάση υποσυνόλων του S είναι η $L = \{(1, 2), (1, 3, 5), (2, 4, 5), (3), (1), (4, 5)\}$. με όλα τα μέλη της L να έχουν το ίδιο κόστος α .

Το πρόβλημα της διαμέρισης του συνόλου S με το ελάχιστο κόστος από τα μέλη της L με τη χρήση της δυαδικής μεταβλητής

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{εαν το } i \text{ μέλος της } L \text{ ανηκει στο καλυμμα του } S \\ 0, & \text{εαν το } i \text{ μέλος της } L \text{ δεν ανηκει στο καλυμμα του } S \end{cases}$$

διατυπώνεται ως εξής:

$$\text{minimize } z = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{cccccccl} \delta_1 & +\delta_2 & & & +\delta_5 & & = & 1 \\ \delta_1 & & & +\delta_3 & & & = & 1 \\ & \delta_2 & & & +\delta_4 & & = & 1 \\ & & \delta_3 & & & +\delta_6 & = & 1 \\ & \delta_2 & +\delta_3 & & & +\delta_6 & = & 1 \end{array}$$

Οι περιορισμοί εξασφαλίζουν ότι κάθε μέλος του S είναι καλυμμένο αλλά δεν υπάρχει επικάλυψη.

Κεφάλαιο 6ο: Δυναμικός προγραμματισμός

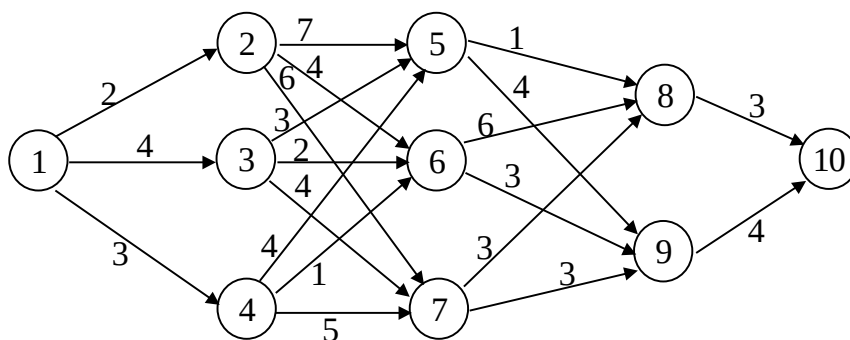
6.1 Εισαγωγή

Ο δυναμικός προγραμματισμός είναι μια μαθηματική τεχνική, που χρησιμοποιείται συχνά στη λήψη μιας ακολουθίας αλληλοσυνδεόμενων αποφάσεων. Παρέχει μια συστηματική διαδικασία για τον προσδιορισμό του συνδυασμού των αποφάσεων, που μεγιστοποιεί τη συνολική αποτελεσματικότητα.

Σε αντίθεση με τον γραμμικό προγραμματισμό, δεν υπάρχει μια τυποποιημένη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος του δυναμικού προγραμματισμού. Μάλλον, ο δυναμικός προγραμματισμός είναι ένα γενικό πρότυπο προσέγγισης για την επίλυση προβλημάτων και οι συγκεκριμένες εξισώσεις που χρησιμοποιούνται πρέπει να προσαρμόζονται σε κάθε συγκεκριμένη κατάσταση. Έτσι, χρειάζεται κάποιος βαθμός διορατικότητας στη γενική δομή των προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού, για να αναγνωριστεί πότε ένα πρόβλημα μπορεί να λυθεί με διαδικασίες δυναμικού προγραμματισμού και πως αυτό γίνεται. Η ικανότητα αυτή μπορεί να αναπτυχθεί καλύτερα με τη μελέτη μιας μεγάλης ποικιλίας εφαρμογών του δυναμικού προγραμματισμού και των χαρακτηριστικών τους που είναι κοινά σε όλα τις εφαρμογές. Για το σκοπό αυτό στη συνέχεια του κεφαλαίου παρουσιάζονται αρκετά επεξηγηματικά παραδείγματα προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού.

6.2 Πρότυπο παράδειγμα προβλήματος δυναμικού προγραμματισμού

Ένα πρόβλημα ειδικά κατασκευασμένο για να παρουσιάσει τα χαρακτηριστικά και να εισάγει την ορολογία του δυναμικού προγραμματισμού είναι το πρόβλημα του αμαξά που έπρεπε να ταξιδεύει με την άμαξά του διαμέσου μιας μη φιλικής περιοχής Ινδιάνων πριν 125 χρόνια (το πρόβλημα αυτό αναπτύχθηκε από τον καθηγητή Harvey M. Wagner). Αν και το σημείο αναχώρησής του καθώς και ο προορισμός του ήταν σταθερά, ο αμαξάς είχε μεγάλη επιλογή όσον αφορά τις περιοχές (καταστάσεις) μέσα από τις οποίες θα ταξίδευε. Οι δυνατές διαδρομές εμφανίζονται στο σχήμα 6.1, όπου κάθε κατάσταση (περιοχή) αντιπροσωπεύεται από έναν αριθμό μέσα σε κύκλο. Έτσι χρειάζονται 4 στάδια για να ταξιδέψει από σημείο αναχώρησης, την κατάσταση 1, στο σημείο προορισμού, την κατάσταση 10.



Σχήμα 6.1

Ο αμαξάς ενδιαφερόταν πολύ για την ασφάλεια του ταξιδιού του. Μετά από σκέψη, βρήκε έναν έξυπνο τρόπο για να προσδιορίσει την ασφαλέστερη διαδρομή. Οι επιβάτες του έκαναν συμβόλαια για ασφάλεια ζωής. Επειδή το κόστος κάθε πολιτικής συμβολαίου βασιζόταν σε μια προσεκτική αξιολόγηση της ασφάλειας του ταξιδιού, η ασφαλέστερη διαδρομή θα ήταν εκείνη με το φθηνότερο ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Το κόστος του συμβολαίου από την περιοχή (κατάσταση) i στην περιοχή (κατάσταση) j αναπαριστάται με τους αριθμούς στα τόξα του σχήματος 6.1. Με τα παραπάνω δεδομένα ζητείται να βρεθεί η διαδρομή που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Σημείωση: θα πρέπει να σημειωθεί ότι η επιλογή της φθηνότερης διαδρομής σε κάθε διαδοχικό στάδιο δε δίνει απαραίτητα τη συνολική βέλτιστη απόφαση. Ακολουθώντας αυτή την στρατηγική θα έχουμε την διαδρομή $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$ με συνολικό κόστος 13. Όμως μια μικρή θυσία σε ένα στάδιο μπορεί να δώσει μεγαλύτερες οικονομίες στα επόμενα. Για παράδειγμα η διαδρομή $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6$ είναι συνολικά πιο φθηνή από την $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6$.

Ο δυναμικός προγραμματισμός είναι ένας τρόπος σκέψης (μεθοδολογία) λύσης προβλημάτων ο οποίος επιτρέπει την διάσπαση ενός μεγάλου προβλήματος, το οποίο είναι δύσκολο να λυθεί, σε πολλά μικρότερα με εύκολη λύση. Συγκεκριμένα, ο δυναμικός προγραμματισμός αρχίζει με ένα μικρό τμήμα του προβλήματος και βρίσκει τη βέλτιστη λύση γι' αυτό το μικρότερο πρόβλημα. Στη συνέχεια μεγεθύνει διαδοχικά το πρόβλημα, βρίσκοντας την τρέχουσα βέλτιστη λύση από την προηγούμενη, μέχρις ότου λυθεί το αρχικό πρόβλημα στο συνολό του.

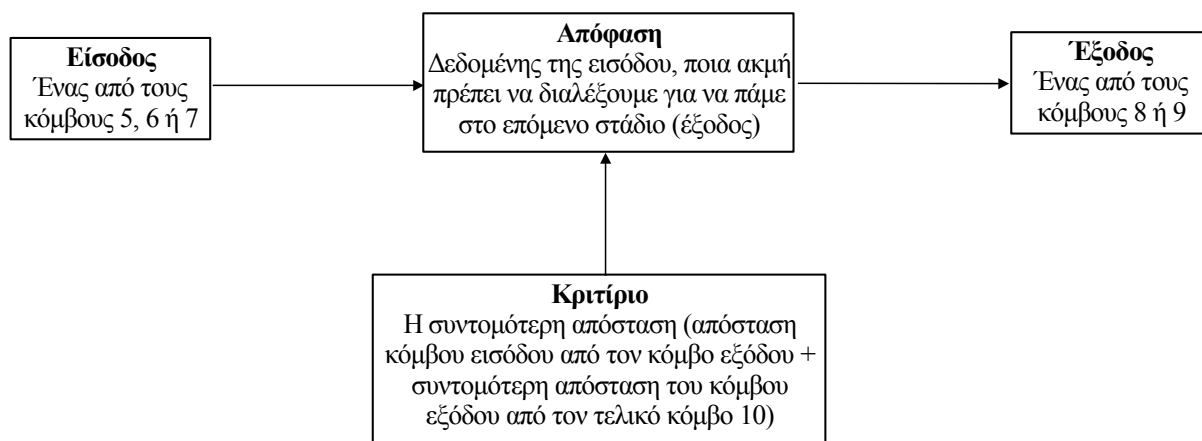
Έστω οι μεταβλητές απόφασης να είναι x_n ($n = 1, 2, 3, 4$) οι άμεσοι προορισμοί του σταδίου n . Έτσι η επιλεγόμενη διαδρομή θα είναι $1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 = 10$.

Έστω $f_n(s, x_n)$ να είναι το συνολικό κόστος της καλύτερης συνολικής πολιτικής των υπόλοιπων σταδίων, όταν ο πωλητής είναι στη κατάσταση s , έτοιμος να αρχίσει οτ στάδιο n και επιλέγει τη x_n ως τον επόμενο προορισμό. Όταν τα s και n είναι γνωστά, ορίζουμε x_n^* να είναι η τιμή της x_n που ελαχιστοποιεί το $f_n(s, x_n)$ και $f_n^*(s)$ να είναι η αντίστοιχη ελάχιστη τιμή του $f_n(s, x_n)$. Δηλαδή $f_n^*(s) = f_n(s, x_n^*)$. Αντικειμενικός σκοπός είναι να βρεθεί το $f_1^*(1)$ και η αντίστοιχη πολιτική. Ο δυναμικός προγραμματισμός το πετυχαίνει αυτό βρίσκοντας διαδοχικά τα $f_4^*(s)$, $f_3^*(s)$, $f_2^*(s)$ και μετά το $f_1^*(1)$.

Όταν ο αμαξάς έχει μόνο ένα στάδιο για να φθάσει, η διαδρομή του προσδιορίζεται από τον τελικό του προορισμό. Έτσι, η λύση για το πρόβλημα του ενός σταδίου (του τελευταίου σταδίου, $n = 4$) είναι:

s	$f_4^*(s)$	x_4^*
8	3	10
9	4	10

Όταν ο αμαξάς έχει δύο στάδιο για να φθάσει στον προορισμό (δηλαδή είναι στο στάδιο $n = 3$ της διαδρομής). Η λύση χρειάζεται περισσότερους υπολογισμούς. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ο αμαξάς είναι στην κατάσταση 5, τότε θα πρέπει να πάει ή στην κατάσταση 8 ή στην 9 με κόστος 1 ή 4 αντίστοιχα. Αν επιλέξει την κατάσταση 8, το ελάχιστο επιπρόσθετο κόστος αφού φθάσει εκεί δίνεται στο προηγούμενο πίνακα και είναι 3, άρα το συνολικό κόστος για αυτή την απόφαση είναι $1 + 3 = 4$. Ομοια, το συνολικό κόστος, αν επιλέξει την κατάσταση 9 είναι $4 + 4 = 8$. Επομένως, θα επιλέξει την κατάσταση 8, δηλαδή $x_3^* = 8$, επειδή δίνει το ελάχιστο συνολικό κόστος, $f_3^*(5)$. Στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 6.2) αναπαρίστατε αυτή διαδικασία επιλογής.



Σχήμα 6.2

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο για $s = 6$ και $s = 7$ έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα για το στάδιο $n = 3$ του προβλήματος.

$f_3(s, x_3)$	
---------------	--

$x_3 \backslash s$	8	9	$f_3^*(s)$	x_3^*
5	4	8	4	8
6	9	7	7	9
7	6	7	6	8

Η λύση για το πρόβλημα των τριών σταδίων (δηλαδή βρισκόμαστε στο στάδιο $n = 2$ της διαδρομής) βρίσκεται με παραπλήσιο τρόπο. Για παράδειγμα, αν ο αμαξάς είναι στην κατάσταση (περιοχή) 2 και επιλέξει να πάει στην κατάσταση 5, το ελάχιστο συνολικό κόστος $f_2(2, 5)$ θα είναι το κόστος του συμβολαίου από τη κατάσταση 2 στην κατάσταση 5 συν το ελάχιστο κόστος από την κατάσταση 5 στην κατάσταση 10, δηλαδή $f_2(2, 5) = 7 + 4 = 11$. Όμοια $f_2(2, 6) = 4 + 7 = 11$ και $f_2(2, 7) = 6 + 6 = 12$ και έτσι το ελάχιστο συνολικό κόστος από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 10 θα είναι $f_2^*(2) = 11$, και οι άμεσοι προορισμοί θα είναι $x_2^* = 5$ ή 6. Τα αποτελέσματα για αυτό το στάδιο της διαδρομής δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$x_2 \backslash s$	$f_2(s, x_2)$			$f_2^*(s)$	x_2^*
	5	6	7		
2	11	11	12	11	5 ή 6
3	7	9	10	7	5
4	8	8	11	8	5 ή 6

Πηγαίνοντας στο πρόβλημα των 4 σταδίων (δηλαδή βρισκόμαστε στο στάδιο $n = 1$ της διαδρομής) το κόστος της βέλτιστης πολιτικής βρίσκεται με παρόμοιο τρόπο. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι

$x_1 \backslash s$	$f_1(s, x_1)$			$f_1^*(s)$	x_1^*
	2	3	4		
1	13	11	11	11	3 ή 4

Η βέλτιστη λύση του προβλήματος μπορεί τώρα να προσδιοριστεί. Τα αποτελέσματα για το πρόβλημα των 4 σταδίων φανερώνουν ότι ο αμαξάς πρέπει αρχικά να πάει στην κατάσταση 3 ή 4. Ας υποθέσουμε ότι πάει στην κατάσταση 3, δηλαδή $x_1^* = 3$. Για το πρόβλημα των 3 σταδίων και για $s = 3$ έχουμε $x_2^* = 5$. Αυτό οδηγεί στο πρόβλημα 2 σταδίων, που δίνει $x_3^* = 8$ για $s = 5$ και στο πρόβλημα του ενός σταδίου που δίνει $x_4^* = 10$ για $s = 8$. Επομένως μία βέλτιστη διαδρομή είναι η $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 10$. Επιλέγοντας $x_1^* = 4$ έχουμε δύο άλλες βέλτιστες διαδρομές την $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 10$ και την $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$. Όλες οι διαδρομές αυτές δίνουν το ίδιο συνολικό κόστος $f_1^*(1) = 11$.

6.3 Χαρακτηριστικά προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού

Το πρόβλημα του αμαξά είναι ένα πρότυπο πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού. Το πρόβλημα αυτό σχεδιάστηκε σκόπιμα για να δώσει μια φυσική ερμηνεία της μάλλον αφηρημένης δομής των προβλημάτων του δυναμικού προγραμματισμού. Έτσι, ένας τρόπος για να αναγνωριστεί κατά πόσο ένα πρόβλημα μπορεί να διαμορφωθεί ως πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού είναι να παρατηρήσουμε αν η βασική δομή του είναι ανάλογη με εκείνη του προβλήματος του αμαξά.

Τα βασικά στοιχεία που χαρακτηρίζουν τα προβλήματα του δυναμικού προγραμματισμού είναι τα ακόλουθα:

1. Το πρόβλημα μπορεί να διαιρεθεί σε στάδια και σε κάθε στάδιο λαμβάνεται μία απόφαση (ακολουθείται μία πολιτική). Το πρόβλημα του αμαξά διαιρέθηκε σε τέσσερα στάδια, στα τέσσερα σκέλη του ταξιδιού. Η απόφαση σε κάθε στάδιο ήταν ο προορισμός αυτού του συγκεκριμένου σταδίου. Αλλα προβλήματα δυναμικού προγραμματισμού απαιτούν τη λήψη μιας ακολουθίας αλληλυσυνδεόμενων αποφάσεων.
2. Σε κάθε στάδιο αντιστοιχεί ένας αριθμός καταστάσεων. Οι καταστάσεις κάθε σταδίου στο πρόβλημα του αμαξά είναι οι περιοχές στις οποίες θα βρεθεί ο αμαξάς, όταν ξεκινήσει για το συγκεκριμένο σκέλος του ταξιδιού. Γενικά, οι καταστάσεις είναι οι διάφορες δυνατές συνθήκες στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα σε συγκεκριμένο στάδιο του προβλήματος. Ο αριθμός των καταστάσεων μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος.
3. Με δεδομένη την τρέχουσα κατάσταση, μία βέλτιστη πολιτική για τα υπόλοιπα στάδια είναι ανεξάρτητη της πολιτικής που υιοθετήθηκε στα προηγούμενα στάδια. Με δεδομένη την κατάσταση που βρίσκεται ο αμαξάς, η βέλτιστη πολιτική του από σημείο αυτό είναι ανεξάρτητη από το πως έφθασε εκεί. Γενικά για τα προβλήματα του δυναμικού προγραμματισμού, η γνώση της τρέχουσας κατάστασης του συστήματος μεταφέρει όλη την πληροφορία της προηγούμενης συμπεριφοράς, που είναι αναγκαία για τον προσδιορισμό της βέλτιστης πολιτικής από εκεί και μετά.
4. Η διαδικασία επίλυσης αρχίζει με την εύρεση της άριστης πολιτικής για κάθε κατάσταση του τελευταίου σταδίου. Η λύση για το πρόβλημα αυτό του ενός σταδίου είναι συνήθως προφανής, όπως ήταν για το πρόβλημα του αμαξά.
5. Υπάρχει μία αναδρομική σχέση που προσδιορίζει την βέλτιστη πολιτική για κάθε κατάσταση στο στάδιο n , με δεδομένη την βέλτιστη πολιτική για κάθε κατάσταση στο στάδιο $n+1$. Για το πρόβλημα του αμαξά αυτή η αναδρομική σχέση ήταν:

$$f_n^*(s) = \min_{x_n} \{ c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n) \}$$

όπου c_{sx_n} το κόστος που συμβολαίου ζωής για την μετακίνηση από την κατάσταση s στην κατάσταση x_n . Η ακριβής μορφή της αναδρομικής σχέσης διαφέρει μεταξύ των προβλημάτων του δυναμικού προγραμματισμού. Γενικά, αν x_n είναι η μεταβλητή απόφασης στο στάδιο n και $f_n(s, x_n)$ είναι η μεγιστοποιούσα ή ελαχιστοποιούσα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όταν το σύστημα είναι στην κατάσταση s του σταδίου n και επιλέγεται η x_n και αν $f_n^*(s)$ η μέγιστη ή η ελάχιστη του $f_n(s, x_n)$ για όλες τις δυνατές τιμές του x_n , η αναδρομική σχέση θα έχει πάντα τη μορφή:

$$f_n^*(s) = \max_{x_n} / \min_{x_n} \{f_n(s, x_n)\}$$

όπου $f_n(s, x_n)$ θα είναι συναρτήση των $f_{n+1}^*(s, x_n)$ και ενός μέτρου αποτελεσματικότητας όταν το σύστημα είναι στην κατάσταση s του σταδίου n και επιλέγεται η x_n .

6. Χρησιμοποιώντας την αναδρομική αυτή σχέση, η διαδικασία επίλυσης προχωρεί προς τα πίσω στάδιο με στάδιο, κάθε φορά βρίσκοντας την βέλτιστη πολιτική για κάθε κατάσταση του σταδίου μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική για το αρχικό στάδιο. Αυτό φαίνεται στο πρόβλημα του αμαξιά, όπου η βέλτιστη πολιτική βρέθηκε διαδοχικά για κάθε κατάσταση των σταδίων 4, 3, 2 και 1 αντίστοιχα.

Για όλα τα προβλήματα δυναμικού προγραμματισμού πρέπει σε κάθε στάδιο $n = N, N-1, \dots, 1$, να δημιουργείται ένας πίνακας της παρακάτω μορφής:

	$f_n(s, x_n)$		
x_n s		$f_n^*(s)$	x_n^*

Όταν ο πίνακας αυτός γίνει για το αρχικό στάδιο ($n = 1$) βρίσκεται η λύση του προβλήματος. Επειδή η αρχική κατάσταση θα είναι γνωστή, η αρχική απόφαση προσδιορίζεται από το x_1^* του πίνακα. Η βέλτιστη τιμή των άλλων μεταβλητών θα προσδιορίζεται από τους άλλους πίνακες, σύμφωνα με την κατάσταση του συστήματος που προκύπτει από τις προηγούμενες αποφάσεις.

6.4 Παραδείγματα προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού

6.4.1 Το παγκόσμιο Συμβούλιο Υγείας έχει ως σκοπό να βελτιώσει την υγειονομική μέριμνα στις υποανάπτυκτες χώρες του κόσμου. Υπάρχουν 5 ιατρικές ομάδες, που πρέπει να εκχωρηθούν σε τρεις τέτοιες χώρες, ώστε να βελτιωθούν η ιατρική τους μέριμνα και η υγειονομική τους παιδεία. Έτσι το Συμβούλιο πρέπει να προσδιορίσει πόσες ομάδες θα εκχωρηθούν σε καθεμία από αυτές τις χώρες, ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική αποτελεσματικότητα των πέντε ομάδων. Το μέτρο αποτελεσματικότητας που χρησιμοποιείται είναι τα επιπρόσθετα ανθρωποχρόνια ζωής. Για μία συγκεκριμένη χώρα το μέτρο αυτό είναι ίσο με την επιπρόσθετη διάρκεια ζωής σε χρόνια πολλαπλασιασμένη επί τον πληθυσμό της χώρας. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα εκτιμηθέντα ανθρωποχρόνια ζωής (σε χιλιάδες χρόνια) για κάθε χώρα και για κάθε δυνατή κατανομή των ιατρικών ομάδων.

Αριθμός ιατρικών ομάδων	Επιπρόσθετα ανθρωποχρόνια ζωής σε χιλιάδες		
	Χώρα		
	1	2	3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

Λύση:

Για το πρόβλημα αυτό χρειάζεται να ληφθούν τρεις αλληλοσυνδεόμενες αποφάσεις, που είναι ο αριθμός των ιατρικών ομάδων που θα κατανεμηθούν στις τρεις χώρες. Έτσι, οι τρεις χώρες μπορούν να θεωρηθούν ως τα τρία στάδια στη διαμόρφωση του προβλήματος. Οι μεταβλητές απόφασης x_n ($n = 1, 2, 3$) θα είναι ο αριθμός των ομάδων που εκχωρούνται στο στάδιο (χώρα) n , ενώ η κατάσταση του συστήματος (s) σε κάθε στάδιο είναι ο αριθμός των ιατρικών ομάδων που είναι ακόμη διαθέσιμες για κατανομή, δηλαδή ο αριθμός των ομάδων που δεν έχουν εκχωρηθεί στα προηγούμενα στάδια.

Έστω $p_i(x_i)$ το μέτρο αποτελεσματικότητας από την κατανομή x_i ιατρικών ομάδων στη χώρα i , όπως δίνεται στον παραπάνω πίνακα. Έτσι, ο αντικειμενικός σκοπός μας είναι να επιλεχτούν τα x_1, x_2, x_3 έτσι ώστε

$$\text{Max } \sum_{i=1}^3 p_i(x_i)$$

με περιορισμό

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 5.$$

Η αναδρομική σχέση, που προσδιορίζει την βέλτιστη πολιτική για κάθε κατάσταση στο στάδιο n , με δεδομένη την βέλτιστη πολιτική για κάθε κατάσταση στο στάδιο $n + 1$, θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$f_n(s, x_n) = p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s - x_n)$$

με $f_4^* = 0$.

Ξεκινώντας την διαδικασία επίλυσης από το τελευταίο στάδιο έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Στάδιο $n = 3$

s	$f_3^*(s)$	x_3^*
0	0	0
1	50	1
2	70	2
3	80	3
4	100	4
5	130	5

Στάδιο $n = 2$

$\begin{matrix} x_2 \\ s \end{matrix}$	$f_2(s, x_2) = p_2(x_2) + f_3^*(s - x_2)$						$f_2^*(s)$	x_2^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	50	20					50	0
2	70	70	45				70	0, 1
3	80	90	95	75			95	2
4	100	100	115	125	110		125	3
5	130	120	125	145	160	150	160	4

Στάδιο $n = 1$

$\begin{matrix} x_1 \\ s \end{matrix}$	$f_1(s, x_1) = p_1(x_1) + f_2^*(s - x_1)$						$f_1^*(s)$	x_1^*
	0	1	2	3	4	5		
5	160	170	165	160	155	120	170	1

Άρα η βέλτιστη λύση έχει $x_1^* = 1$, που δίνει $s = 5 - 1 = 4$ για το στάδιο $n = 2$, επομένως $x_2^* = 3$, που δίνει $s = 4 - 3 = 1$ για το στάδιο $n = 3$ και επομένως $x_3^* = 1$. Επειδή $f_1^*(5) = 170$, η κατανομή (1, 3, 1) των ιατρικών ομάδων στις τρεις χώρες θα δώσει συνολικό αριθμό 170000 επιπρόσθετων ανθρωποχρόνων ζωής.

6.4.2 Για ένα διαστημικό πρόγραμμα ερευνάται ένα συγκεκριμένο μηχανικό πρόβλημα, που πρέπει να λυθεί πριν ο άνθρωπος ταξιδέψει με ασφάλεια στον Άρη. Υπάρχουν τρεις ερευνητικές ομάδες που προσπαθούν να λύσουν το πρόβλημα με τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις. Έχει εκτιμηθεί, ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες, οι πιθανότητες να μην επιτύχουν οι ομάδες 1, 2 και 3 είναι 0.40, 0.60 και 0.80 αντίστοιχα. Έτσι η πιθανότητα να αποτύχουν και οι τρεις ομάδες είναι $(0.40) \cdot (0.60) \cdot (0.80) = 0.192$. Επειδή ο αντικειμενικός σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση αυτής της πιθανότητας, έχει ληφθεί η απόφαση να εκχωρηθούν δύο ακόμη επιστήμονες στις τρεις ομάδες για να μειωθεί η πιθανότητα όσο το δυνατόν περισσότερο. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις πιθανότητες αποτυχίας των τριών ομάδων όταν προστεθούν σ' αυτές 0, 1 ή 2 ακόμα επιστήμονες. Το πρόβλημα τώρα είναι να βρεθεί πως θα εκχωρηθούν οι δύο επιστήμονες, ώστε να ελαχιστοποιηθεί η πιθανότητα να αποτύχουν και οι τρεις ομάδες.

Αριθμός νέων επιστημόνων	Πιθανότητα αποτυχίας		
	Ομάδα		
	1	2	3
0	0.40	0.60	0.80
1	0.20	0.40	0.50
2	0.15	0.20	0.30

Λύση:

Η δομή του προβλήματος είναι παρόμοια με εκείνη του παραδείγματος 6.4.1. Για το πρόβλημα αυτό χρειάζεται να ληφθούν τρεις αλληλοσυνδεόμενες αποφάσεις, που είναι ο αριθμός των επιστημόνων που θα κατανεμηθούν στις τρεις ομάδες. Έτσι, οι τρεις ομάδες μπορούν να θεωρηθούν ως τα τρία στάδια στη διαμόρφωση του προβλήματος. Οι μεταβλητές απόφασης x_n ($n = 1, 2, 3$) θα είναι ο αριθμός των επιστημόνων που εκχωρούνται στο στάδιο (επιστημονική ομάδα) n , ενώ η κατάσταση του συστήματος (s) σε κάθε στάδιο είναι ο αριθμός των επιστημόνων που είναι ακόμη διαθέσιμοι για κατανομή, δηλαδή ο αριθμός των επιστημόνων που δεν έχουν εκχωρηθεί στα προηγούμενα στάδια.

Έστω $p_i(x_i)$ η πιθανότητα αποτυχίας όταν κατανέμονται x_i επιστήμονες στην επιστημονική ομάδα i , όπως δίνεται στον παραπάνω πίνακα. Έτσι, ο αντικειμενικός σκοπός μας είναι να επιλεχθούν τα x_1, x_2, x_3 έτσι ώστε

$$\text{Min } \prod_{i=1}^3 p_i(x_i)$$

με περιορισμό

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 2.$$

Η αναδρομική σχέση, που προσδιορίζει την βέλτιστη πολιτική για κάθε κατάσταση στο στάδιο n , με δεδομένη την βέλτιστη πολιτική για κάθε κατάσταση στο στάδιο $n + 1$, θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$f_n(s, x_n) = p_n(x_n) \cdot f_{n+1}^*(s - x_n)$$

με $f_4^* = 0$.

Ξεκινώντας την διαδικασία επίλυσης από το τελευταίο στάδιο έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Στάδιο $n = 3$

s	$f_3^*(s)$	x_3^*
0	0.80	0
1	0.50	1
2	0.30	2

Στάδιο $n = 2$

$x_2 \backslash s$	$f_2(s, x_2) = p_2(x_2) \cdot f_3^*(s - x_2)$			$f_2^*(s)$	x_2^*
	0	1	2		
0	0.48			0.48	0
1	0.30	0.32		0.30	0
2	0.18	0.20	0.16	0.16	2

Στάδιο $n = 1$

$x_1 \backslash s$	$f_1(s, x_1) = p_1(x_1) \cdot f_2^*(s - x_1)$			$f_1^*(s)$	x_1^*
	0	1	2		
2	0.064	0.06	0.072	0.06	1

Άρα η βέλτιστη λύση έχει $x_1^* = 1$, που δίνει $s = 2 - 1 = 1$ για το στάδιο $n = 2$, επομένως $x_2^* = 0$, που δίνει $s = 1 - 0 = 1$ για το στάδιο $n = 3$ και επομένως $x_3^* = 1$. Επειδή $f_1^*(3) = 0.06$, η κατανομή $(1, 0, 1)$ των επιστημόνων στις τρεις ομάδες θα ως αποτέλεσμα η πιθανότητα αποτυχίας και των τριών ομάδων από 0.192 που ήταν πριν την κατανομή των επιστημόνων να μειωθεί σε 0.06.

6.5 Ασκήσεις

1. Μια επιχείρηση με τρία καταστήματα έχει αγοράσει πέντε κιβώτια φράουλες. Η κατανομή πιθανότητας των δυνατών πωλήσεων της φράουλας πριν χαλάσει είναι διαφορετική μεταξύ των τριών καταστημάτων. Η διοίκηση θέλει να βρει πως θα καταναείμει τα πέντε κιβώτια στα τρία καταστήματα έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το προσδοκώμενο κέρδος. Για διαχειριστικούς λόγους ένα κιβώτιο δεν μπορεί να χωριστεί μεταξύ των καταστημάτων. Ο παρακάτω πίνακας δίνει το προσδοκώμενο κέρδος από κάθε κατάσταση, όταν του δοθούν διάφοροι αριθμοί κιβωτίων.

Αριθμός κιβωτίων	Κατάστημα		
	1	2	3
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

Χρησιμοποιήστε το δυναμικό προγραμματισμό για να προσδιορίσετε πόσα κιβώτια πρέπει να εκχωρηθούν σε καθένα από τα τρία καταστήματα, ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό προσδοκώμενο κέρδος.

2. Μία φοιτήτρια έχει στη διάθεσή της επτά ημέρες πριν από τις τελικές εξετάσεις της σε τέσσερα μαθήματα και θέλει να καταναείμει το χρόνο μελέτης όσο πιο αποτελεσματικά γίνεται. Χρειάζεται τουλάχιστον μία ημέρα για κάθε μάθημα και θέλει να συγκεντρωθεί μόνο σε ένα μάθημα την ημέρα. Έτσι, μπορεί να εργαστεί μία ή δύο ή τρεις ή τέσσερις ημέρες για κάθε μάθημα. Επειδή διδάχθηκε πρόσφατα το μάθημα της επιχειρησιακής έρευνας, αποφάσισε να χρησιμοποιήσει δυναμικό προγραμματισμό για να κάνει αυτές τις εκχωρήσεις έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει τη συνολική βαθμολογία της από τα τέσσερα μαθήματα. Έχει υπολογίσει, ότι για διαφορετικές κατανομές σε κάθε μάθημα θα πάρει τους βαθμούς του παρακάτω πίνακα.

Αριθμός ημερών	Μάθημα			
	1	2	3	4
1	3	5	2	6
2	5	5	4	7
3	6	6	7	9
4	7	9	8	9

3. Ένας υποψήφιος πρωθυπουργός ενός πολιτικού κόμματος σχεδιάζει το πρόγραμμά του για τις επόμενες βουλευτικές εκλογές. Υπάρχουν έξι εθελοντές, που προθυμοποιούνται να τον βοηθήσουν και που μπορούν να κατανεμηθούν σε τέσσερις περιοχές με τέτοιο τρόπο ώστε

να μεγιστοποιείται η αποτελεσματικότητά τους. Ο υποψήφιος πιστεύει ότι δεν είναι αποτελεσματικό να εκχωρηθεί ένας εθελοντής σε περισσότερες από μία περιφέρειες, ενώ είναι πρόθυμος να μην εκχωρήσει εθελοντές σε μία περιφέρεια εφόσον μπορούν να αποδώσουν περισσότερο σε άλλη περιφέρεια. Ο παρακάτω πίνακας δίνει την αύξηση στη δύναμη του κόμματος που θα προέλθει από την εκχώρηση ενός αριθμού εθελοντών σε κάθε περιφέρεια.

Αριθμός εθελοντών	Περιφέρεια			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	9	14	10	13
2	19	23	21	23
3	30	32	30	29
4	39	37	37	33
5	45	40	43	35
6	48	43	45	37

Χρησιμοποιήστε τον δυναμικό προγραμματισμό για να προσδιορίσετε πόσοι από τους έξι εθελοντές πρέπει να εκχωρηθούν σε κάθε περιφέρεια, ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική αύξηση της δύναμης του κόμματος.

4. Μια επιχείρηση με τρία καταστήματα έχει αγοράσει πέντε κιβώτια φράουλες. Η κατανομή πιθανότητας των δυνατών πωλήσεων της φράουλας πριν χαλάσει είναι διαφορετική μεταξύ των τριών καταστημάτων. Η διοίκηση θέλει να βρει πως θα κατανείμει τα πέντε κιβώτια στα τρία καταστήματα έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το προσδοκώμενο κέρδος. Για διαχειριστικούς λόγους ένα κιβώτιο δεν μπορεί να χωριστεί μεταξύ των καταστημάτων ενώ τουλάχιστον ένα κιβώτιο φράουλες θα πρέπει εκχωρηθεί σε κάθε κατάστημα. Ο παρακάτω πίνακας δίνει το προσδοκώμενο κέρδος από κάθε κατάσταση, όταν τουδοθούν διάφοροι αριθμοί κιβωτίων.

Αριθμός κιβωτίων	Κατάστημα		
	1	2	3
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

Χρησιμοποιήστε το δυναμικό προγραμματισμό για να προσδιορίσετε πόσα κιβώτια πρέπει να εκχωρηθούν σε καθένα από τα τρία καταστήματα, ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό προσδοκώμενο κέρδος.

5. Ένας υποψήφιος πρωθυπουργός ενός πολιτικού κόμματος σχεδιάζει το πρόγραμμά του για τις επόμενες βουλευτικές εκλογές. Υπάρχουν έξι εθελοντές, που προθυμοποιούνται να τον βοηθήσουν και που μπορούν να κατανεμηθούν σε τέσσερις περιοχές με τέτοιο τρόπο ώστε να μεγιστοποιείται η αποτελεσματικότητά τους. Ο υποψήφιος πιστεύει ότι δεν είναι αποτελεσματικό να εκχωρηθεί ένας εθελοντής σε περισσότερες από μία περιφέρειες. Επίσης, πιστεύει ότι πρέπει σε κάθε περιφέρεια να καταχωρηθεί τουλάχιστον ένας εθελοντής έτσι ώστε να αυξηθεί η δύναμη του κόμματος και στις τέσσερις περιφέρειες. Ο παρακάτω πίνακας δίνει την αύξηση στη δύναμη του κόμματος που θα προέλθει από την εκχώρηση ενός αριθμού εθελοντών σε κάθε περιφέρεια.

Αριθμός εθελοντών	Περιφέρεια			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	9	14	10	13
2	19	23	21	23
3	30	32	30	29
4	39	37	37	33
5	45	40	43	35
6	48	43	45	37

Χρησιμοποιήστε τον δυναμικό προγραμματισμό για να προσδιορίσετε πόσοι από τους έξι εθελοντές πρέπει να εκχωρηθούν σε κάθε περιφέρεια, ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική αύξηση της δύναμης του κόμματος.