

Άλγεβρα Boole και Υλικό Υπολογιστή

- Άλγεβρα Boole
 - Η σχέση της άλγεβρας Boole με την δομή των υπολογιστών και με τον προγραμματισμό.
- Υλικό υπολογιστή
 - Οργάνωση Κεντρικής Μονάδας Επεξεργασίας, μνήμη, είσοδος - έξοδος

Άλγεβρα Boole

- Η τεχνολογία των υπολογιστών (ολοκληρωμένα κυκλώματα, τρανζίστορ, κ.λπ, υπαγορεύει την χρήση του δυαδικού συστήματος για την αναπαράσταση της πληροφορίας με δυο καταστάσεις: $\{0,1\}$.
- Η άλγεβρα των λογικών σχέσεων
- Ιδιαίτερα χρήσιμη για τον *σχεδιασμό* και την *ανάλυση* των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων που υλοποιούν τις λειτουργίες των υπολογιστών
- Αναφέρεται σε μεταβλητές που παίρνουν δύο τιμές, {αληθές, ψευδές}, $\{0,1\}$, κ.λπ. και ονομάζονται **λογικές μεταβλητές**.
- Ορίζονται οι τελεστές AND, OR και NOT.
- Ο ορισμός των παραπάνω σχέσεων και τελεστών γίνεται με βάση τους παρακάτω **πίνακες αλήθειας**.

Σημασία λογικών τελεστών: Πίνακες αλήθειας

Πράξη AND

A	B	A AND B ή AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

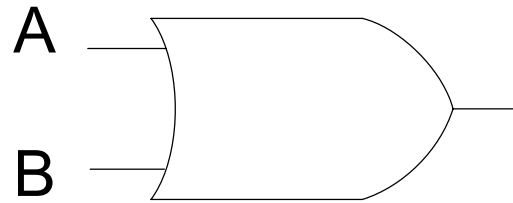
Πράξη OR

A	B	A OR B ή A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Πράξη NOT

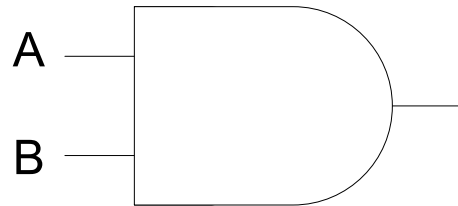
A	NOT A ή $\bar{A}$
0	1
1	0

Λογικές πύλες



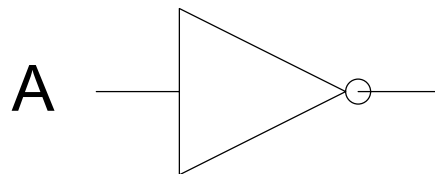
$A \text{ OR } B \text{ ή } A+B$

Πύλη OR



$A \text{ AND } B \text{ ή } AB$

Πύλη AND



$\text{NOT } A \text{ ή } A'$

Πύλη NOT

Μαθηματικός ορισμός της άλγεβρας Boole

- Η δίτιμη άλγεβρα Boole
 - ορίζεται σε ένα σύνολο $\{1,0\}$
 - *περιέχει* τους *δυαδικούς* τελεστές AND, OR και τον *μοναδιαίο* τελεστή NOT
 - Αντί για $A \text{ AND } B$ γράφουμε AB
 - Αντί για $A \text{ OR } B$ γράφουμε $A+B$
 - Αντί για $\text{NOT } A$ γράφουμε A' ή $\bar{A}$
- έτσι ώστε για οποιαδήποτε στοιχεία $A, B, C \in \{0,1\}$
να ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα:

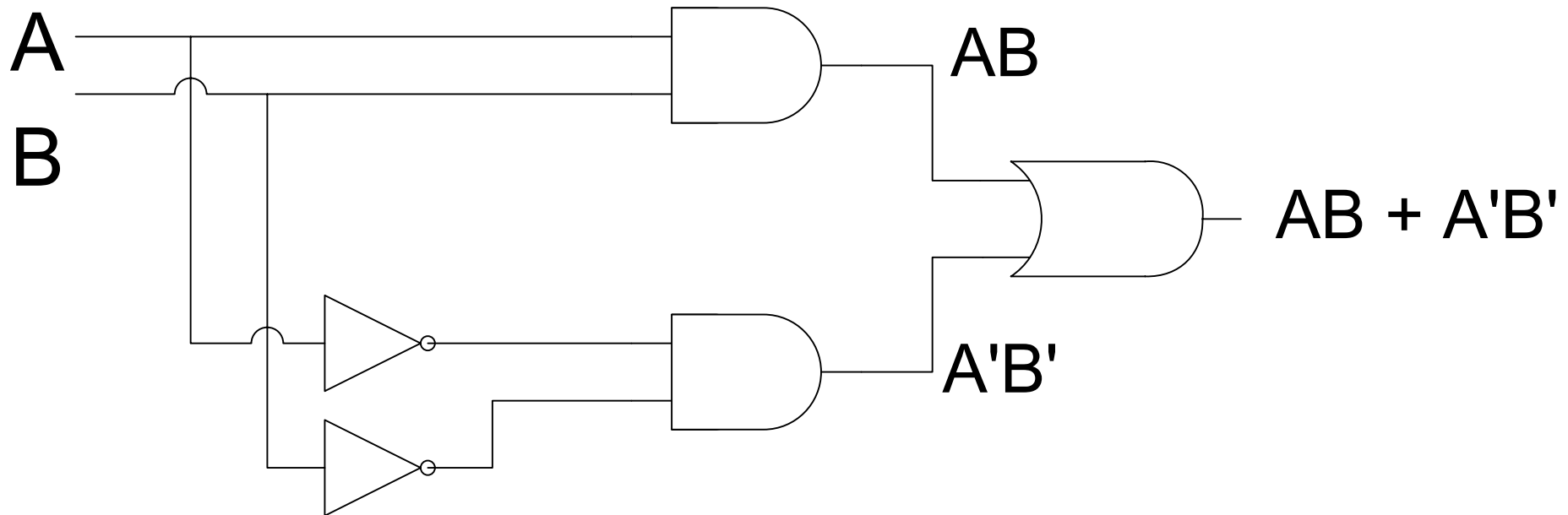
Αξιώματα άλγεβρας Boole

1. Αντιμεταθετικότητα
 $AB = BA$ και $A+B = B+A$
2. Προσεταιριστικότητα
 $(AB)C = A(BC)$ και $(A+B)+C = A + (B+C)$
3. Επιμεριστικότητα
 $A(B+C) = (AB)+(AC)$ και $A+(BC) = (A+B) (A+C)$
4. Απορροφητικό στοιχείο
 $(A+B)A = A$ και $(AB)+A=A$
5. Συμπληρώματα
 $A + A' = 1$ και $AA' = 0$
6. Ουδέτερο στοιχείο
 $A+0 = A$ και $A1=A$
7. Κλειστότητα του συνόλου $\{0,1\}$ ως προς τους τελεστές AND, OR, NOT.

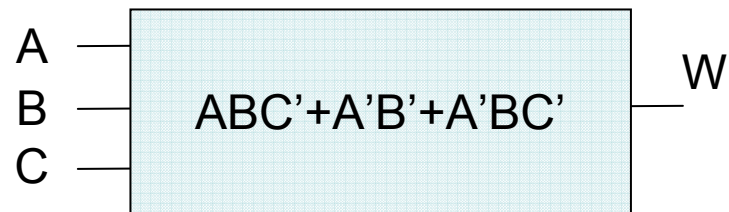
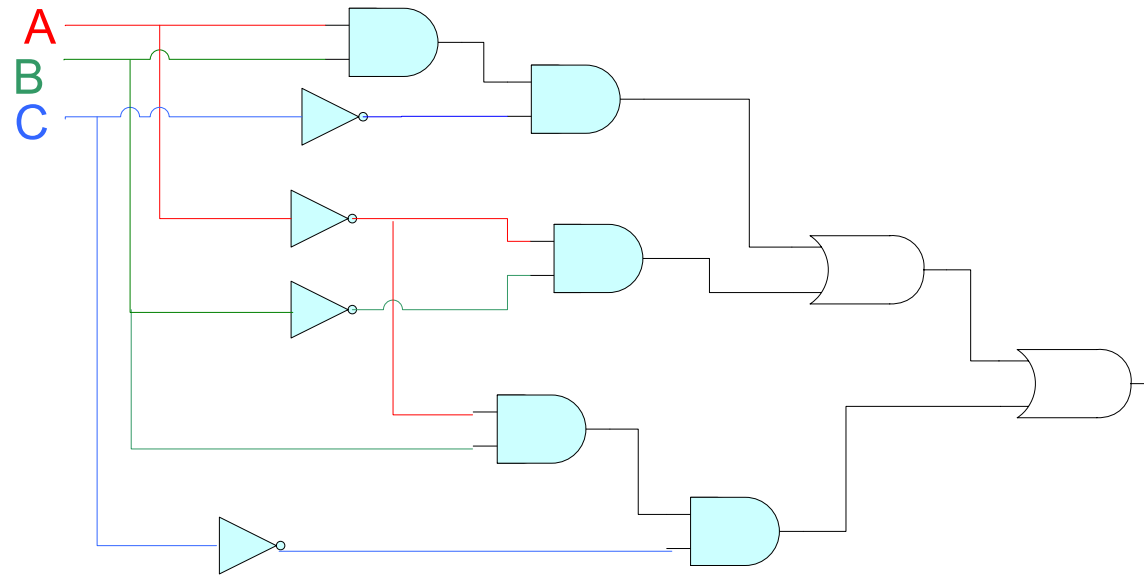
Παράδειγμα λογικού κυκλώματος

Μια παράσταση στην άλγεβρα Boole παριστάνεται από ένα κύκλωμα με χρήση λογικών πυλών.

Το παρακάτω κύκλωμα υλοποιεί την λογική συνάρτηση $F = AB + A'B'$.



Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα



Πίνακας αλήθειας λογικής συνάρτησης

- Να βρεθεί ο πίνακας αλήθειας για την παρακάτω λογική συνάρτηση:

$$W = ABC' + A'B' + A'BC'$$

A	B	C	A'	B'	C'	ABC'	A'B'	A'BC'	W
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Μορφή αθροίσματος γινομένων

A	B	C	W
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

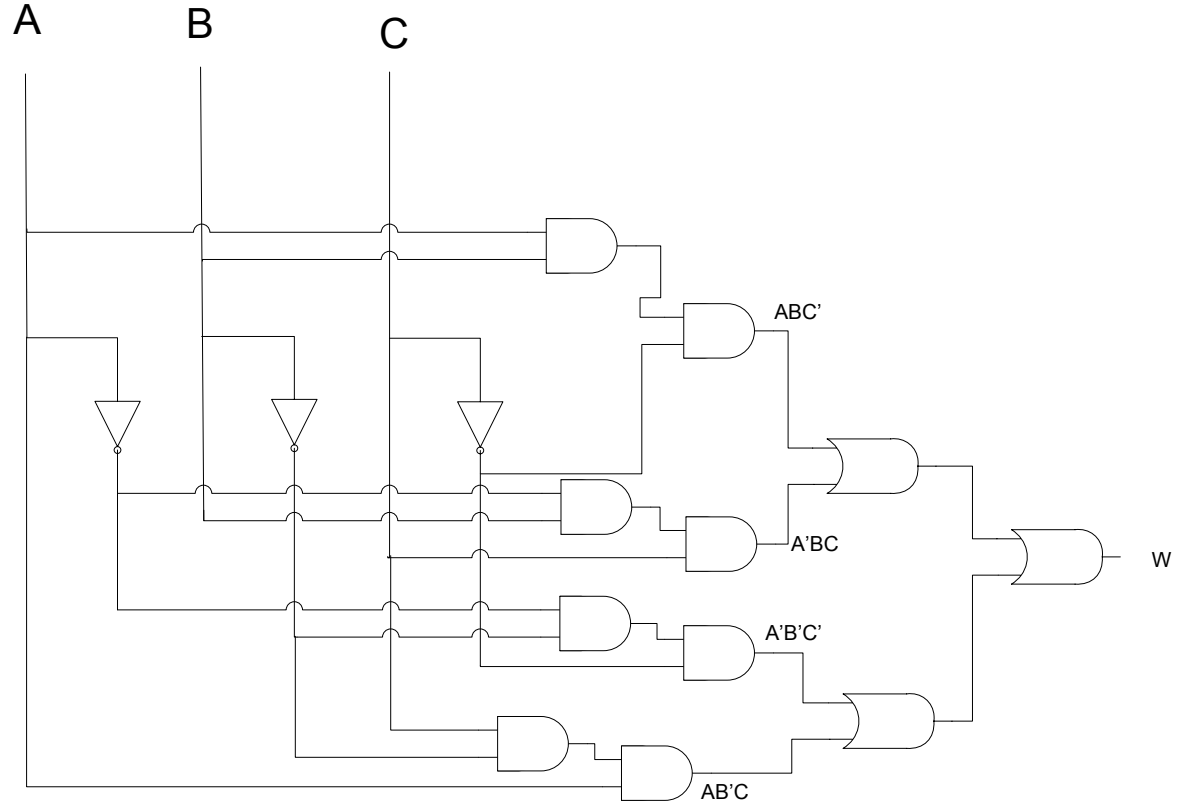
Για την περιγραφή μιας συνάρτησης σε μορφή αθροίσματος γινομένων με δεδομένο τον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης:

1. Κάνουμε τον πίνακα αλήθειας σε σχέση με τις μεταβλητές της παράστασης
2. Για κάθε '1' προσθέτουμε τον αντίστοιχο όρο στην παράσταση ως εξής:
 1. Προστίθεται η αντίστοιχη μεταβλητή ως έχει αν έχει την τιμή 1
 2. Προστίθεται η άρνησή της, αν έχει την τιμή 0 στον πίνακα αλήθειας.

$$W = A'B'C' + A'BC + ABC' + AB'C$$

Να γίνει το κύκλωμα της προηγούμενης διαφάνειας

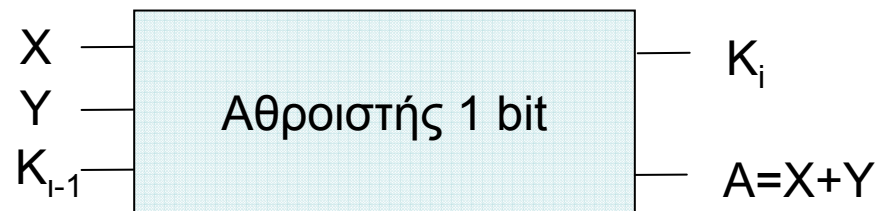
- Υλοποίηση της συνάρτησης
 $W = A'B'C' + A'BC + ABC' + AB'C$



Παράδειγμα: Σχεδίαση αθροιστή

- Ένα κύκλωμα αθροιστή υλοποιεί την πρόσθεση ενός bit με κρατούμενο
- Ο πίνακας αλήθειας δίνεται στον διπλανό πίνακα
- Χρησιμοποιείται για την υλοποίηση της πρόσθεσης αριθμών n bit.

x_i	y_i	K_{i-1} ή B_{i-1}	$x_i + y_i + K_{i-1}$	K_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



Υλοποίηση αθροιστή

- Η συνάρτηση Boole για το άθροισμα είναι
 - $A = X'Y'K_{i-1} + XY'K_{i-1}' + XK_{i-1}' + XYK_{i-1}$
- Η συνάρτηση Boole για το υπόλοιπο είναι
 - $K_i = X'YK_{i-1} + XY'K_{i-1} + X'YK_{i-1}' + XYK_{i-1}$
- Η σχεδίαση του κυκλώματος αφήνεται ως άσκηση...

Απλοποίηση παράστασης

- Μια έκφραση που πρόκειται να υλοποιηθεί ως ένα κύκλωμα είναι σκόπιμο να **απλοποιηθεί**, καθώς έτσι θα προκύψουν κυκλώματα με μικρότερο αριθμό πυλών και συνδέσεων.
- Η απλοποίηση γίνεται
 - Αλγεβρικά
 - Απαιτεί ιδιαίτερη εξοικείωση με την άλγεβρα Boole
 - Με χρήση των χαρτών **Karnaugh**
 - Εύκολη, σχετικά, τεχνική

Απλοποίηση παράστασης

- Αλγεβρική απλοποίηση:
Έστω η παράσταση $W=ABC + ABC'$. Ισχύει
$$\begin{aligned}ABC + ABC' &= AB(C+C') \\ &= AB1 \\ &= AB\end{aligned}$$
- Αυτή η τεχνική είναι δύσκολη για σύνθετες εκφράσεις.
- Εναλλακτική τεχνική: Χάρτες Karnaugh.

Συνδυαστικά και ακολουθιακά κυκλώματα

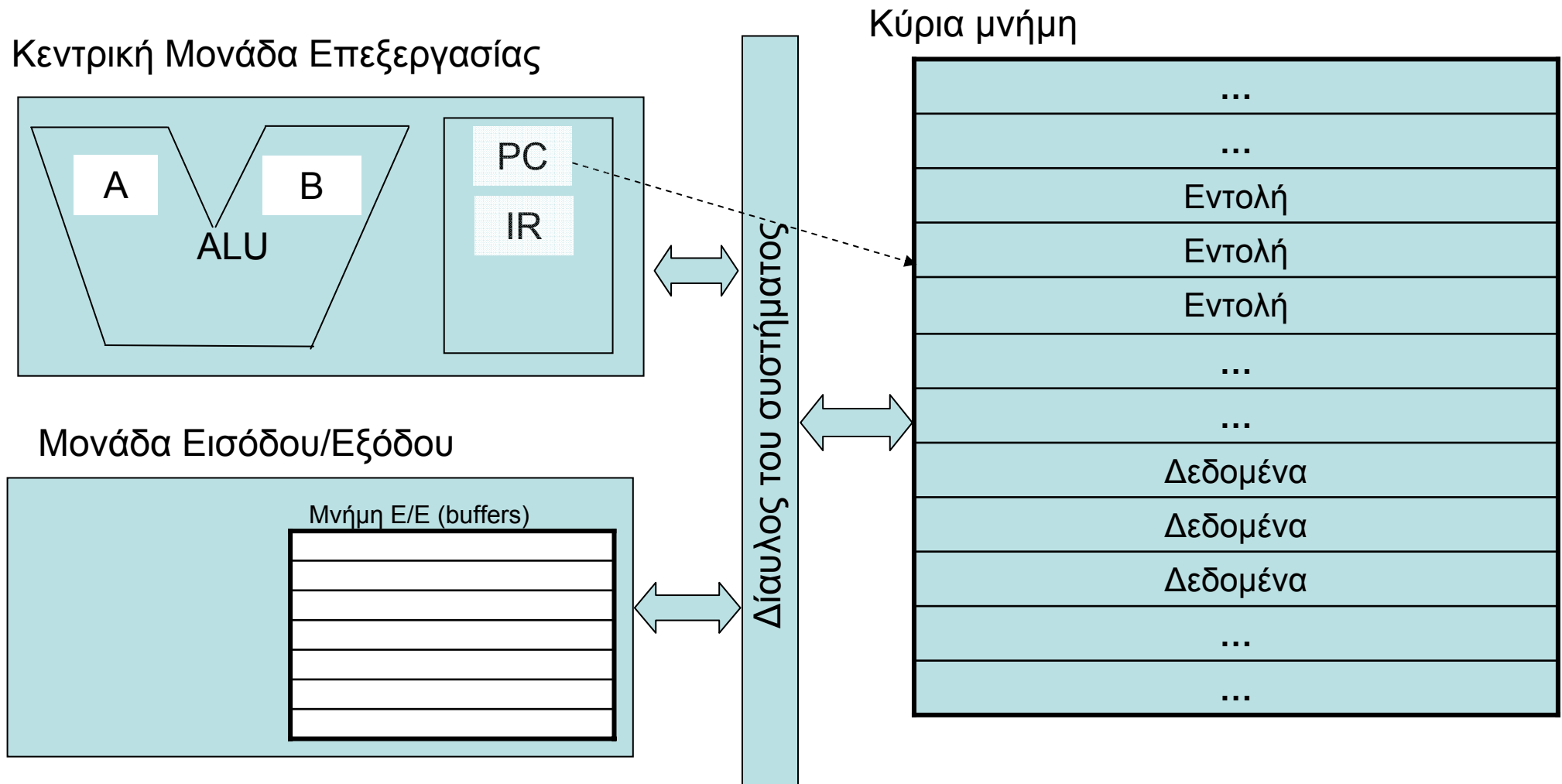
- Στα συνδυαστικά κυκλώματα η τιμή της εξόδου εξαρτάται από τις τιμές των εισόδων
- Στα ακολουθιακά κυκλώματα η τιμή εξόδου εξαρτάται από τις τιμές των εισόδων καθώς και τις προηγούμενες τιμές εισόδου, δηλαδή από την τρέχουσα κατάσταση του κυκλώματος
 - Χρονισμός
 - Τα ακολουθιακά κυκλώματα διαθέτουν *μνήμη*.
 - Τέτοια κυκλώματα χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση της μνήμης και των καταχωρητών σε ένα υπολογιστικό σύστημα.

Δείτε περισσότερα

- William Stallings, Οργάνωση και Αρχιτεκτονική Υπολογιστών, 6^η έκδοση, εκδόσεις Τζιόλα, 2003.
- Andrew S. Tanenbaum, Η Αρχιτεκτονική των Υπολογιστών, 4^η Αμερικανική έκδοση, εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2000.
- M. Morris Mano, Ψηφιακή Σχεδίαση, 2^η έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου,
- <http://webster.cs.ucr.edu/AoA/Windows/HTML/DigitalDesign.html>

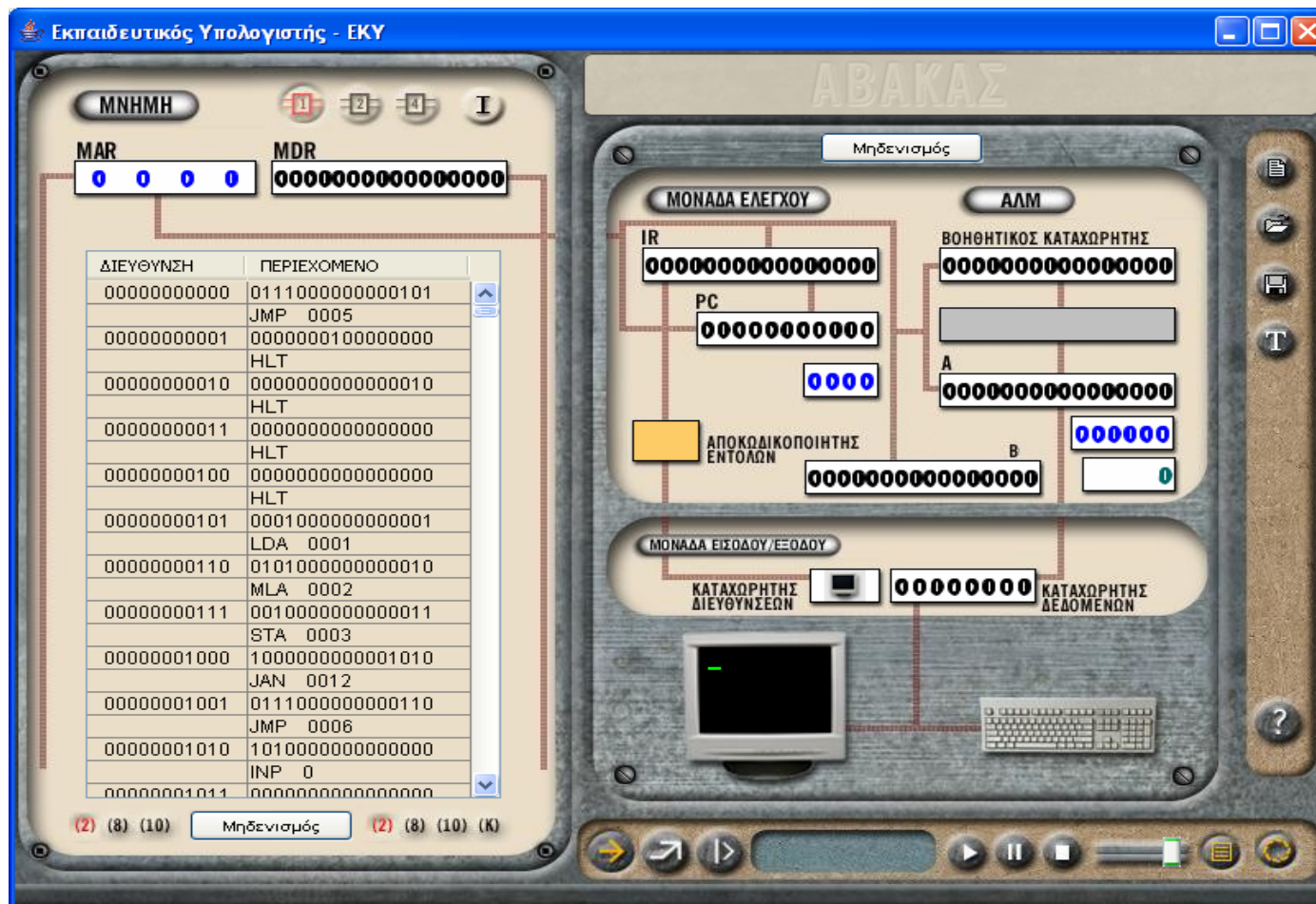
Δομή και λειτουργία ενός απλού υπολογιστή

Αρχιτεκτονική υπολογιστών (επαν.)



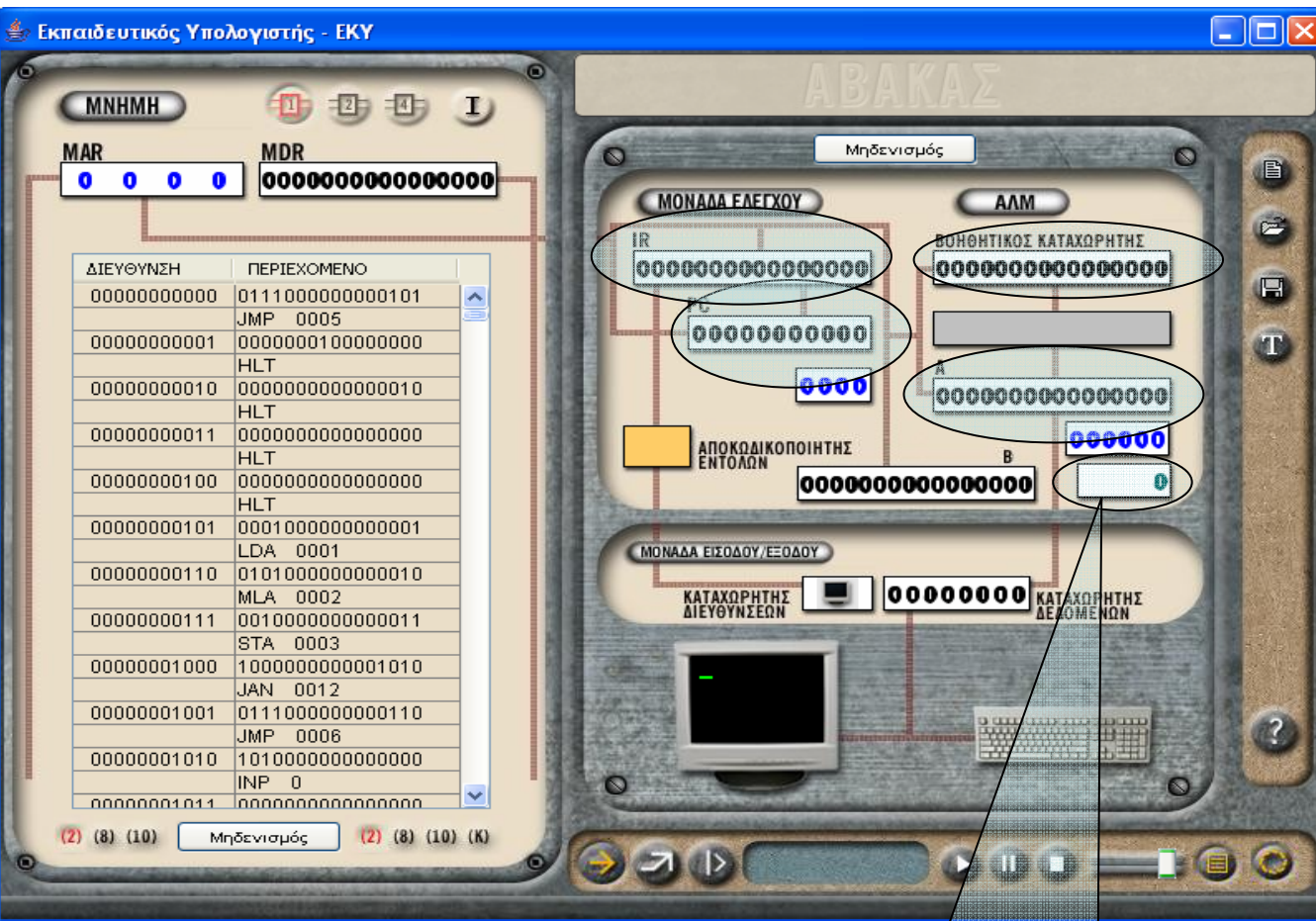
Μελέτη του υλικού ενός απλού, υποθετικού εκπαιδευτικού υπολογιστή

Εκπαιδευτικός υπολογιστής (ΕΚΥ)



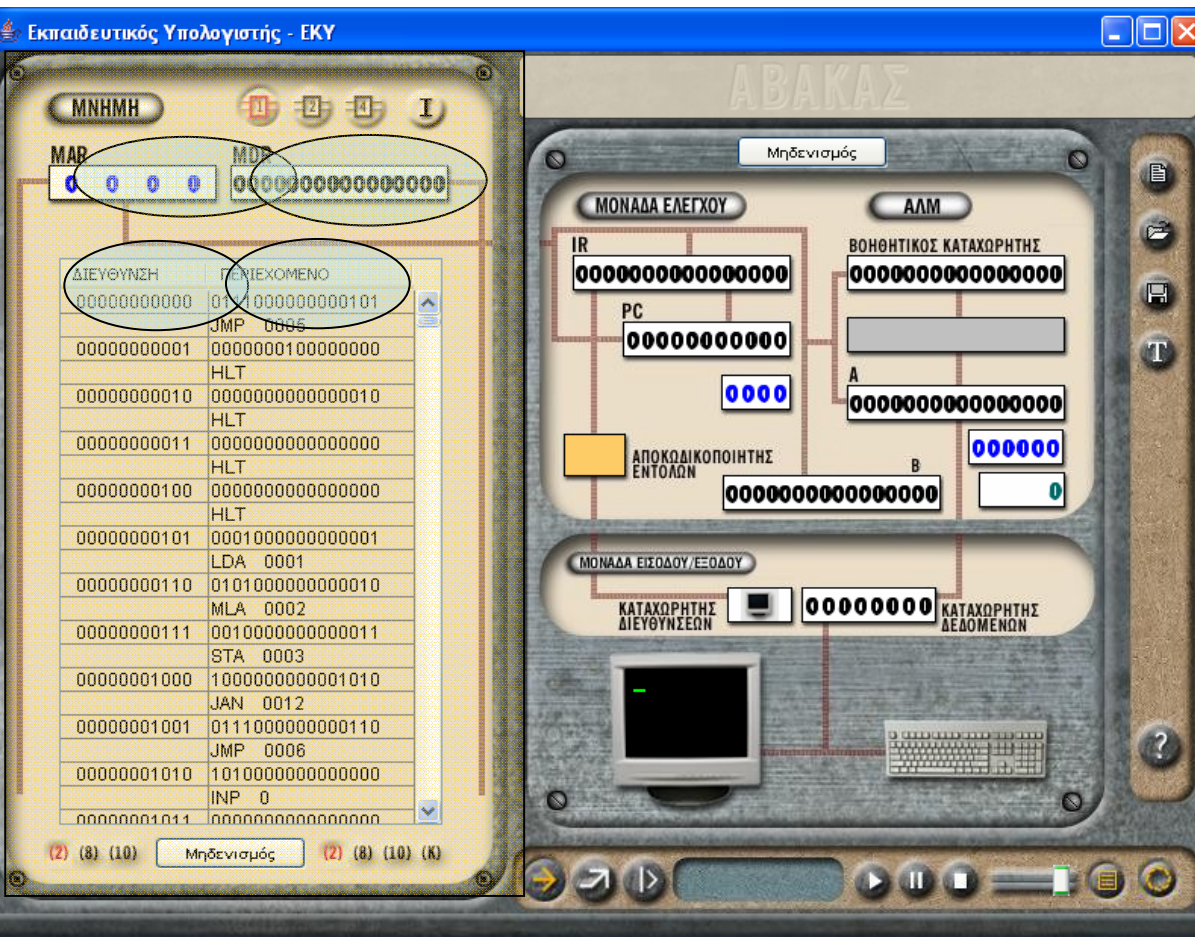
<http://www.cslab.ntua.gr/courses/csintro/EKY/>

Κεντρική Μονάδα Επεξεργασίας ΕΚΥ



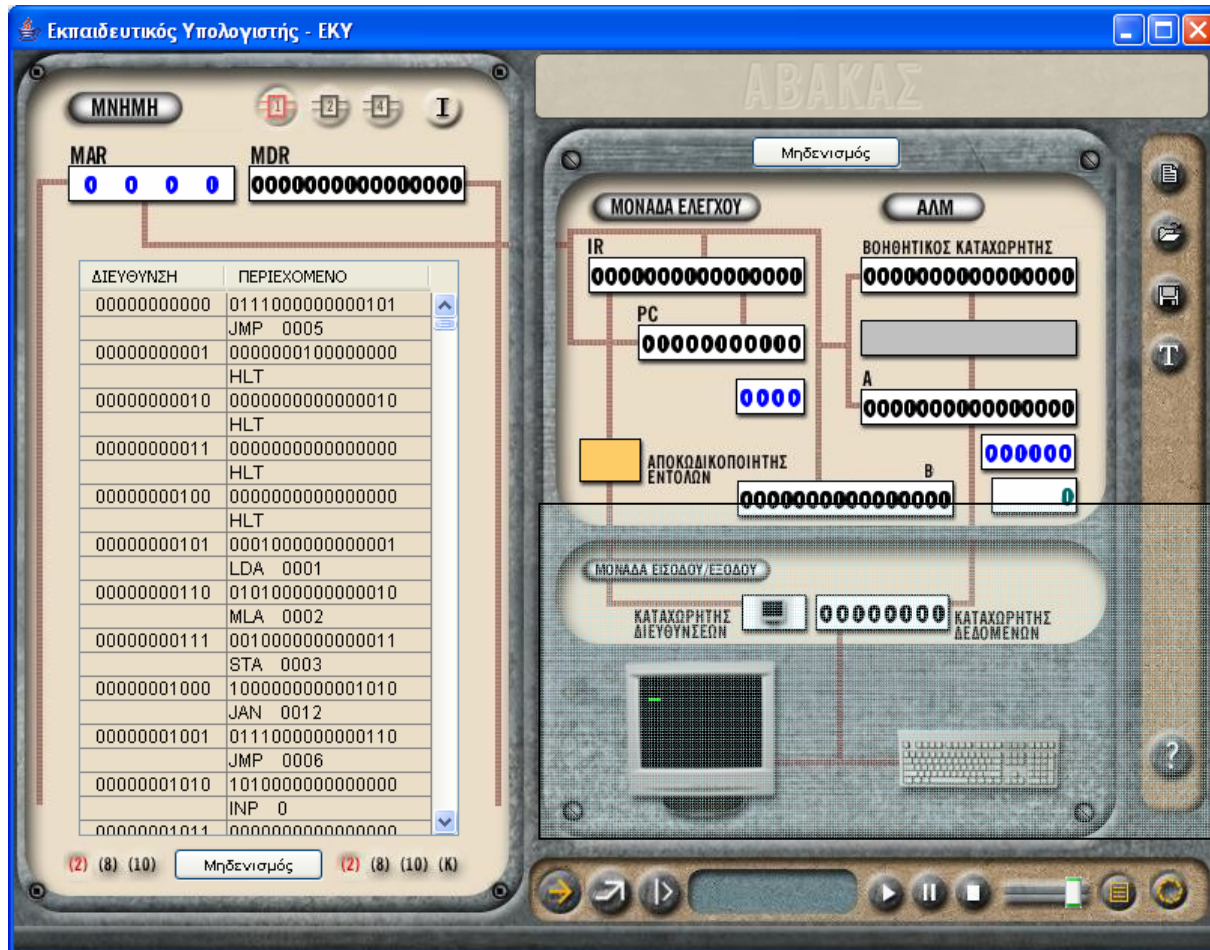
- Αριθμητική και λογική μονάδα
 - Καταχωρητής A (συσσωρευτής) (16 bit)
 - Βοηθητικός καταχωρητής
 - Εκτέλεση αριθμητικών και λογικών πράξεων με χρήση κατάλληλων κυκλωμάτων
- Μονάδα ελέγχου
 - Μετρητής προγράμματος (PC) (12 bit)
 - Καταχωρητής εντολών (IR) (16 bit)

Μονάδα μνήμης ΕΚΥ



- Καταχωρητής δεδομένων μνήμης – MDR (16 bit)
- Καταχωρητής διευθύνσεων μνήμης –MAR (12 bit)
- Λειτουργίες
 - Ανάγνωση (από τον MDR)
 - Εγγραφή (στον MDR)
- Κάθε φορά διαβάζονται ή εγγράφονται δεδομένα στη διεύθυνση που είναι καταχωρημένη στον καταχωρητή διευθύνσεων

Μονάδα εισόδου/εξόδου ΕΚΥ



Σε έναν πραγματικό υπολογιστή η μονάδα εισόδου/εξόδου **ελέγχει** συσκευές όπως:

- Πληκτρολόγιο
- Οθόνη
- Ποντίκι
- ...

Λειτουργία ΕΚΥ

1. Κύκλος ανάκτησης εντολής

1. Το περιεχόμενο του PC διαβάζεται από τη μνήμη στον IR (μέσω των MAR και MDR)
2. Το περιεχόμενο του PC αυξάνεται κατά 1, ώστε να δείχνει στην διεύθυνση της επόμενης εντολής

2. Κύκλος εκτέλεσης εντολής

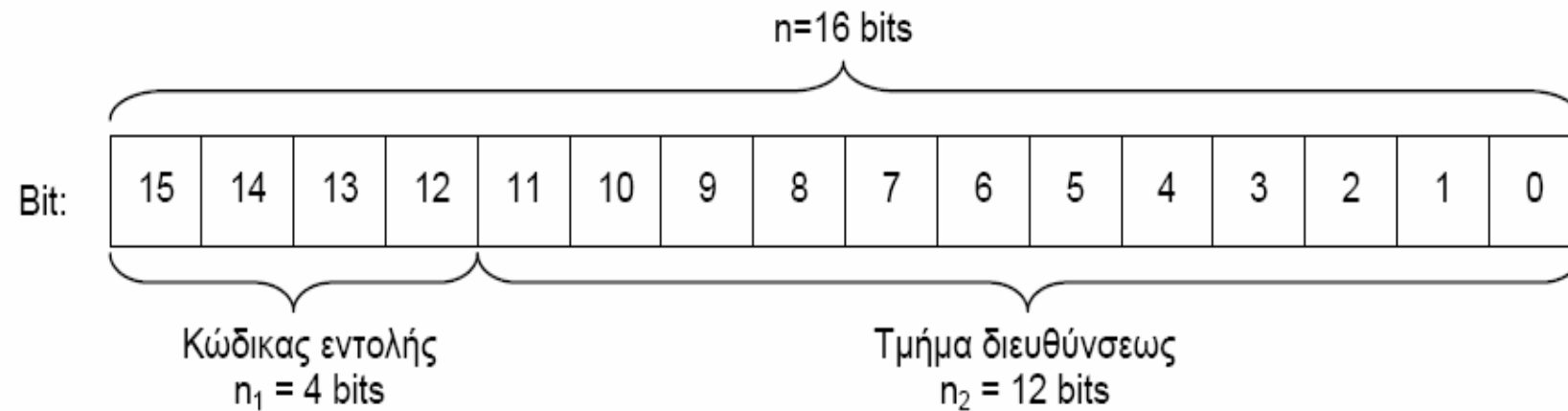
Η εντολή που βρίσκεται στον IR **αποκωδικοποιείται** και στη συνέχεια εκτελείται

Κατά τη φάση εκτέλεσης είναι δυνατόν να ξαναδιαβαστεί η μνήμη για τη λήψη πρόσθετων δεδομένων.

Συμβολική γλώσσα του ΕΚΥ

- Κάθε υπολογιστής εκτελεί **εντολές**.
- Οι εντολές δίνονται στον υπολογιστή:
 - απευθείας σε δυαδική (ή δεκαεξαδική) αναπαράσταση: *γλώσσα μηχανής ή*
 - σε κατάλληλη μορφή κειμένου η οποία είναι δυνατόν να μεταφραστεί άμεσα σε γλώσσα μηχανής (*συμβολική γλώσσα – assembly*).
- Μια εντολή του ΕΚΥ παριστάνεται με μια λέξη του υπολογιστή, με 16 bit.

Μορφή εντολής ΕΚΥ



Εντολές αναφοράς στη μνήμη

- LDA XXX Κωδικός εντολής: 0001
 - Μεταφορά στον συσσωρευτή του περιεχομένου της θέσης μνήμης XXX
- STA XXX Κωδικός εντολής: 0010
 - Μεταφορά του περιεχομένου του συσσωρευτή στη θέση μνήμης XXX
- ADA XXX Κωδικός εντολής: 0011
 - Πρόσθεση στον συσσωρευτή του περιεχομένου της θέσης μνήμης XXX
- SBA XXX Κωδικός εντολής: 0100
 - Αφαίρεση από τον συσσωρευτή του περιεχομένου της θέσης μνήμης XXX
- MLA XXX Κωδικός εντολής: 0101
 - Πολ/μός του περιεχομένου του συσσωρευτή με το περιεχόμενο της θέσης μνήμης XXX
- DVA XXX Κωδικός εντολής: 0110
 - Ακέραια διαίρεση του περιεχομένου του συσσωρευτή με το περιεχόμενο της θέσης μνήμης XXX. Το υπόλοιπο αγνοείται

Παράδειγμα

0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Η παραπάνω εντολή σε συμβολική μορφή (assembly) αναπαρίσταιται ως

ADA 9

Και σημαίνει: πρόσθεσε στον συσσωρευτή το περιεχόμενο της θέσης μνήμης 9.

Έστω ότι μετά τη φάση ανάκλησης ο IR περιέχει την παραπάνω εντολή. Η φάση εκτέλεσης, μετά την αποκωδικοποίηση της εντολής, περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

1. Δώσε στον MAR την τιμή 9
2. Αντίγραψε το περιεχόμενο της θέσης μνήμης 9 στον MDR
3. Αντίγραψε το περιεχόμενο του MDR στον βοηθητικό καταχωρητή
4. Πρόσθεσε το περιεχόμενο του βοηθητικού καταχωρητή στον συσσωρευτή

Πρόγραμμα σε γλώσσα μηχανής στη μνήμη του ΕΚΥ

Διεύθυνση μνήμης	Περιεχόμενο		
	Κώδικας εντολής	Τμήμα διεύθυνσης	
000000000000	0001	000000001010	Εντολές προγράμματος
000000000001	0011	000000001011	
000000000010	0010	000000001100	
000000000011	0000	000000000000	
...	...	...	
000000001010	0000	000100000000	Δεδομένα
000000001011	0000	000100000001	
000000001100	0000	000000000000	Διεύθυνση αποθήκευσης αποτελέσματος
...	...	...	

Θέση μνήμης	Εντολή (assembly)		Περιεχόμε να	μνήμης
0	lda	5	0001	000000000101
1	ada	6	0011	000000000110
2	sta	7	0100	000000000111
3	hlt		0000	000000000000
4				
5	10			
6	20			
7				
8				
9				

- Περισσότερα για τη δομή και τη λειτουργία του ΕΚΥ δείτε στο <http://www.cslab.ntua.gr/courses/csintro/files/eky-assembly-2005.pdf>