

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3. Ασκήσεις στις Μαρκοβιανές αλυσίδες σε συνεχή χρόνο

1. Έστω ότι ο αριθμός των σωματιδίων $X(u)$ σε μία περιοχή του επιπέδου εμβαδού $u > 0$ ακολουθεί την ανέλιξη Poisson με ένταση λ . Αν W είναι η απόσταση μεταξύ ενός σωματιδίου και του κοντινότερου γειτονικού του, να βρεθούν: (α) Η πυκνότητα $f_W(w)$. (β) Η μέση τιμή $E(W)$.

2. Η κίνηση σε ένα ορεινό επαρχιακό δρόμο ακολουθεί την ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda = 6$ αυτοκίνητα ανά λεπτό. Ένας λαγός ξεφεύγει από ένα κοντινό δάσος και προσπαθεί να περάσει στο απέναντι μέρος του δρόμου. Αν ένα τουλάχιστον αυτοκίνητο περάσει το δρόμο στα επόμενα 5 δευτερόλεπτα, τότε ο λαγός θα σκοτωθεί. Ποια η πιθανότητα να σκοτωθεί ο λαγός;

3. Υποθέτουμε ότι ταξιδιώτες φτάνουν σε ένα σιδηροδρομικό σταθμό σύμφωνα με την ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ . Αν το τρένο αναχωρεί τη χρονική στιγμή t , υπολογίστε το αναμενόμενο άθροισμα των χρόνων άφιξης των ταξιδιωτών που φτάνουν στο σταθμό το χρονικό διάστημα $(0, t)$, δηλαδή υπολογίστε την ποσότητα $E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)\right]$, όπου S_i είναι η τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει το συνολικό αριθμό αφίξεων ταξιδιωτών στο σιδηροδρομικό σταθμό στο χρονικό διάστημα $(0, t)$.

4. Έστω $X(t)$ μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ . Υποθέτουμε ότι κάθε φορά που συμβαίνει κάποιο γεγονός αυτό ταξινομείται ως γεγονός τύπου I ή τύπου II με αντίστοιχες πιθανότητες p και $1-p$ ανεξάρτητα από όλα τα άλλα γεγονότα. Έστω $X_1(t), X_2(t)$ οι αριθμοί των γεγονότων τύπου I και II, αντίστοιχα, που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Δείξτε ότι:

$$P[X_1(t) = n] = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^n}{n!}, n = 0, 1, \dots, \quad P[X_2(t) = m] = e^{-\lambda(1-p)} \frac{[\lambda(1-p)]^m}{m!}, m = 0, 1, \dots$$

5. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της Άσκησης 4, αν οι μετανάστες σε μία περιοχή A φθάνουν σε αυτήν σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό 10 ανά εβδομάδα και κάθε μετανάστης είναι αγγλικής καταγωγής με πιθανότητα $\frac{1}{12}$, ποια είναι η πιθανότητα να μην μεταναστεύσει κανένας που έχει αγγλική καταγωγή στην περιοχή A κατά τη διάρκεια του Φεβρουαρίου;