



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σημειώσεις για το μάθημα

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

Θεοδόσης Δημητράκος

E-mail: dimitheo@aegean.gr

Σάμος
2010

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΑΝΑΣΥΣΤΑΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Σ' αυτό το κεφάλαιο, θα υπενθυμίσουμε βασικά στοιχεία της θεωρίας Πιθανοτήτων τα περισσότερα εκ των οποίων θα χρησιμοποιηθούν για την εισαγωγή και την κατανόηση εννοιών στα επόμενα κεφάλαια.

§1. Α Ροπές Κατανομών και Ροπογεννήτριες

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 1.1 Η ροπή k -τάξεως $k=1,2,\dots$ της X ή της κατανομής της είναι η ποσότητα $\mu_k := E[X^k]$ ή ισοδύναμα

$$\mu_k := \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx, & \text{αν } X \text{ συνεχής} \\ \sum_{x \in S_X} x^k P\{X=x\}, & \text{αν } X \text{ διακριτή} \end{cases}$$

όπου $f_X(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X (στην περίπτωση που η X είναι συνεχής) και S_X είναι το σύνολο τιμών της X (στην περίπτωση που η X είναι διακριτή).

Για $k=1$, παρατηρούμε ότι $\mu_1 = E[X]$, δηλαδή η ροπή 1ης τάξεως συμπίπτει με τη μέση τιμή της X .

Ορισμός 1.2 Η κεντρική ροπή k -τάξεως, $k=1,2,\dots$ της X ή της κατανομής της είναι η ποσότητα $\mu'_k := E[X - E[X]]^k$

ή ισοδύναμα

$$\mu'_k := \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^k f_X(x) dx, & \text{αν } X \text{ συνεχής} \\ \sum_{x \in S_X} (x - E[X])^k P\{X=x\}, & \text{αν } X \text{ διακριτή} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι για $k=2$, $\mu'_2 = \text{var}(X)$, δηλαδή η κεντρική ροπή δεύτερης τάξεως της X συμπίπτει με τη διασπορά της X .

Παράδειγμα 1.3 Έστω X το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αερόληπτου βολιού. Η ροπή 3^{ης} τάξεως της X είναι:

$$E[X^3] = \sum_{x=1}^6 x^3 P\{X=x\} = \sum_{x=1}^6 x^3 \frac{1}{6} = \frac{21^2}{6}.$$

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \mu'_2 = \text{var}(X) &= E[X - \mu_1]^2 = E[X^2 - 2\mu_1 X + \mu_1^2] \\ &= E[X^2] - 2\mu_1 E[X] + \mu_1^2 = \mu_2 - 2\mu_1^2 + \mu_1^2 \\ &= \mu_2 - \mu_1^2 \end{aligned}$$

Άρα: $\mu'_2 = \mu_2 - \mu_1^2$ ή ισοδύναμα $\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

Ο παραπάνω τύπος είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τον υπολογισμό της διασποράς τυχίων μεταβλητών.

Παράδειγμα 1.4 Έστω $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, $p \in [0, 1]$. Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά της X .

Απάντηση: Είναι

$$E[X] = \sum_{x=0}^1 x P\{X=x\} = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^1 x^2 P\{X=x\} = 0(1-p) + 1^2 p = p$$

Άρα: $\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1-p) \quad \square$

Παράδειγμα 1.5 Έστω $X \sim \text{Poisson}(\lambda), \lambda > 0$. Να υπολογισ-
-4-
-στούν η μέση τιμή και η διασπορά της X .

Απάντηση Είναι: $S_X = \{1, 2, \dots\}$.

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=1}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \stackrel{n=x-1}{=} \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

$$E[X^2] = E[X(X-1)] + E[X] = \lambda + \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda + \sum_{x=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} = \lambda + \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$$

$$\stackrel{n=x-2}{=} \lambda + \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda + \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda + \lambda^2$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda. \quad \boxtimes$$

Παράδειγμα 1.6 Έστω $X \sim \text{Exponential}(\lambda), \lambda > 0$. Να
υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά της X .

Απάντηση Είναι:

$$E[X] = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{\infty} x (e^{-\lambda x})' dx = \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= 0 - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} (e^{-\lambda x})' dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda},$$

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{\infty} x^2 (e^{-\lambda x})' dx = \left[-x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

$$= 2 \left(\left[x e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Άρα $\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$. $\square$

Παράδειγμα 1.7 Έστω $X \sim N(0, 1)$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι $\mu_K = 0$, αν K -περιττός.

Απάντηση: Είναι

$$\mu_K := E[X^K] = \int_{-\infty}^{\infty} x^K f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^K f_X(x) dx + \int_0^{\infty} x^K f_X(x) dx$$

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $u = -x$ στο πρώτο ολοκληρώμα. Συνεπώς,

$$\mu_K := - \int_0^{\infty} (-u)^K f_X(-u) du + \int_0^{\infty} x^K f_X(x) dx$$

αφού K περιττός
και $f_X(x)$ άρτια

$$= - \int_0^{\infty} u^K f_X(u) du + \int_0^{\infty} x^K f_X(x) dx = 0 \quad \square$$

Θεωρούμε την τ.φ. X και τις πραγματικές σταθερές a, b .

Ισχύει ότι: $\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$.

Απόδειξη: $\text{var}(aX + b) = E[(aX + b)^2] - [E(aX + b)]^2$

$$= E(a^2 X^2 + b^2 + 2abX) - (aE[X] + b)^2$$

$$= a^2 E[X^2] + \cancel{b^2} + \cancel{2abE[X]} - a^2 (E[X])^2 - \cancel{b^2} - \cancel{2abE[X]}$$

$$= a^2 [E[X^2] - (E[X])^2] = a^2 \text{var}(X) \quad \square$$

Έστω η τ.ρ. X . Στη συνέχεια, δίνουμε τον ορισμό μιας συνάρτησης που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό των ροπών $\mu_k, k=1,2,\dots$ της X .

Ορισμός 1.8 Ροπογεννήτρια $M_X(t), t \in \mathbb{R}$, μιας τ.ρ. X είναι η πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_{x \in S_X} e^{tx} P\{X=x\}, & \text{αν } X \text{ διακριτή με} \\ & \text{σύνολο τιμών (φορέα)} \\ & S_X \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx, & \text{αν } X \text{ συνεχής με συνάρτηση} \\ & \text{πυκνότητας πιθανότητας} \\ & f_X(x). \end{cases}$$

Η ροπή k -τάξεως μ_k της τ.ρ. X είναι ίση με την k -οστή παράγωγο της $M_X(t)$ στο μηδέν.

$$\text{Δηλαδή } M_X^{(k)}(0) = E[X^k] = \mu_k$$

Είναι

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt} E(e^{tX}) = E\left(\frac{d}{dt} e^{tX}\right) = E(X e^{tX})$$

Η εναλλαγή των $\frac{d}{dt}$ και E είναι εν γένει επιτρεπτή. Προκύπτει ότι: $M_X'(0) = E[X]$. Επίσης, παραγωγίζοντας δύο φορές την $M_X(t)$, έχουμε:

$$M_X''(t) = \frac{d^2}{dt^2} E(e^{tX}) = \frac{d}{dt} E[X e^{tX}] = E\left[\frac{d}{dt} (X e^{tX})\right] =$$

$$= E[X^2 e^{tX}]. \text{ Άρα } M_X''(0) = E[X^2]. \text{ Η } k\text{-οστή παράγωγος}$$

$$\text{της } X \text{ δίνεται από τον τύπο: } M_X^{(k)}(t) = E[X^k e^{tX}],$$

από τον οποίο συνεπάγεται ότι: $\mu_k = E[X^k] = M_X^{(k)}(0)$

Παράδειγμα 1.9 Έστω $X \sim \text{binomial}(n, p)$ όπου n θετικός αμέραιος και $p \in [0, 1]$.

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^n e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} \\ = (pe^t + 1-p)^n$$

$$M_X'(t) = n(pe^t + 1-p)^{n-1} pe^t \text{ συνεπώς}$$

$$E[X] = \mu_1 = M_X'(0) = np$$

$$\text{Επίσης } M_X''(t) = n(n-1)(pe^t + 1-p)^{n-2} (pe^t)^2 + npe^t (pe^t + 1-p)^{n-1}$$

$$\text{Συνεπώς, } E[X^2] = \mu_2 = M_X''(0) = n(n-1)p^2 + np$$

Η διασπορά δίνεται από τη σχέση:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) \quad \square$$

Αν $n=1$, παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα συμφωνούν με εκείνα που λάβαμε σε προηγούμενο παράδειγμα (Παράδειγμα 1.4), δηλαδή όταν $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Παράδειγμα 1.10 Έστω $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$\text{Είναι } M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} P\{X=x\} = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\ = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$

$$\text{Παραγωγίζοντας: } M_X'(t) = \lambda e^t \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$

$$M_X''(t) = (\lambda e^t)^2 \exp\{\lambda(e^t - 1)\} + \lambda e^t \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$

$$\text{και συνεπώς } E[X] = M_X'(0) = \lambda, \quad E[X^2] = M_X''(0) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad \square$$

Παράδειγμα 1.11 Έστω $X \sim \text{Exponential}(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-t)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda-t},$$

για $t < \lambda$. Η ροπογεννήτρια της τ.ρ. X ορίζεται μόνο για εκείνα τα $t < \lambda$. Παραγωγίζοντας την $M_X(t)$ έχουμε:

$$M'_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2} \quad \text{και} \quad M''_X(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}$$

$$\text{Συνεπώς} \quad E[X] = M'_X(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad E[X^2] = M''_X(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\text{Η διασπορά της } X \text{ είναι: } \text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Παράδειγμα 1.12 Έστω $Z \sim N(0,1)$

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2-2tx}{2}\right\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}\right\} dx$$

$$= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx \quad \underline{y=x-t} \quad e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= e^{t^2/2}, \text{ διότι } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi} \quad \square$$

Παράδειγμα 1.13 Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Η τ.ρ. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ συνεπώς

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E(e^{t(\sigma Z + \mu)}) = e^{t\mu} E(e^{t\sigma Z}) = e^{t\mu} M_Z(t\sigma)$$

$$= e^{\mu t} e^{\frac{(t\sigma)^2}{2}} = \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t\right\}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε: $M_X'(t) = (\mu + t\sigma^2) \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t\right\}$

$$M_X''(t) = (\mu + t\sigma^2) \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t\right\} + \sigma^2 \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t\right\}$$

Άρα $E[X] = M_X'(0) = \mu$ και $E[X^2] = M_X''(0) = \mu^2 + \sigma^2$

Συνεπώς, $\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \sigma^2$ $\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι η ροπογεννήτρια της τ.φ. X "Χαρακτηρίζει" την κατανομή της.

Πρόταση 1.14 Η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της τ.φ. X χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την κατανομή της X .

Παράδειγμα 1.15 Υποθέτουμε ότι η ροπογεννήτρια της τ.φ. X είναι $M_X(t) = \exp\{3(e^t - 1)\}$, $t \in \mathbb{R}$. Ποιά είναι η τιμή της $P\{X=0\}$;

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι η ροπογεννήτρια M_X της X είναι η ροπογεννήτρια της $\text{Poisson}(3)$. Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι: $X \sim \text{Poisson}(3)$. Συνεπώς $P\{X=0\} = e^{-3}$ $\square$

§1.Β Διανυσματικές Τυχαίες Μεταβλητές

Έστω τυχαίες μεταβλητές $X_1, \dots, X_n$ ορισμένες στον ίδιο χώρο με πιθανότητα $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Για κάθε $i=1, \dots, n$ έχουμε συναρτήσεις $X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Έχοντάς μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τις τ.φ. $X_1, \dots, X_n$ σε συνδυασμό για να διερευνήσουμε τυχόν συσχετίσεις τους. Έχοντάς, λοιπόν, μας ενδιαφέρει το διάνυσμα των τ.φ. $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Για παράδειγμα, έστω X_1 το βάρος, X_2 το ύψος, X_3 η ηλικία και X_4 η πίεση ενός

ασθενούς. Για να διερευνήσουμε τυχόν συσχετίσεις αυτών των τ.ρ. μελετούμε το διάνυσμα $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$.

Ορισμός 1.16 Ένα διάνυσμα $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ n τυχαίων μεταβλητών στο χώρο με πιθανότητα $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ καλείται n -διάστατη τ.ρ. ή διανυσματική τυχαία μεταβλητή (δ.τ.ρ.) και είναι τέτοια ώστε $\underline{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ διότι αν $\omega \in \Omega$ τότε μέσω της $\underline{X}$: $\omega \in \Omega \mapsto \underline{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n$.

Στη συνέχεια, θα αναπτύξουμε τη θεωρία των διανυσματικών τ.ρ. για την περίπτωση κατά την οποία $n=2$, δηλαδή όταν $\underline{X} = (X, Y)$.

Ορισμός 1.17 Η συνάρτηση κατανομής $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ της διανυσματικής τ.ρ. (X, Y) ορίζεται ως εξής:

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}, \quad -\infty < x, y < \infty$$

Η συνάρτηση κατανομής F_X της τ.ρ. X μπορεί ναληφθεί από την συνάρτηση F της δ.τ.ρ. (X, Y) ως εξής:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} \\ &= P\left\{\lim_{y \rightarrow \infty} \{X \leq x, Y \leq y\}\right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} P\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) \quad \text{δηλαδή} \quad F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) \end{aligned}$$

(Εδώ η αλλαγή της θέσης του $\lim$ και P είναι επιτρεπτή)

Οι συναρτήσεις F_X και F_Y καλούνται περιθώριες συναρτήσεις κατανομής των X και Y .

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι διακριτές, τότε ορίζουμε τη συνάρτηση πιθανότητας $p(x, y)$ της δ.τ.ρ. (X, Y) , όπου

$x \in S_X, y \in S_Y$, ως εξής: $p(x,y) = P\{X=x, Y=y\}$

Ισχύει ότι: $\sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} p(x,y) = 1$ που είναι απαραίτητη συνθήκη για να είναι μία συνάρτηση p συνάρτηση πιθανότητας της (X,Y) .

Η συνάρτηση πιθανότητας p_X της τ.μ. X μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της p ως εξής:

$$p_X(x) = P\{X=x\} = \sum_{y \in S_Y} P\{X=x, Y=y\} = \sum_{y \in S_Y} p(x,y), \text{ όπου } x \in S_X$$

Όμοια,

$$p_Y(y) = P\{Y=y\} = \sum_{x \in S_X} P\{X=x, Y=y\} = \sum_{x \in S_X} p(x,y), \text{ όπου } y \in S_Y$$

Παράδειγμα Έστω δ.τ.μ. (X,Y) με φορέα $S = \{1,2\} \times \{1,2,3\}$ και 1.18 συνάρτηση πιθανότητας

$$p(x,y) = P\{X=x, Y=y\} = \frac{1}{45} (x+3y), (x,y) \in S.$$

- (α) Δείξτε ότι η $p(x,y)$ είναι πράγματι συνάρτηση πιθανότητας.
(β) βρείτε τις συναρτήσεις πιθανότητας των X και Y .

Απάντηση: (α) $p(x,y) \geq 0 \quad (x,y) \in S$ και $\sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 p(x,y)$

$$= \frac{1}{45} \sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 (x+3y) = 1$$

(β) $p_X(x) = P\{X=x\} = \sum_{y=1}^3 p(x,y) = \frac{x+6}{15} = \begin{cases} \frac{7}{15}, & x=1 \\ \frac{8}{15}, & x=2 \end{cases}$

$$p_Y(y) = P\{Y=y\} = \sum_{x=1}^2 p(x,y) = \frac{1+2y}{15} = \begin{cases} \frac{3}{15}, & y=1 \\ \frac{5}{15}, & y=2 \\ \frac{7}{15}, & y=3, \end{cases}$$

Είναι δυνατόν να συνοψίσουμε τους παραπάνω υπολογισμούς στον πίνακα:

$x \backslash y$	1	2	3	$P_X(x)$
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{7}{15}$
2	$\frac{5}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{11}{45}$	$\frac{8}{15}$
$P_Y(y)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{7}{15}$	1

Οι συναρτήσεις πιθανότητας $P_X(x)$ και $P_Y(y)$ καλούνται περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας διότι εμφανίζονται στο περιθώριο του παραπάνω πίνακα.

Η δ.τ.ρ. (X, Y) είναι συνεχής όταν υπάρχει μία συνάρτηση $f(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$P[(X, Y) \in G] = \int \int_{(x, y) \in G} f(x, y) dx dy, \text{ όπου } G \text{ είναι ένα υποσύνολο των } \mathbb{R}^2.$$

Η συνάρτηση $f(x, y)$ καλείται πυκνότητα της δ.τ.ρ. (X, Y) . Αν A και B είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών, τότε ορίζοντας:

$$G = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} = A \times B \text{ έχουμε από την προηγούμενη σχέση ότι: } P\{X \in A, Y \in B\} = \int_B \int_A f(x, y) dx dy$$

Αν $A = (-\infty, a]$ και $B = (-\infty, b]$ έχουμε:

$$P[X \in (-\infty, a], Y \in (-\infty, b]] = P\{X \leq a, Y \leq b\} = F(a, b) \\ = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^a f(x, y) dx dy$$

Παραγωγίζοντας ως προς a και b , έχουμε:

$$f(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a, b)$$

Η παραπάνω σχέση συνδέει τη συνάρτηση πυκνότητας και τη συνάρτηση κατανομής της δ.τ.ρ. (X, Y) .

Αν η δ.τ.ρ. (X, Y) είναι συνεχής, τότε οι τ.ρ. X και Y είναι συνεχείς και η συνάρτηση πυκνότητας τους υπολογίζεται ως εξής:

$$P\{X \in A\} = P\{X \in A, Y \in (-\infty, \infty)\} = \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = \int_A f_X(x) dx$$

όπου $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ είναι η πυκνότητα της X . Ομοίως η πυκνότητα της τ.ρ. Y δίνεται από τη σχέση:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Παράδειγμα 1.19 Η συνάρτηση πυκνότητας της δ.τ.ρ. (X, Y)

δίνεται από τον τύπο: $f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y}, & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Υπολογίστε: (1) $P\{X > 1, Y < 1\}$ (2) $P\{X < Y\}$ (3) $P[X < a]$

Απάντηση

$$(1) P\{X > 1, Y < 1\} = \int_0^1 \int_1^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y} dx dy$$

$$= \int_0^1 2e^{-2y} [-e^{-x}]_1^{\infty} dy = e^{-1} \int_0^1 2e^{-2y} dy = e^{-1}(1 - e^{-2})$$

$$(2) P[X < Y] = \iint_{\{(x, y) | x < y\}} 2e^{-x}e^{-2y} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^y 2e^{-x}e^{-2y} dx dy$$

$$= \int_0^{\infty} 2e^{-2y}(1 - e^{-y}) dy = \int_0^{\infty} 2e^{-2y} dy - \int_0^{\infty} 2e^{-3y} dy = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$(3) P[X < a] = \int_0^a \int_0^{\infty} 2e^{-2y}e^{-x} dy dx = \int_0^a e^{-x} dx = 1 - e^{-a} \quad \square$$

Παράδειγμα 1.20 Η συνάρτηση πυκνότητας της δ.τ.ρ. (X, Y) δίνεται από τον τύπο: $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας της τ.ρ. X/Y .

Απάντηση Υπολογίζουμε τη συνάρτηση κατανομής της τ.ρ. X/Y . Για $a > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} F_{X/Y}(a) &= P\left[\frac{X}{Y} \leq a\right] = \iint_{\{(x,y) \mid X/Y \leq a\}} e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^\infty \int_0^{ay} e^{-(x+y)} dx dy \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-ay}) e^{-y} dy = \left[-e^{-y} + \frac{e^{-(a+1)y}}{a+1} \right]_0^\infty = 1 - \frac{1}{a+1} \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς a λαμβάνουμε την συνάρτηση πυκνότητας της τ.ρ. X/Y , η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X/Y}(a) = (a+1)^{-2}, \quad a > 0 \quad \square$$

Πρόταση 1.21 Η μέση τιμή μιας πραγματικής συνάρτησης $g(X, Y)$ της δ.τ.ρ. (X, Y) είναι:

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy, \text{ αν } (X, Y) \text{ συνεχής}$$

$$\text{ή } E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) p(x, y), \text{ αν } (X, Y) \text{ διακριτή}$$

Η έννοια της ανεξαρτησίας δύο τ.ρ. δίνεται από τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.22 Οι τυχάιες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες αν για οποιαδήποτε υποσύνολα A και B του συνόλου των

πραγματικών αριθμών, ισχύει ότι:

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\} P\{Y \in B\} \quad (1)$$

Ισοδύναμα, οι τ.ρ. X και Y είναι ανεξάρτητες όταν και μόνο όταν για οποιαδήποτε A και B , τα ενδεχόμενα $E_A = \{X \in A\}$ και $F_B = \{Y \in B\}$ είναι ανεξάρτητα.

Αποδεικνύεται ότι η σχέση (1) ισχύει όταν και μόνο όταν για οποιαδήποτε a, b ισχύει:

$$P\{X \leq a, Y \leq b\} = P\{X \leq a\} P\{Y \leq b\} \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$F(a, b) = F_X(a) F_Y(b)$$

Όταν οι X και Y είναι διακριτές τ.ρ., η συνθήκη (1) της ανεξαρτησίας είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$P\{X=x, Y=y\} = P\{X=x\} P\{Y=y\}, \text{ για κάθε } x, y \quad (2)$$

Η ισοδυναμία των σχέσεων (1) και (2) εξηγείται ως εξής:

Παίρνοντας $A = \{x\}$, $B = \{y\}$ λαμβάνουμε τη (2). Επιπλέον, αν η σχέση (2), ισχύει, τότε για οποιαδήποτε σύνολα A και B , έχουμε:

$$\begin{aligned} P\{X \in A, Y \in B\} &= \sum_{y \in B} \sum_{x \in A} P\{X=x, Y=y\} = \sum_{y \in B} \sum_{x \in A} P(X=x) P(Y=y) \\ &= \sum_{y \in B} P(Y=y) \sum_{x \in A} P(X=x) = P(Y \in B) P(X \in A) \text{ και έτσι} \end{aligned}$$

λαμβάνουμε τη σχέση (1).

Όταν οι X και Y είναι συνεχείς τ.ρ. η συνθήκη (1) της ανεξαρτησίας είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \text{ για κάθε } x,y$$

-16-

Διαισθητικά, οι τ.ρ. X και Y είναι ανεξάρτητες όταν η γνώση της τιμής της μίας εξ αυτών δεν επηρεάζει την κατανομή της άλλης. Αν δύο τ.ρ. δεν είναι ανεξάρτητες, τότε καλούνται εξαρτημένες.

Παράδειγμα 1.23 Ένας άνδρας και μία γυναίκα έχουν συμφωνήσει να συναντηθούν σ' ένα φαγαροπλασείο κάποια χρονική στιγμή μεταξύ 12:00 και 13:00 το μεσημέρι. Υποθέτουμε ότι ο άνδρας φθάνει στο φαγαροπλασείο στις $12+X$ και η γυναίκα στις $12+Y$ και οι τ.ρ. X, Y είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$. Υπολογίστε την πιθανότητα $P\{|X-Y| > \frac{1}{6}\}$, δηλαδή ο ένας να περιμένει τον άλλο για περισσότερο από δέκα λεπτά.

Λύση: Το ενδεχόμενο $\{|X-Y| > \frac{1}{6}\}$ μπορεί να γραφεί ως

$$\text{εξής: } \{|X-Y| > \frac{1}{6}\} = \{X-Y > \frac{1}{6}\} \cup \{X-Y < -\frac{1}{6}\}$$

και τα δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα. Άρα,

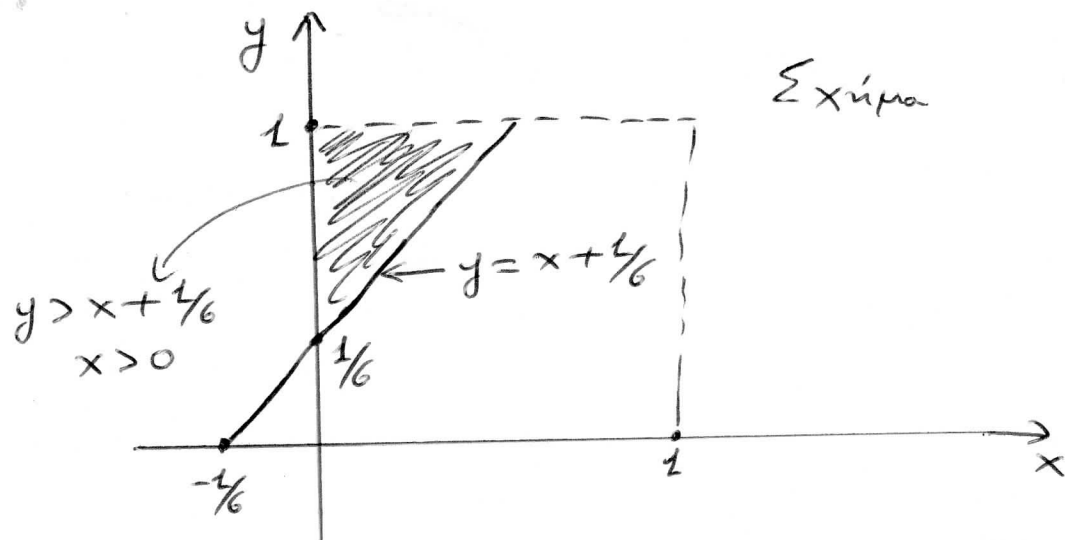
$$P\{|X-Y| > \frac{1}{6}\} = P\{Y + \frac{1}{6} < X\} + P\{X + \frac{1}{6} < Y\}$$

$$\begin{aligned} &\text{Λόγω} \\ &\text{συμμετρίας} \quad 2 P\{X + \frac{1}{6} < Y\} = 2 \iint_A f(x,y) dx dy, \\ &\quad A = \{(x,y) | x + \frac{1}{6} < y\} \end{aligned}$$

όπου $f(x,y)$ είναι η πυκνότητα της (X,Y) .

Λόγω της ανεξαρτησίας των X, Y έχουμε

$$P\{|X-Y| > \frac{1}{6}\} = 2 \iint_A f_X(x) f_Y(y) dx dy = 2 \iint_A dx dy$$



Βλέπε
σχήμα

$$2 \int_{1/6}^1 \left(\int_0^{y-1/6} dx \right) dy = 2 \int_{1/6}^1 (y - 1/6) dy = 2 \frac{25}{72} = \frac{25}{36}$$

Παράδειγμα 1.24 Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των ατόμων που εισέρχονται κατά τη διάρκεια μιας ημέρας σ' ένα ταχυδρομείο ακολουθεί την κατανομή Poisson (λ). Δείξτε ότι, αν το κάθε άτομο που εισέρχεται στο ταχυδρομείο είναι άνδρας με πιθανότητα p και γυναίκα με πιθανότητα $1-p$, τότε ο αριθμός των ανδρών και γυναικών που εισέρχονται στο ταχυδρομείο κατά τη διάρκεια μιας ημέρας είναι ανεξάρτητες τ.ρ. που ακολουθούν την κατανομή Poisson με παραμέτρους λp και $\lambda(1-p)$, αντίστοιχα.

Απάντηση: Έστω X και Y , αντίστοιχα, ο αριθμός των ανδρών και των γυναικών που εισέρχονται στο ταχυδρομείο κατά τη διάρκεια μιας ημέρας. Από το Θεώρημα ΟΔΙΜΗΣ Πιθανότητας έχουμε για $i, j = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} P\{X=i, Y=j\} &= P\{X=i, Y=j \mid X+Y=i+j\} P\{X+Y=i+j\} \\ &\quad + \underbrace{P\{X=i, Y=j \mid X+Y \neq i+j\}}_0 P\{X+Y \neq i+j\} \end{aligned}$$

$$= P\{X=i, Y=j | X+Y=i+j\} P\{X+Y=i+j\}$$

$$= \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^{i+j-i} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}$$

Διότι η δευτερεύουσα κατανομή της X δοθέντος ότι $X+Y=i+j$ είναι η $\text{Binomial}(i+j, p)$ και $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$\text{Συνεπώς, } P\{X=i, Y=j\} = e^{-\lambda} (\lambda p)^i \frac{[\lambda(1-p)]^j}{i! j!}, i, j = 0, 1, \dots$$

Η περιθώρια κατανομή της X υπολογίζεται ως εξής:

$$P\{X=i\} = \sum_{j=0}^{\infty} P\{X=i, Y=j\} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}, i = 0, 1, \dots$$

Συνεπώς $X \sim \text{Poisson}(\lambda p)$. Ομοίως, η περιθώρια κατανομή της

$$Y \text{ είναι: } P\{Y=j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X=i, Y=j\} = e^{-\lambda(1-p)} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!},$$

$$j = 0, 1, \dots \text{ Άρα } Y \sim \text{Poisson}(\lambda(1-p))$$

Παρατηρούμε ότι: $P\{X=i, Y=j\} = P\{X=i\} P\{Y=j\}, i, j = 0, 1, \dots$

Συνεπώς, οι τ.ρ. X και Y είναι ανεξάρτητες. $\square$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την εύρεση της κατανομής του αθροίσματος δύο ή περισσότερων ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

Παράδειγμα 1.25 Αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ και $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2), \lambda_1, \lambda_2 > 0$ και X, Y ανεξάρτητες τ.ρ. τότε $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Απάντηση: Το ενδεχόμενο $\{X+Y=i\}, i=0, 1, \dots$ μπορεί να γραφεί ως ένωση των ζένων μεταξύ τους $\{X=k, Y=i-k\}$,

$k=0, \dots, i$. Άρα $P\{X+Y=i\} = \sum_{k=0}^i P\{X=k, Y=i-k\} \stackrel{\text{λόγω ανεξ.}}{=} \\ = \sum_{k=0}^i P\{X=k\} P\{Y=i-k\} = \sum_{k=0}^i e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{i-k}}{(i-k)!} \\ = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^i \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{i-k}}{k! (i-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!} \sum_{k=0}^i \frac{i!}{k! (i-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{i-k} \\ = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!} (\lambda_1 + \lambda_2)^i \text{ Συνεπώς } X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad \square$

Το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να ληφθεί εναλλακτικά με χρήση ροπογεννητριών και εφαρμογή της σχετικής πρότασης που παραθέσαμε στη σελίδα 9 (Πρόταση 1.14). Χρειαζόμαστε όμως το παραπάνω αποτέλεσμα που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 1.26 Έστω X, Y τ.ρ. στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.ρ. τότε $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$, όπου g και h είναι πραγματικές συναρτήσεις. Η παραπάνω πρόταση παρέχει έναν διαφορετικό τρόπο επίλυσης του Παραδείγματος 1.25.

2ος Τρόπος για το Παράδειγμα 1.25: Έστω M_X, M_Y, M_{X+Y}

οι ροπογεννήτριες των τ.ρ. $X, Y, X+Y$, αντίστοιχα. Τότε
 $M_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX} e^{tY}) \stackrel{\text{Πρόταση 1.26}}{=} \\ = E(e^{tX}) E(e^{tY}) = M_X(t) M_Y(t)$

Παράδειγμα 1.10 $e^{\lambda(e^t-1)} e^{\mu(e^t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^t-1)}, t \in \mathbb{R}$

Από την Πρόταση 1.14 προκύπτει άμεσα ότι: $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda+\mu)$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γενικευτεί για την περίπτωση κατά την οποία έχουμε $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τ.ρ. τέτοιες ώστε $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i), i=1, \dots, n$. Τότε $X_1 + \dots + X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

Παράδειγμα 1.27 Αν $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ και X, Y ανεξάρτητες τ.ρ. τότε $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Απάντηση $M_{aX+bY}(t) = E(e^{t(aX+bY)}) = E(e^{taX + tBY})$

X, Y ανεξάρτητες $E(e^{taX}) E(e^{tBY}) = M_X(ta) M_Y(tB)$

Παράδειγμα 1.13 $e^{\frac{\sigma_1^2(ta)^2}{2} + \mu_1 ta} e^{\frac{\sigma_2^2(tB)^2}{2} + \mu_2 tB}$

$$= e^{\frac{(a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)t^2}{2} + (a\mu_1 + b\mu_2)t}, t \in \mathbb{R}$$

Από την Πρόταση 1.14 προκύπτει άμεσα ότι:

$$aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2) \quad \square$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γενικευτεί για την περίπτωση που έχουμε $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τ.ρ. τέτοιες ώστε

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1, \dots, n. \text{ Τότε: } a_1X_1 + \dots + a_nX_n \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2\right).$$

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με την εύρεση της μέσης τιμής και της διασποράς του αθροίσματος δύο τ.ρ.

Πρόταση 1.28 Ισχύει ότι $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.

Απόδειξη Έστω ότι η δ.τ.ρ. (X, Y) είναι συνεχής. Τότε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.21 με $g(X, Y) = X+Y$ έχουμε: $E[X+Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dy dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E[X] + E[Y] \quad -21-$$

Αν (X, Y) διακριτή, με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε το αποτέλεσμα. $\square$

Παράδειγμα 1.29 Έστω ότι N άνδρες πετάνε τα καπέλα τους στο πάτωμα ενός δωρατίου. Τα καπέλα ανακατεύονται και ο κάθε άνδρας διαλέγει ένα καπέλο κατά τυχαίο τρόπο. Υπολογίστε τη μέση τιμή του αριθμού των ανδρών που διαλέγουν τα δικά τους καπέλα.

Απάντηση Έστω $X = X_1 + \dots + X_N$, όπου

$$X_i := \begin{cases} 1, & \text{αν ο άνδρας } i \text{ διαλέγει το καπέλο του.} \\ 0, & \text{αν ο άνδρας } i \text{ δεν διαλέγει το καπέλο του.} \end{cases}$$

Ζητάμε τη μέση τιμή $E[X]$. Όμως $E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{1}{N}$, για κάθε $i = 1, \dots, N$. Συνεπώς, $E[X] = E[X_1] + \dots + E[X_N] = 1$. $\square$

Παράδειγμα 1.30 Έστω η εξίσωση: $x^2 + bx + c = 0$, όπου οι συντελεστές b, c θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητες τ.π. που ακολουθούν την ομοιόμορφη $(0, 1)$. Ποια είναι η πιθανότητα οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης να είναι πραγματικές;

Λύση Για να είναι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης πραγματικές, θα πρέπει: $\Delta \geq 0 \Rightarrow b^2 - 4c \geq 0$. Επιζητούμε την πιθανότητα: $P[b^2 - 4c \geq 0]$

Η πυκνότητα της δ.τ.π. (b, c) έχει τύπο:

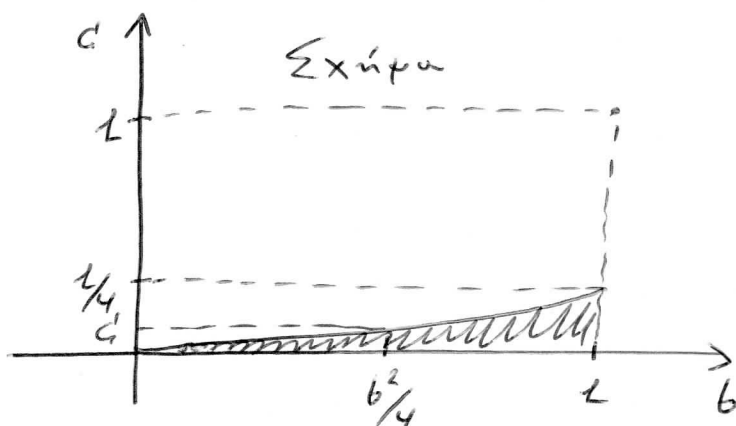
$$f(b, c) = f_b(b) f_c(c) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < b, c < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

b, c ανεξάρτητες τ.π.

$$\text{Συνεπώς, } P[b^2 - 4c \geq 0] = \iint_{\{(b, c): b^2 - 4c \geq 0\}} f(b, c) db dc = \iint_{\substack{b^2 - 4c \geq 0 \\ 0 < b, c < 1}} db dc =$$

$$= \int \int_{\substack{b^2 - 4c \geq 0 \\ 0 < b, c < 1}} dc db = \int_0^1 \int_0^{b^2/4} dc db = \int_0^1 \frac{b^2}{4} db = \frac{1}{4} \left[\frac{b^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

Σχήμα



$$b^2 - 4c = 0 \Rightarrow c = \frac{b^2}{4}$$

Παράδειγμα 1.31 Δέκα κυνηγοί περιμένουν να περάσει ένα σμήνος από δέκα κοτσούφια. Όταν περάσει το σμήνος, οι κυνηγοί πυροβολούν ταυτόχρονα αλλά ο καθένας διαλέγει το στόχο του τυχαία και ανεξάρτητα από τους άλλους. Αν ο κάθε κυνηγός πετυχαίνει το στόχο του με πιθανότητα p , υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό των κοτσούφιών που ξεφεύγουν από τους πυροβολισμούς των κυνηγών.

Λύση Ορίζουμε:

$$X_i := \begin{cases} 1, & \text{αν το } i\text{-κοτσούφι ξεφεύγει} \\ 0, & \text{αν το } i\text{-κοτσούφι δεν ξεφεύγει} \end{cases}, i=1, \dots, 10$$

$$\text{Ζητάμε την } E[X_1 + \dots + X_{10}] = E[X_1] + \dots + E[X_{10}]$$

$$\text{Όπως, } E[X_1 + \dots + X_{10}] = \sum_{i=1}^{10} E[X_i] = 10 E[X_i]$$

Για $i=1, \dots, 10$ είναι:

$$E[X_i] = 1 \cdot P\{X_i=1\} + 0 \cdot P\{X_i=0\} = P\{X_i=1\}$$

$$= P\{\text{το } i\text{-κοτσούφι να ξεφεύγει}\}$$

$$= P\{\text{το } i\text{-κοτσούφι ξεφεύγει από τον κάθε κυνηγό } j=1, \dots, 10\}$$

$$= \prod_{j=1}^{10} P\{\text{το } i\text{-κοτσούφι ξεφεύγει από τον κυνηγό } j=1, \dots, 10\}$$

$$= \prod_{j=1}^{10} \left[1 - P \left\{ \begin{array}{c} \text{ο κνηχός } j \text{ πετυχαίνει το} \\ \text{ε-κοσούφι} \end{array} \right\} \right] = \prod_{j=1}^{10} \left\{ 1 - \frac{P}{10} \right\} = \left(1 - \frac{P}{10} \right)^{10} \quad -23-$$

Διότι ο κάθε κνηχός, ανεξάρτητα από τους άλλους πετυχαίνει το ε-κοσούφι με πιθανότητα $\frac{P}{10}$.

$$\text{Συνεπώς } E(X_1 + \dots + X_{10}) = 10 \left(1 - \frac{P}{10} \right)^{10} \quad \square$$

Η Πρόταση 1.28 μπορεί να γενικευτεί για n τ.ρ. $X_1, \dots, X_n$ ως εξής: $E(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = a_1 E[X_1] + \dots + a_n E[X_n]$, όπου $a_1, \dots, a_n$ πραγματικές σταθερές.

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε τις έννοιες της συνδιακύρμανσης και του συντελεστή συσχέτισης δύο τ.ρ.

Ορισμός 1.32 Η συνδιακύρμανση δύο τ.ρ. X και Y ορίζεται ως εξής:

$$\text{Cov}(X, Y) := E\{(X - E[X])(Y - E[Y])\}.$$

Αναπτύσσοντας το δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης, έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E\{XY - XE[Y] - YE[X] + E[X]E[Y]\} \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] - E[Y]E[X] + E[X]E[Y] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

Αν οι τ.ρ. X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.26 έχουμε $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει, δηλαδή, αν $\text{Cov}(X, Y) = 0$ δεν έπεται ότι οι τ.ρ. X, Y είναι ανεξάρτητες. Πράγματι, αν X είναι μία διακριτή τ.ρ. με σύνολο δυνατών τιμών $S_X = \{-1, 0, 1\}$ και συνάρτηση πιθανότητας τέτοια ώστε $P\{X=0\} = P\{X=1\} = P\{X=-1\} = \frac{1}{3}$ και αν $Y = \begin{cases} 0, & \text{αν } X \neq 0 \\ 1, & \text{αν } X = 0 \end{cases}$ τότε $\text{Cov}(X, Y) = 0$ και οι τ.ρ. X, Y

δεν είναι ανεξάρτητες. Από τον ορισμό της Y προκύπτει ότι $XY = 0$. Άρα $E[XY] = 0$. Επίσης $E[X] = \frac{1}{3}(0 + 1 - 1) = 0$.

Συνεπώς, $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$. Επιπλέον, παρατηρούμε ⁻²⁴⁻

ότι $P\{X=0, Y=0\} = 0$ και $P\{X=0\}P\{Y=0\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, δηλαδή $P\{X=0, Y=0\} \neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$. Άρα, οι τ.μ. X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Πρόταση 1.33 $\text{var}(X+Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$

Απόδειξη: $\text{var}(X+Y) = E[X+Y - E(X+Y)]^2$
 $= E[(X - E[X]) + (Y - E[Y])]^2$
 $= E[X - E[X]]^2 + E[Y - E[Y]]^2 + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$
 $= \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) \quad \square$

Η προηγούμενη πρόταση μπορεί να γενικευτεί για n τ.μ.

$X_1, \dots, X_n$ ως εξής:

$$\text{var}(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία οι τ.μ. $X_1, \dots, X_n$ είναι ανά δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους, τότε:

$$\text{var}(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{var}(X_i)$$

Παράδειγμα 1.34 Υπολογίστε τη διασπορά του αριθμού των ανδρών που διαλέχουν τα δικά τους καπέλα στο Παράδειγμα 1.29.

Λύση είναι $\Delta \text{var}(X_1 + \dots + X_N) = \sum_{i=1}^N \text{var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \text{Cov}(X_i, X_j)$

Όπως $\text{var}(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = P\{X_i=1\} \cdot 1^2 - (E[X_i])^2$

$$= \frac{1}{N} - \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{N-1}{N^2}, \text{ για } i=1, \dots, N$$

Επίσης, για $i, j, i < j$, έχουμε:

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E[X_i]E[X_j].$$

Παρατηρούμε ότι: $X_i X_j = \begin{cases} 1, & \text{αν αμφότεροι οι άνδρες } i \text{ και } j \\ & \text{διαλέχουν τα υπέλα τους} \\ 0, & \text{σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E[X_i X_j] &= P\{X_i=1, X_j=1\} = P\{X_i=1\}P\{X_j=1|X_i=1\} \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{N-1}. \text{ Συνεπώς, } \text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{N(N-1)} - \left(\frac{1}{N}\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N^2(N-1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \\ \text{var}(X_1 + \dots + X_N) &= N \frac{N-1}{N^2} + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{N^2(N-1)} \\ &= \frac{N-1}{N} + 2 \frac{1}{N^2(N-1)} \sum_{i=1}^N (N-i) = \frac{N-1}{N} + \frac{2}{N^2(N-1)} \left(N^2 - \frac{N(N+1)}{2} \right) \\ &= \frac{N-1}{N} + \frac{2}{N^2(N-1)} \left(\frac{2N^2 - N^2 - N}{2} \right) = \frac{N-1}{N} + \left(\frac{N^2 - N}{N^2(N-1)} \right) \\ &= \frac{N(N-1)}{N^2(N-1)} + \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N} + \frac{N-1}{N} = 1 \quad \square \end{aligned}$$

Πρόταση 1.35 Αν X, Y δύο τ.ρ. και $a, b \in \mathbb{R}$ τότε:

$$\text{Cov}(aX + bY, Z) = a \text{Cov}(X, Z) + b \text{Cov}(Y, Z).$$

Απόδειξη Είναι:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(aX + bY, Z) &= E[(aX + bY)Z] - E[aX + bY]E[Z] \\ &= a[E(XZ) - E[X]E[Z]] + b[E(YZ) - E[Y]E[Z]] \\ &= a \text{Cov}(X, Z) + b \text{Cov}(Y, Z). \quad \square \end{aligned}$$

Ορισμός 1.36 Ο συντελεστής συσχέτισης δύο τ.ρ. X, Y

τέτοιων ώστε: $\text{var}(X)\text{var}(Y) > 0$, ορίζεται ως εξής:

-26-

$$\rho(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}}$$

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.37 Ισχύει ότι $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$

Απόδειξη: Έστω σ_X^2, σ_Y^2 οι διασπορές $\text{var}(X), \text{var}(Y)$ των τ.ρ. X, Y αντίστοιχα. Τότε:

$$0 \leq \text{var}\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = \frac{\text{var}(X)}{\sigma_X^2} + \frac{\text{var}(Y)}{\sigma_Y^2} + \frac{2\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 + 1 + 2\rho(X, Y) \Rightarrow \rho(X, Y) \geq -1$$

Επίσης

$$0 \leq \text{var}\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = \frac{\text{var}(X)}{\sigma_X^2} + \frac{\text{var}(Y)}{\sigma_Y^2} - \frac{2\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 + 1 - 2\rho(X, Y) \Rightarrow \rho(X, Y) \leq 1.$$

Άρα $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$. $\square$

Ο συντελεστής συσχέτισης δύο τ.ρ. X και Y είναι ένα μέτρο του βαθμού της γραμμικής εξάρτησης των τ.ρ. X και Y . Μία τιμή της $\rho(X, Y)$ κοντά στο $+1$ ή στο -1 είναι ένδειξη υψηλού βαθμού γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των X και Y , ενώ μία τιμή κοντά στο μηδέν, είναι ένδειξη ότι δεν υπάρχει γραμμική εξάρτηση. Μία θετική τιμή του $\rho(X, Y)$ είναι ένδειξη ότι η Y αυξάνει καθώς η X αυξάνει. Μία αρνητική τιμή του $\rho(X, Y)$ είναι ένδειξη ότι η Y μειώνεται καθώς η X αυξάνει. Αν $\rho(X, Y) = 0$, τότε οι τ.ρ. X και Y καλούνται ασυσχέτιστες.

§1.7 Δεσφωμένες Κατανομές

Έστω X, Y διακριτές τ.ρ. Για κάθε δυνατή τιμή y της Y ,

τέτοια ώστε $p_Y(y) = P\{Y=y\} \neq 0$, η δεσφευμένη συνάρτηση -27- πιθανότητας της X , δοθέντος ότι $Y=y$, ορίζεται ως εξής:

$$p_{X|Y}(x|y) := P\{X=x|Y=y\} = \frac{P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}} = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)},$$

όπου $p(x,y)$ είναι η συνάρτηση πιθανότητας της δ.τ.ρ. (X,Y) .

Αν οι τ.ρ. X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε η δεσφευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δοθέντος ότι $Y=y$, συμπίπτει με τη μη δεσφευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X , διότι:

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}} \stackrel{X, Y \text{ ανεξάρτητες}}{=} \frac{P\{X=x\}P\{Y=y\}}{P\{Y=y\}}$$

$$= p_X(x).$$

Αν η δ.τ.ρ. (X,Y) είναι συνεχής με πυκνότητα $f(x,y)$ τότε για κάθε y τέτοιο ώστε $f_Y(y) \neq 0$ η δεσφευμένη πυκνότητα της X δοθέντος ότι $Y=y$ ορίζεται ως εξής:

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Αν οι τ.ρ. X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε η δεσφευμένη πυκνότητα της X δοθέντος ότι $Y=y$ συμπίπτει με τη μη δεσφευμένη πυκνότητα της X , διότι:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \stackrel{X, Y \text{ ανεξάρτητες}}{=} \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

Παράδειγμα 1.38 Έστω ότι η συνάρτηση πιθανότητας της δ.τ.ρ. (X,Y) δίνεται από τις σχέσεις: $p(0,0)=0.4, p(0,1)=0.2, p(1,0)=0.1, p(1,1)=0.3$. Υπολογίστε τη δεσφευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X , δοθέντος ότι $Y=1$.

Λύση Είναι $p_Y(1) = P\{Y=1\} = \sum_{x=0}^1 p(x,1) = 0.5$

Άρα, $p_{X|Y}(0|1) = \frac{p(0,1)}{p_Y(1)} = \frac{2}{5}$ και $p_{X|Y}(1|1) = \frac{p(1,1)}{p_Y(1)} = \frac{3}{5}$. ☒

Παράδειγμα 1.39 Έστω τ.μ. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ και $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$, και έστω ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες. Αν $Z := X+Y$, δείξτε ότι $X|Z = X+Y = z \sim \text{Binomial}(z, p := \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$, $z=0,1,2,\dots$ δηλαδή,

$$p_{X|Z}(x|z) = \binom{z}{x} p^x (1-p)^{z-x}, \quad x=0,1,\dots,z.$$

Απάντηση Από το Παράδειγμα 1.25, έχουμε ότι:

$$Z := X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda+\mu).$$

Τότε:

$$\begin{aligned} p_{X|Z}(x|z) &= \frac{P\{X=x, Z=z\}}{P\{Z=z\}} = \frac{P\{X=x, X+Y=z\}}{P\{Z=z\}} = \\ &= \frac{P\{X=x, Y=z-x\}}{P\{Z=z\}} \underbrace{X, Y \text{ ανεξάρτητες}}_{\substack{P\{X=x\}P\{Y=z-x\}}} = \frac{P\{X=x\}P\{Y=z-x\}}{P\{Z=z\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\mu} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}} = \binom{z}{x} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x} = \\ &= \binom{z}{x} p^x (1-p)^{z-x} \quad \square \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.40 Η πυκνότητα της δ.τ.μ. (X,Y) δίνεται από τον τύπο: $f(x,y) = \frac{12}{5} x(2-x-y) I(0 < x < 1) I(0 < y < 1)$.

Βρείτε τη θεωρημένη πυκνότητα της X δοθέντος ότι $Y=y$, όπου $0 < y < 1$.

Λύση Για $0 < x < 1, 0 < y < 1$, έχουμε:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx} = \frac{x(2-x-y)}{\int_0^1 x(2-x-y) dx} = \frac{x(2-x-y)}{\frac{2}{3} - \frac{y}{2}} =$$

$$= \frac{6x(2-x-y)}{4-3y} \quad \boxtimes$$

Αν X, Y διακριτές τ.μ., για κάθε δυνατή τιμή y της Y τέτοια ώστε $P_Y(y) = P\{Y=y\} \neq 0$, η θεωρούμενη μέση τιμή της X δοθέντος ότι $Y=y$, ορίζεται ως εξής:

$$E[X|Y=y] = \sum_{x \in S_X} x P(X=x|Y=y) = \sum_{x \in S_X} x P_{X|Y}(x/y), \text{ όπου}$$

S_X είναι το σύνολο των δυνατών τιμών της X .

Αν η δ.τ.μ. (X, Y) είναι συνεχής με πυκνότητα $f(x, y)$ τότε για κάθε y τέτοιο ώστε $f_Y(y) \neq 0$, η θεωρούμενη μέση τιμή της X δοθέντος ότι $Y=y$, ορίζεται ως εξής:

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x/y) dx$$

Παράδειγμα 1.41 Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα της δ.τ.μ. (X, Y) , δίνεται από τον τύπο: $f(x, y) = \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y} I(x > 0) I(y > 0)$

Υπολογίστε την ποσότητα $E[X|Y=y]$, όπου $y > 0$.

Λύση βρίσκουμε τη θεωρούμενη πυκνότητα της X δοθέντος ότι

$Y=y$, όπου $y > 0$,

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x/y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx} = \frac{(\frac{1}{y}) e^{-x/y} e^{-y}}{\int_0^{\infty} (\frac{1}{y}) e^{-x/y} e^{-y} dx} \\ &= \frac{(\frac{1}{y}) e^{-x/y}}{\int_0^{\infty} (\frac{1}{y}) e^{-x/y} dx} = \frac{(\frac{1}{y}) e^{-x/y}}{[-e^{-x/y}]_0^{\infty}} = \frac{1}{y} e^{-x/y}, x > 0 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι: $X|Y=y \sim \text{Exponential}(\frac{1}{y})$

Άρα $E[X|Y=y] = \int_0^{\infty} \frac{x}{y} e^{-x/y} dx = y.$

Για την εύρεση της δεσφειμένης μέσης τιμής μίας συνάρτησης $g(X)$ της τ.ρ. X δοθέντος ότι $Y=y$ ισχύουν οι εξής τύποι:

$$E[g(X)|Y=y] = \begin{cases} \sum_x g(x) P_{X|Y}(x/y), & \text{στη διακριτή περίπτωση} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x/y) dx, & \text{στη συνεχή περίπτωση} \end{cases}$$

Συμβολίζουμε με $E[X|Y]$ τη συνάρτηση της τ.ρ. Y της οποίας η τιμή όταν $Y=y$ είναι $E[X|Y=y]$. Η ποσότητα $E[X|Y]$ είναι επίσης μία τ.ρ. Η παραπάνω πρόταση είναι σημαντικότητα και έχει πολλές εφαρμογές.

Πρόταση 1.42 Ισχύει ότι $E[X] = E[E[X|Y]]$.

Απόδειξη (για την περίπτωση κατά την οποία και οι δύο τ.ρ. X και Y είναι διακριτές).

$$\begin{aligned} \text{Είναι } E[E[X|Y]] &= \sum_y E[X|Y=y] P\{Y=y\} \\ &= \sum_y \left[\sum_x x P\{X=x|Y=y\} \right] P\{Y=y\} = \sum_y \sum_x x \frac{P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}} P\{Y=y\} \\ &= \sum_x \sum_y x P\{X=x, Y=y\} = \sum_x x \sum_y P\{X=x, Y=y\} = \sum_x x P\{X=x\} \\ &= E[X]. \quad \square \end{aligned}$$

Η παραπάνω πρόταση ισχύει και όταν μία από τις τ.ρ. X, Y είναι διακριτή και η άλλη είναι συνεχής.

Παράδειγμα 1.43 Αν A είναι ένα ενδεχόμενο και Y μία τ.ρ., τότε:

$$P(A) = \begin{cases} \sum_y P(A|Y=y) P(Y=y), & \text{αν η τ.ρ. } Y \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} P(A|Y=y) f_Y(y) dy, & \text{αν η τ.ρ. } Y \text{ είναι συνεχής} \end{cases}$$

Απόδειξη - Έστω $X := \begin{cases} 1, & \text{αν το } A \text{ συμβαίνει} \\ 0, & \text{αν το } A \text{ δεν συμβαίνει,} \end{cases}$

Είναι $P(A) = E[X]$ και $P(A|Y=y) = E[X|Y=y]$. Εφαρμόζοντας

την προηγούμενη πρόταση έχουμε:

$$P(A) = E[X] = E[E[X|Y]] = \begin{cases} \sum_y E[X|Y=y] P(Y=y), & \text{αν } Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y] f_Y(y) dy, & \text{αν } Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \sum_y P(A|Y=y) P(Y=y), & \text{αν η } Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} P(A|Y=y) f_Y(y) dy, & \text{αν η } Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Παράδειγμα 1.44 Έστω $X_1, \dots, X_N$ τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p και $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, ανεξάρτητα των τ.μ. $X_1, \dots, X_N$. Υπολογίστε τη μέση τιμή $E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$.

Λύση - Είναι $E\left[\sum_{i=1}^N X_i \mid N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i \mid N=n\right] \frac{N \text{ ανεξάρτητα των } X_i, i=1, \dots, n}{}$

$$= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = np. \text{ Άρα } E\left(\sum_{i=1}^N X_i \mid N\right) = npN$$

Συνεπώς

$$E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^N X_i \mid N\right)\right] = E(npN) = np E[N] = np\lambda,$$

δίδει $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$. $\square$

Παράδειγμα 1.45 Έστω ότι ο αριθμός των ταξιδιωτών που φθάνουν σ' ένα σιδηροδρομικό σταθμό μέχρι τη χρονική στιγμή t , ακολουθεί την κατανομή $\text{Poisson}(\lambda t)$. Αν η χρονική στιγμή άφιξης του τρένου στο σταθμό ακολουθεί την Ομοιόμορφη κατανομή επί του διαστήματος $(0, T)$ και είναι ανεξάρτητα των αφίξεων των ταξιδιωτών στο σταθμό, ποιά είναι η μέση τιμή του αριθμού των ταξιδιωτών που επιβιβάζονται στο τρένο;

Λύση Έστω $N(t) := \# \text{αφίξεις ταξιδιωτών στο σταθμό μέχρι τη χρονική στιγμή } t, t \geq 0$

και $Y := \text{χρονική στιγμή άφιξης του τρένου στο σταθμό}$. Ισχύει ότι $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ και $Y \sim \text{Ομοιόμορφη}(0, T)$. Η ζητούμενη ποσότητα είναι η $E[N(Y)]$. Έχουμε: $E[N(Y) | Y=t] = E[N(t) | Y=t]$

$N(t), Y$ ανεξάρτητες τ.κ. $E[N(t)] = \lambda t$, διότι $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

Άρα: $E[N(Y) | Y] = \lambda Y$. Συνεπώς:

$$E[N(Y)] = E[E[N(Y) | Y]] = E[\lambda Y] = \lambda E[Y] = \frac{\lambda T}{2},$$

διότι $Y \sim \text{Ομοιόμορφη}(0, T)$. $\square$

Παράδειγμα 1.46 Αν $N \sim \text{Binomial}(n, X)$, όπου η πιθανότητα επιτυχίας X είναι τ.κ. που ακολουθεί την Ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$, δείξτε ότι: $P\{N=k\} = \frac{1}{n+1}, 0 \leq k \leq n$.

Λύση Για $0 \leq k \leq n$ έχουμε:

$$\begin{aligned} P\{N=k\} &= \int_0^1 P\{N=k | X=x\} f_X(x) dx \stackrel{f_X(x)=1}{=} \int_0^1 P\{N=k | X=x\} dx \\ &= \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} dx = \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx \\ &= \binom{n}{k} B(k+1, n-k+1) = \binom{n}{k} \frac{\Gamma(k+1) \Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)} \\ &= \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{k! (n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \quad \square \end{aligned}$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΕΙΣ: Η συνάρτηση Gamma ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx, a > 0. \text{ Ισχύει ότι } \Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

και $\Gamma(a+1) = a \Gamma(a), a > 0$. Η συνάρτηση Beta ορίζεται ως

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, a, b > 0. \text{ Ισχύει ότι: } B(a, b) := \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, a, b > 0$$

§1.0. Όρια ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών

Θεωρούμε μία ακολουθία $X_n, n=1,2,\dots$ τυχαίων μεταβλητών ορισμένων στον ίδιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ορισμός 1.47 Λέμε ότι έχουμε μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.ρ. $X_n, n=1,2,\dots$, αν για κάθε $n=2,3,\dots$ οι τ.ρ. $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}$ είναι ανεξάρτητες, όπου οι δείκτες $i_1, \dots, i_n \in \{1,2,\dots\}$ και είναι διάφοροι μεταξύ τους.

Ορισμός 1.48 Λέμε ότι έχουμε μία ακολουθία ισόνομων τ.ρ. $X_n, n=1,2,\dots$, αν όλες οι τ.ρ. $X_n, n=1,2,\dots$ ακολουθούν την ίδια κατανομή.

Στη συνέχεια, παραθέτουμε δύο έννοιες "συναρμείωσης" μιας ακολουθίας τ.ρ. όχι απαραίτητα ανεξάρτητων.

Ορισμός 1.49 Λέμε ότι η ακολουθία τ.ρ. $X_n, n=1,2,\dots$ συγχί-
νει σχεδόν παντού ή σχεδόν βεβαίως στην τ.ρ. X , αν

$$P\left\{\omega \in \Omega: X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)\right\} = 1. \text{ Συμβολισμός } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\sigma. \pi.} X$$

ή $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\sigma. \beta.} X$

Ορισμός 1.50 Λέμε ότι η ακολουθία τ.ρ. $X_n, n=1,2,\dots$ συγχί-
νει κατά κατανομή στη τ.ρ. X αν $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$, για
κάθε σημείο x συνεχείας της $F_X(x)$. Συμβολισμός:

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X.$$

$$\text{Αποδεικνύεται ότι αν } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\sigma. \beta.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$$

Στη συνέχεια, παραθέτουμε δύο σημαντικότερα θεωρήματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Θεώρημα 1.51 (I.N.M.A.: Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών) ⁻³⁴⁻

Έστω ακολουθία $X_n, n=1, 2, \dots$ ανεξάρτητων και ισόνομων τ.ρ. με $E[|X_1|] < \infty$ και έστω $\mu := E[X_1]$. Τότε:

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\sigma.β.} \mu, \text{ όπου } \bar{X}_n = \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right)$$

Θεώρημα 1.52 (Κ.Ο.Θ.: Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)

Έστω ακολουθία $X_n, n=1, 2, \dots$, ανεξάρτητων και ισόνομων τ.ρ. με $\sigma^2 := \text{var}(X_1) < \infty$ και έστω $\mu := E[X_1]$. Τότε:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0,1), \text{ δηλαδή}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq x\right) = \Phi(x), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ όπου}$$

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \text{ και } \Phi(x) \text{ είναι η συνάρτηση κατανομής της } N(0,1).$$

Παράδειγμα 1.53 Έστω μία ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών ενός πειράματος. Έστω A ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο του πειράματος. Έστω $P(A)$ η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A σε μία οποιαδήποτε δοκιμή. Ορίζουμε:

$$X_i := \begin{cases} 1, & \text{αν το ενδεχόμενο } A \text{ συμβεί κατά την } i\text{-οστή δοκιμή} \\ 0, & \text{αν το ενδεχόμενο } A \text{ δεν συμβεί κατά την } i\text{-οστή δοκιμή} \end{cases}$$

Από τον I.N.M.A έχουμε: $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\sigma.β.} \mu = E[X_1] = P(A)$.
Η τελευταία σχέση μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής:

Αφού $X_1 + \dots + X_n$ είναι ο αριθμός των φορών κατά τις οποίες

συμβαίνει το ενδεχόμενο A στις n πρώτες δοκιμές του πειράματος, η πιθανότητα $P(A)$ είναι το οριακό ποσοστό των φορές κατά τις οποίες συμβαίνει το ενδεχόμενο A . $\boxtimes$

Παράδειγμα 1.54 Δείξτε ότι: $e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$.

Λύση Έστω $X_n, n=1, 2, \dots$ μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.ρ. που ακολουθούν την Poisson (1). Τότε η $\bar{X}_n \sim \text{Poisson}(n)$

(Συνεπώς, $e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = P(n \bar{X}_n \leq n) = P(\bar{X}_n \leq 1)$)

$$= P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - E[X_1])}{\sqrt{\text{var}(X_1)}} \leq \frac{\sqrt{n}(1-1)}{\sqrt{1}} = 0 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(0) = \frac{1}{2},$$

από το Κ.Ο.Θ. $\boxtimes$

Παράδειγμα 1.55 Ένας αστρονόμος θέλει να μετρήσει σε έτη φωτός την απόσταση του Αστεροσμοπείου από έναν μακρινό αστέρα. Οι μετρήσεις που κάνει ο αστρονόμος είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, είναι ισόνομες με κοινή μέση τιμή d όπως d είναι η πραγματική απόσταση Αστεροσμοπείου-Αστέρα και διασπορά ίση με 4 έτη φωτός. Πόσες μετρήσεις πρέπει να κάνει ο αστρονόμος για να είναι 95% σίγουρος ότι η εκτιμώμενη απόσταση θα απέχει το πολύ 0.5 έτη φωτός της πραγματικής;

Λύση Έστω n ο ζητούμενος αριθμός των μετρήσεων. Απαιτούμε να ισχύει: $P(|\bar{X}_n - d| \leq 0.5) = 0.95$, όπου $\bar{X}_n$ είναι η δειγματική μέση τιμή των μετρήσεων. Όπως,

$$P(-0.5 \leq \bar{X}_n - d \leq 0.5) = 0.95 \Rightarrow P\left(-\frac{0.5\sqrt{n}}{2} \leq \frac{(\bar{X}_n - d)\sqrt{n}}{2} \leq \frac{0.5\sqrt{n}}{2}\right)$$
$$= 0.95 \xrightarrow{\text{ΚΟΘ}} \Phi\left(\frac{0.5\sqrt{n}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{0.5\sqrt{n}}{2}\right) = 0.95 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{0.5\sqrt{n}}{2}\right) - 1 = 0.95, \text{ διότι } \Phi(x) + \Phi(-x) = 1 \forall x$$

Συνεπώς, $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.975 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{4} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$, από πίνακες της $N(0,1)$

$$\Rightarrow n = 61.47. \text{ Άρα, θα χρειαστούν } 62 \text{ μετρήσεις. } \boxtimes$$