

ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ

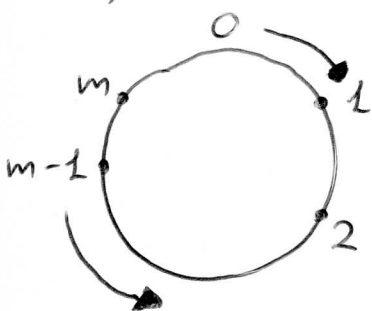
§ 2.1 Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις

Ορισμός 2.1 Στοχαστική ανέλιξη (ή στοχαστική διαδικασία) είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X(t)$, $t \in T$.

Θα περιοριστούμε στην περίπτωση που το σύνολο των τιμών I των τυχαίων μεταβλητών $X(t)$, $t \in T$ είναι ένα πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Το σύνολο I θα το ονομάζουμε σύνολο (ή χώρο) καταστάσεων της στοχαστικής ανελίξης. Η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ ερμηνεύεται ως n κατάσταση της ανελίξης κατά τη χρονική στιγμή t .

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα παράδειγμα στοχαστικής ανελίξης.

Παράδειγμα 2.1 Θεωρούμε ένα ρόριο το οποίο κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου με $m+1$ διακεκριμένα σημεία $0, 1, 2, \dots, m-1, m$



Σε κάθε θέση της κίνησής του το ρόριο έχει την ίδια πιθανότητα να κινηθεί είτε με τη φορά των δεικτών του ρολογιού είτε με την αντίθετη φορά.

Ορίζουμε: $X_n :=$ Θέση του ρορίου μετά το n -οστό βήμα

Η $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη. Η κίνηση του ρορίου διέπεται από την παρακάτω σχέση:

$$P\{X_{n+1} = j+1 | X_n = j\} = P\{X_{n+1} = j-1 | X_n = j\} = \frac{1}{2},$$

όπου $j+1=0$ αν $j=m$ και $j-1=m$ αν $j=0$. Το σύνολο τιμών $I = \{0, 1, \dots, m\}$ της στοχαστικής ανελίξης είναι πεπερασμένο.



Το σύνολο δεικτών T , ανάλογα με τη μορφή του, ταξινομεί την ανέλιξη σε δύο κατηγορίες:

(α) Αν το σύνολο T είναι της μορφής $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ή $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο.

(β) Αν το σύνολο T είναι της μορφής $T = [0, \infty)$ ή $T = \mathbb{R}$ τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο.

Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n, n \geq 1\}$ του Παραδείγματος 2.1 είναι μία στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο και το σύνολο δεικτών της $T = \{n, n \geq 1\}$ είναι άπειρο. Θεωρώντας ότι το πόριο μπορεί να περάσει άπειρες φορές από τα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία της περιφέρειας του κύκλου $0, 1, \dots, n$.

§ 2.2 Μαρκοβιανές Αλυσίδες σε διακριτό χρόνο

Στη συνέχεια παρατίθεται ο ορισμός μιας ειδικής στοχαστικής ανέλιξης η οποία έχει πολλές ρεαλιστικές εφαρμογές.

Ορισμός 2.2 Η στοχαστική ανέλιξη $X_n, n = 0, 1, \dots$ με χώρο καταστάσεων I καλείται Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο (discrete-time Markov chain) αν, για κάθε $n = 0, 1, \dots$ ισχύει:

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$$

για όλες τις δυνατές τιμές $i_0, \dots, i_{n+1} \in I$.

Στον παραπάνω ορισμό το σύνολο T των χρονικών στιγμών της στοχαστικής ανέλιξης έχει απλώς το $\{0, 1, \dots\}$.

Θα ασχοληθούμε με Μαρκοβιανές αλυσίδες σε διακριτό

χρόνο με χρονιά ορογενείς πιθανότητες μετάβασης. Αυτό

σηραίνει ότι: $P(X_{n+1}=j | X_n=i) = p_{ij}, i, j \in I$

για οποιαδήποτε τιμή της χρονικής στιγμής n . Οι πιθανότητες p_{ij} ιαλούνται πιθανότητες μετάβασης πρώτης τάξης και ιανο-

ποιούν τις εξής σχέσεις: $p_{ij} \geq 0, i, j \in I$ και $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1, i \in I$.

Η Μαρκοβιανή αλυσίδα $X_n, n=0, 1, \dots$ προσδιορίζεται πλήρως από τη συνάρτηση πιθανότητας της αρχικής κατάστασης X_0 και των πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης p_{ij} .

Οι πιθανότητες μετάβασης πρώτης τάξης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογιστεί η πιθανότητα να μεταβεί η ανάλιξη από την κατάσταση i στην κατάσταση j μετά από n βήματα. Οι πιθανότητες μετάβασης n -τάξης ορίζονται ως εξής:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n=j | X_0=i), i, j \in I, \text{ για } n=1, 2, \dots$$

Προφανώς, ισχύει ότι $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$. Ορίζουμε:

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, \text{ αν } j=i \\ 0, \text{ αν } j \neq i \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε:

$$p_{ij}^{(n+1)} = P(X_{n+1}=j | X_0=i)$$

$$= \sum_{k \in I} P(X_{n+1}=j | X_n=k, X_0=i) P(X_n=k | X_0=i)$$

Μαρκοβιανή
αλυσίδα $\sum_{k \in I} P(X_{n+1}=j | X_n=k) P(X_n=k | X_0=i)$

$$= \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}, i, j \in I, n=0, 1, \dots$$

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία $I = \{0, 1, \dots, N\}$
 από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι: $P^{(n)} = P^n$, $n = 0, 1, \dots$,
 όπου,

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \dots & p_{0N}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N0}^{(n)} & p_{N1}^{(n)} & \dots & p_{NN}^{(n)} \end{pmatrix}, n = 0, 1, \dots$$

και $P^{(1)} = P$. Ο πίνακας P καλείται πίνακας μεταβάσεων της
 Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Ένα σημαντικό πρόβλημα είναι η εύρεση της ασυμπτωτικής
 συμπεριφοράς της πιθανότητας μετάβασης n -τάξης καθώς
 $n \rightarrow \infty$. Η μακροπρόθεσμη συμπεριφορά μιας Μαρκοβιανής
 αλυσίδας θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Παράδειγμα 2.2 (Ένα μοντέλο για έλεγχο αποθεμάτων)

Υποθέτουμε ότι ένα κατάστημα διαθέτει προς πώληση ένα
 προϊόν. Οι απαιτήσεις για το προϊόν κατά τις διαδοχικές
 εβδομάδες $n = 0, 1, \dots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες
 μεταβλητές. Η πιθανότητα να ζητηθούν j τεμάχια του
 προϊόντος κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας είναι ίση με
 ϕ_j , $j = 0, 1, \dots$. Η μέση τιμή της εβδομαδιαίας ζήτησης είναι
 πεπερασμένη. Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε ζήτηση που
 υπερβαίνει το τρέχον απόθεμα του προϊόντος χάνεται.
 Ο αριθμός των τεμαχίων του προϊόντος εξετάζεται μόνο
 κατά την αρχή κάθε εβδομάδας και σε κάθε εξέταση υπάρ-
 χει η δυνατότητα να παραγγελθούν τεμάχια του προϊόν-
 τος. Υποθέτουμε ότι τα τεμάχια που παραγγέλλονται παρα-
 δίδονται αναγκαία στο κατάστημα.

Το αποθεματικό επίπεδο ελέγχχεται με ένα κανόνα (s, S) -40-
 όπου $0 < s \leq S$. Σύμφωνα μ' αυτόν του κανόνα, αν σε μία
 εξέταση, ο αριθμός των τεραχίων είναι μικρότερος του s ,
 τότε παραγγέλλονται τόσα τεράχια, ώστε ο συνολικός
 αριθμός των τεραχίων να γίνει S . Αν ο αριθμός των τερα-
 χίων είναι μεγαλύτερος ή ίσος του s , τότε δεν παραγγέ-
 λνεται κανένα τεράχιο του προϊόντος.

Για $n=0, 1, \dots$ ορίζουμε:

$X_n := \#$ τεραχίων του προϊόντος κατά την αρχή
 της n εβδομάδας μόλις πριν την εξέταση.

Η ανέλιξη $X_n, n=0, 1, \dots$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα σε
 διακριτό χρόνο με χώρο καταστάσεων $I = \{0, \dots, S\}$. Η
 Μαρκοβιανή ιδιότητα (δηλαδή η σχέση του ορισμού 2.2)
 είναι άμεση συνέπεια της ανεξαρτησίας των εβδομαδιαίων
 ζήτησεων και της μορφής της πολιτικής παραγγελίας που
 χρησιμοποιείται. Συγκεκριμένα, αν η ζήτηση κατά την
 n -οστή εβδομάδα είναι D_n , έχουμε:

$$X_{n+1} = \begin{cases} \max(X_n - D_n, 0), & \text{αν } X_n \geq s \\ \max(S - D_n, 0), & \text{αν } X_n < s \end{cases}$$

Οι πιθανότητες πρώτης τάξης της Μαρκοβιανής αλυσίδας
 $X_n, n=0, 1, \dots$ βρίσκονται εύκολα. Διακρίνουμε τις περι-
 πτώσεις $i \geq s$ και $i < s$. Για $i \geq s$,

$$P_{ij} = \begin{cases} \mathbb{P}\{ \text{η ζήτηση κατά την τρέχουσα εβδομάδα είναι} \\ \text{ίσον με } i-j \}, & i \geq j \geq i \\ \mathbb{P}\{ \text{η ζήτηση κατά την τρέχουσα εβδομάδα είναι} \\ \text{ίσον ή μεγαλύτερη από } i \}, & j=0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \phi_{i-j}, 1 \leq j \leq i \\ \sum_{k=i}^{\infty} \phi_k, j=0 \end{cases}$$

Παρόμοια, για $0 \leq i \leq S$

έχουμε ότι:

$$p_{ij} = \begin{cases} \phi_{S'-j}, 1 \leq j \leq S' \\ \sum_{k=S'}^{\infty} \phi_k, j=0 \end{cases}$$

Όλες οι άλλες πιθανότητες p_{ij} είναι ίσες με μηδέν. $\square$

Παράδειγμα 2.3 Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο με χώρο καταστάσεων $I = \{0, 1\}$ και πίνακα μεταβάσεων

$$P = \begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 \\ 1-p_1 & p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & p_0 \\ q_1 & p_1 \end{pmatrix}. \text{ Να βρεθεί ο πίνακας } P^{(n)},$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Λύση Ισχύει ότι $P^{(n)} = P^n$. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα P .

Αυτές είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\begin{vmatrix} 1-p_0-\lambda & p_0 \\ 1-p_1 & p_1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (p_1-p_0+1)\lambda + (1-p_0)p_1 - (1-p_1)p_0 = 0$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές του

P είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = p_1 - p_0$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιάνυσματα

βρίσκονται από τις εξισώσεις $P\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}$, $i=1, 2$. Αν $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

έχουμε για $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 \\ 1-p_1 & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (1-p_0)x_1 + p_0x_2 \\ (1-p_1)x_1 + p_1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-p_0)x_1 + p_0x_2 = x_1 \\ (1-p_1)x_1 + p_1x_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -p_0x_1 + p_0x_2 = 0 \\ x_1 - p_1x_1 + p_1x_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -p_0x_1 = -p_0x_2 \\ (1-p_1)x_1 = (1-p_1)x_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Για } \lambda_2 = \rho_1 - \rho_0 \text{ έχουμε: } \begin{pmatrix} (1-\rho_0)x_1 + \rho_0 x_2 \\ (1-\rho_1)x_1 + \rho_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\rho_1 - \rho_0)x_1 \\ (\rho_1 - \rho_0)x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-\rho_0)x_1 + \rho_0 x_2 = (\rho_1 - \rho_0)x_1 \\ (1-\rho_1)x_1 + \rho_1 x_2 = (\rho_1 - \rho_0)x_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(\rho_1 - 1)x_1 = \rho_0 x_2}$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = \rho_1 - \rho_0$ είναι:

$$\begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 - 1 \end{pmatrix}. \text{ Από γνωστό αποτέλεσμα της Γραμμικής Άλγεβρας}$$

$$\text{έχουμε: } S^{-1} P S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho_1 - \rho_0 \end{pmatrix}, \text{ όπου } S = \begin{pmatrix} 1 & \rho_0 \\ 1 & \rho_1 - 1 \end{pmatrix}.$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$P^n = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\rho_1 - \rho_0)^n \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_0 \\ 1 & \rho_1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\rho_1 - \rho_0)^n \end{pmatrix} \frac{1}{1 + \rho_0 - \rho_1} \begin{pmatrix} 1 - \rho_1 & \rho_0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho_0 + \rho_1} \begin{pmatrix} 1 & \rho_0 \\ 1 & \rho_1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\rho_1 - \rho_0)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho_0 + \rho_1} \begin{pmatrix} \rho_1 + \rho_0 (\rho_1 - \rho_0)^n & \rho_0 - \rho_0 (\rho_1 - \rho_0)^n \\ \rho_1 - \rho_1 (\rho_1 - \rho_0)^n & \rho_0 + \rho_1 (\rho_1 - \rho_0)^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho_0 + \rho_1} \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_0 \\ \rho_1 & \rho_0 \end{pmatrix} + \frac{(\rho_1 - \rho_0)^n}{\rho_0 + \rho_1} \begin{pmatrix} \rho_0 & -\rho_0 \\ -\rho_1 & \rho_1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Παράδειγμα 2.4 (Βροχή στο Καρλόβασι)

-43-

Από δεδομένα 27 ετών σχετικά με τη βροχόπτωση στο Καρλόβασι κατά τη διάρκεια των βροχερών μηνών Δεκεμβρίου-Φεβρουαρίου, βρέθηκε ότι η διυατάστατη Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι κατάλληλο μοντέλο για τη διαδοχή βροχερών και ξηρών ημερών κατά τη χειμερινή περίοδο. Τα δεδομένα 2437 ημερών έδωσαν τον παρακάτω πίνακα:

		Επόμενη Μέρα		
Προηγούμενη	Ξηρή	Ξηρή	Βροχερή	Σύνολο
		1049	350	1399
Μέρα	Βροχερή	351	682	1038

από τον οποίο εκτιμούνται οι πιθανότητες μεταβάσεως πρώτης τάξης:

$$P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.34 & 0.66 \end{pmatrix}$$

Με "0" συμβολίζουμε τη "ξηρή μέρα" και με "1" συμβολίζουμε τη "βροχερή μέρα". Αν η 31^η Ιανουαρίου είναι ξηρή μέρα ποια είναι η πιθανότητα να είναι η 5^η Φεβρουαρίου επίσης ξηρή μέρα;

Λύση Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος βρίσκουμε ότι: $p_{00}^{(5)} = 0.58$. $\square$

Παράδειγμα 2.5 (Σύστημα τηλεπικοινωνιών)

Τηλεπικοινωνιακό σύστημα μεταδίδει τα ψηφία 0 και 1. Κάθε υπερπρόσπερο ψηφίο (σήμα) περνά από διάφορα στάδια. Σε κάθε στάδιο υπάρχει πιθανότητα p να παραλείπει το σήμα αμετάβλητο. Έστω X_0 το εισερχόμενο ψηφίο κατά το πρώτο στάδιο και X_n , $n \geq 1$ το ψηφίο που φεύγει κατά το n -οστό στάδιο του επικοινωνιακού συστήματος. Τότε η X_n , $n=0,1,\dots$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μεταβάσεων:

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}, \text{ όπου } q = 1 - p. \text{ Ο πίνακας } P^{(n)} \text{ των πιθανο-}$$

τήτων $P_{ij}^{(n)}$, $i, j = 0, 1$ σύμφωνα με τον τύπο του Παραδείγμα-
τος 2.3 είναι:

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n \end{pmatrix}$$

Για παράδειγμα, αν $p = \frac{3}{4}$, ένα σήμα που μπαίνει στο σύστημα
ως 1 έχει πιθανότητα να μεταδοθεί σωστά ύστερα από δύο
στάδια ίση με $P_{11}^{(2)} = \frac{5}{8}$ και ύστερα από 3 στάδια ίση με
 $P_{11}^{(3)} = \frac{9}{16}$. Μετά από την παρέλευση όρου αρκετού χρόνου, όπως
φαίνεται από τον πίνακα $P^{(n)}$ για μεγάλα n , ένα αρχικό

σήμα βγαίνει από το σύστημα σαν 0 ή 1 με πιθανότητα
 $\frac{1}{2}$ (ανεξάρτητα από την τιμή του p , $p \neq 0, 1$). $\square$

Παράδειγμα 2.6 Έστω $\{X_n, n=0, 1, \dots\}$ μία ακολουθία ανεξάρ-
τητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε:

$$P\{X_n = -1\} = P\{X_n = 1\} = \frac{1}{2}, n = 0, 1, 2, \dots. \text{ Να δείξει ότι}$$

η ακολουθία $\{Y_n, n=0, 1, \dots\}$ που ορίζεται ως:

$$Y_n = \frac{1}{2}(X_n + X_{n+1}), n = 0, 1, \dots \text{ δεν έχει τη Μαρκοβιανή}$$

ιδιότητα.

Λύση Η ακολουθία $\{Y_n, n=0, 1, 2, \dots\}$ δεν έχει τη Μαρκο-
βιανή ιδιότητα (ισότητα Ορισμού 2.2) διότι:

$$P\{Y_{n+1}=1 | Y_n=0\} = \frac{P\{X_{n+1}+X_{n+2}=2, X_n+X_{n+1}=0\}}{P\{X_n+X_{n+1}=0\}} \quad -45-$$

$$= \frac{P\{X_n=-1, X_{n+1}=1, X_{n+2}=1\}}{P\{X_n+X_{n+1}=0\}}$$

$$P\{X_n=-1, X_{n+1}=1\} + P\{X_n=1, X_{n+1}=-1\}$$

$$= \frac{P\{X_n=-1\} P\{X_{n+1}=1\} P\{X_{n+2}=1\}}{P\{X_n=-1\} P\{X_{n+1}=1\} + P\{X_n=1\} P\{X_{n+1}=-1\}}$$

$$P\{X_n=-1\} P\{X_{n+1}=1\} + P\{X_n=1\} P\{X_{n+1}=-1\}$$

$$= \frac{(0.5)^3}{2 \cdot (0.5)^2} = \frac{1}{4}$$

Η πρώτη ισότητα προκύπτει από τον ορισμό της ακολουθίας των τυχαίων μεταβλητών Y_n και η τρίτη ισότητα είναι συνέπεια της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών X_n .

Όμως,

$$P\{Y_{n+1}=1 | Y_n=0, Y_{n-1}=1\}$$

$$= \frac{P\{X_{n+1}+X_{n+2}=2, X_n+X_{n+1}=0, X_{n-1}+X_n=2\}}{P\{X_n+X_{n+1}=0, X_{n-1}+X_n=2\}} = 0.$$

$$P\{X_n+X_{n+1}=0, X_{n-1}+X_n=2\}$$

Άρα, η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $Y_n, n=0,1,\dots$ δεν έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα. $\square$

§2.3 Ταξινόμηση των καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας σε διακριτό χρόνο

Για $n=1,2,\dots$ ορίζουμε:

$$f_{ij}^{(n)} = P\{X_n=j, X_k \neq j \text{ για } 1 \leq k \leq n-1 | X_0=i\}, i,j \in I$$

θεωρώντας $f_{ij}^{(0)} = 0$, για κάθε $i, j \in I$. Η πιθανότητα $f_{ij}^{(n)}$ είναι η πιθανότητα να μεταβεί η αλυσίδα για πρώτη φορά στην κατάσταση j κατά την χρονική στιγμή $t=n$, αν η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση i . Ορίζουμε επίσης τις πιθανότητες f_{ij} ως εξής:
$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}, \quad i, j \in I.$$

Η πιθανότητα f_{ij} είναι η πιθανότητα να μεταβεί η αλυσίδα ούποτε στην κατάσταση j , αν η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση i .

Ορισμοί 2.3 (α) Μία κατάσταση i καλείται έρρνη αν $f_{ii} = 1$. Μία μη-έρρνη κατάσταση καλείται μεταβατική.

(β) Ο μέσος χρόνος επανόδου στην έρρνη κατάσταση είναι:
$$\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

(γ) Μία έρρνη κατάσταση i καλείται θετική αν $\mu_{ii} < \infty$. Αν $\mu_{ii} = \infty$ καλείται μηδενική.

(δ) Μία έρρνη κατάσταση i λέγεται περιοδική με περίοδο d αν η επάνοδος στην κατάσταση i μπορεί να γίνει μόνο σε $d, 2d, 3d, \dots$ βήματα και $d > 1$ είναι ο μεγαλύτερος αέ- ραιος ρ'αυτή την ιδιότητα.

(ε) Μία απεριοδική, θετική έρρνη κατάσταση καλείται ερχοδική.

Ορισμοί 2.4 (α) Ένα μη-κενό σύνολο G καταστάσεων λέγεται κλειστό αν $f_{ij} = 0$ για κάθε $i \in G$ και $j \notin G$.

(β) Ένα μη-κενό σύνολο G καταστάσεων λέγεται ανάκωχο αν είναι κλειστό και δεν περιέχει κανένα γνήσιο υποσύνολο που να είναι κλειστό.

(γ) Η κατάσταση j είναι προσιτή από την κατάσταση i αν $p_{ij}^{(n)} > 0$ για κάποιο $n \geq 0$. Συμβολισμός: $i \rightarrow j$.

(δ) Οι καταστάσεις i και j επικοινωνούν αν $i \rightarrow j$ και $j \rightarrow i$. Συμβολισμός: $i \leftrightarrow j$.

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.1 Έστω G ένα Markov σύνολο καταστάσεων. Το G είναι ανάγωγο όταν και μόνο όταν όλες οι καταστάσεις του G επικοινωνούν ανά δύο μεταξύ τους.

Απόδειξη: Για κάθε $i \in G$ ορίζουμε το σύνολο $S(i)$ ως εξής:

$$S(i) = \{j \mid i \rightarrow j\}. \text{ Το σύνολο } S(i) \text{ είναι μη κενό αφού } i \rightarrow i$$

διότι $p_{ii}^{(0)} = 1$. Αφού το σύνολο G είναι Markov $S(i) \subseteq G$. Υποθέτουμε ότι το G είναι ανάγωγο. Για να δείξουμε ότι όλες οι καταστάσεις του επικοινωνούν ανά δύο μεταξύ τους αρκεί να δείξουμε ότι: $S(i) = G$ για κάθε $i \in G$. Η παραπάνω ισότητα ισχύει αν το σύνολο $S(i)$ είναι Markov. Έστω ότι το σύνολο $S(i)$ δεν είναι Markov. Τότε θα υπήρχε μία κατάσταση $r \in S(i)$ και μία κατάσταση $s \notin S(i)$ τέτοιες ώστε $p_{rs} > 0$. Αφού $r \in S(i)$ έχουμε ότι $p_{ir}^{(n)} > 0$ για κάποιο $n \geq 0$

$$\text{και συνεπώς } p_{is}^{(n+1)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{ks} \geq p_{ir}^{(n)} p_{rs} > 0$$

Η ανισότητα $p_{is}^{(n+1)} > 0$ θρύσεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι $s \notin S(i)$. Έτσι αποδείχτηκε ότι όλες οι καταστάσεις του G επικοινωνούν ανά δύο μεταξύ τους.

Έστω ότι όλες οι καταστάσεις του G επικοινωνούν ανά

δύο μεταξύ τους. Έστω ότι το ζ δεν είναι ανάγωχο. Τότε θα υπήρχε ένα υγιεινό σύνολο $S \subseteq \zeta$ τέτοιο ώστε $S \neq \zeta$. Διαλέγουμε μία κατάσταση $i \in S$ και θεωρούμε το σύνολο $S(i)$ όπως ορίστηκε παραπάνω. Αφού το σύνολο S είναι υγιεινό, έχουμε ότι: $S(i) \subseteq S$. Άρα $S(i) \neq \zeta$. Η τελευταία σχέση έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι όλες οι καταστάσεις του ζ επιμοιωνοῦν ανά δύο μεταξύ τους. Έτσι αποδείχτηκε ότι το ζ είναι ανάγωχο. $\square$

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα σημαντικό θεώρημα, γνωστό ως Διακριτικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.1 Το σύνολο I των καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας σε διακριτό χρόνο μπορεί να εκφραστεί κατά μοναδικό τρόπο ως εξής: $I = M \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots$ όπου M είναι το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων και E_i $i=1,2,\dots$ είναι ανάγωχα ζεύγη ανά δύο μεταξύ τους σύνολα έρρονων καταστάσεων. Επιπλέον όλες οι καταστάσεις ενός συνόλου E_i , $i=1,2,\dots$ είναι ή απεριοδικές ή περιοδικές με την ίδια περίοδο.

Πρόταση 2.2 Αν $i \leftrightarrow j$ τότε αψότερες οι καταστάσεις i και j είναι του ίδιου τύπου. Δηλαδή, είναι αψότερες έρρονες ή μεταβατικές, αψότερες απεριοδικές ή περιοδικές με την ίδια περίοδο.

Παρατήρηση: Η σχέση επιμοιωνίας των καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι μία σχέση ισοδυναμίας,

Διότι $i \leftrightarrow i$ (αναγωγιστική ιδιότητα), αν $i \leftrightarrow j$ τότε $j \leftrightarrow i$ (συμμετρική ιδιότητα) και αν $i \leftrightarrow j$ και $j \leftrightarrow k$ τότε $i \leftrightarrow k$ (μεταβατική ιδιότητα). Από την Πραγματική Ανάλυση γνωρίζουμε ότι: Η σχέση ισοδυναμίας χωρίζει ένα σύνολο σε ζένα ανά δύο μεταξύ τους υποσύνολα που καλούνται κλάσεις ισοδυναμίας. Συνεπώς, ο χώρος καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας μπορεί να χωριστεί σε ζένα ανά δύο μεταξύ τους υποσύνολα καταστάσεων που το καθένα να αποτελεί μία κλάση. Αν ο χώρος καταστάσεων I έχει μία μόνο κλάση επικοινωνίας τότε η Μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται μη-αναχωδίστη (irreducible). $\square$

Έστω $\{X_n | n=0,1,\dots\}$ μία Μαρκοβιανή αλυσίδα και έστω η τυχαία μεταβλητή A_n τέτοια ώστε $A_n=1$ αν $X_n=i$ και $A_n=0$ αν $X_n \neq i$. Το άπειρο άθροισμα $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ αναπαριστά τον αριθμό των μεταβάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας από την κατάσταση i . Αν υπολογίσουμε τον αναμενόμενο αριθμό των μεταβάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας από την κατάσταση i , αν η αρχική κατάσταση είναι η i , θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \mid X_0=i\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[A_n \mid X_0=i] = \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n=i \mid X_0=i\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}. \end{aligned}$$

Η κατάσταση i είναι έρρονη αν η αλυσίδα ξεκινώντας από την i θα επιστρέψει σ' αυτήν σίγουρα, με πιθανότητα 1. Συνεπώς με πιθανότητα 1 ο αριθμός των επισκέψεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας στην κατάσταση i θα είναι άπειρος. Αν η κατάσταση i είναι μεταβατική, κάθε φορά που η αλυσίδα επισκέπτεται την κατάσταση i υπάρχει μία θετική πιθανότητα

ίσου με 1- P_{ii} η-επιστροφής της αλυσίδας στην κατάσταση i . -50-

Άρα, η κατάσταση i είναι έρρον αν και μόνο αν $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$

και η κατάσταση i είναι πετυβατική αν και μόνο αν $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$.

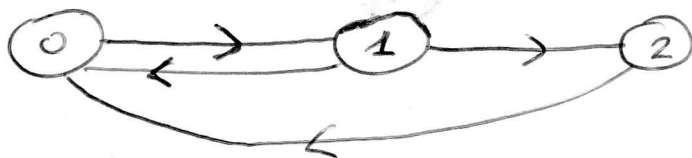
Αν έχουμε μία θετική, έρρον κατάσταση καταστάσεων μία ικανή συνθήκη για να είναι η κατάσταση απεριοδική είναι η εξής: Για μία κατάσταση i της κλάσης θα πρέπει $P_{ii} > 0$. Επιπλέον, μία ικανή και αναγκαία συνθήκη απεριοδικότητας για μία θετική έρρον κατάσταση καταστάσεων είναι η εξής: Υπάρχει μία κατάσταση i της κλάσης και θετικοί αριθμοί m και n με μέγιστο κοινό διαιρέτη τη μονάδα ώστε οι πιθανότητες $P_{ii}^{(n)}$ και $P_{ii}^{(m)}$ να είναι και οι δύο θετικές.

Παράδειγμα 2.7 Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο με χώρο καταστάσεων $I = \{0, 1, 2\}$ και πίνακα μετάβασης πρώτης τάξης P , ο οποίος δίνεται παρακάτω:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Δείξτε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι η-αναγωγισμένη και απεριοδική.

Λύση Για να ταξινομήσουμε τις καταστάσεις της αλυσίδας είναι πολλές φορές χρήσιμο να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα καταστάσεων, όπου συνδέουμε την κατάσταση i με την κατάσταση j μόνο αν $P_{ij} > 0$. Στην συνέχεια, παραθέτουμε το διάγραμμα καταστάσεων που αντιστοιχεί στον πίνακα P .



$$\left. \begin{array}{l} \text{Ισχύει ότι: } 0 \rightarrow 1 (\text{πιθανότητα } 1) \\ 1 \rightarrow 0 (\text{πιθανότητα } 0.5) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \Leftrightarrow 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 (\text{με πιθανότητα } 1 \cdot 0.5 = 0.5). \\ \text{Άρα, } 0 \rightarrow 2 \text{ και } 2 \rightarrow 0 (\text{με πιθανότητα } 1). \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 2$$

Αφού $0 \Leftrightarrow 1$, $0 \Leftrightarrow 2$ έπεται ότι $1 \Leftrightarrow 2$. Τελικά $0 \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow 2$.

Άρα, η αλυσίδα είναι μη-αναγωγίσιμη διότι αποτελείται από ένα μόνο σύνολο καταστάσεων που επικοινωνούν μεταξύ τους.

$$\text{Επιπλέον, } f_{00}^{(1)} = 0, f_{00}^{(2)} = P_{01}P_{10} = 0.5, f_{00}^{(3)} = P_{01}P_{12}P_{20} = 0.5$$

$$f_{00}^{(n)} = 0, n \geq 4. \text{ Συνεπώς, } f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = f_{00}^{(2)} + f_{00}^{(3)} = 0.5 + 0.5 = 1.$$

Η κατάσταση 0 είναι έρρονη και επειδή επικοινωνεί με τις καταστάσεις 1 και 2, έπεται ότι και οι καταστάσεις 1 και 2 είναι έρρονες. Θα δείξουμε ότι η κατάσταση 0 είναι θετική.

$$\text{Πράγματι, } r_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = 2 \frac{1}{2} + 3 \frac{1}{2} = \frac{5}{2} < \infty \text{ και συνε-}$$

πώς η κατάσταση 0 είναι θετική έρρονη. Συμπεραίνουμε

ότι οι καταστάσεις 1 και 2 είναι επίσης θετικές έρρονες,

διότι επικοινωνούν με τη κατάσταση 0. Η Μαρκοβιανή

αλυσίδα είναι απεριοδική διότι για την κατάσταση 0,

$$\text{έχουμε: } P_{00}^{(2)} = 0.5 > 0 \text{ και } P_{00}^{(3)} = 0.5 > 0 \text{ και } \text{ΜΚΟ}\{2,3\} = 1,$$

άρα η κατάσταση 0 είναι απεριοδική. Επειδή οι καταστά-

σεις 1 και 2 επικοινωνούν με την κατάσταση 0, έπεται

ότι και οι καταστάσεις 1 και 2 είναι απεριοδικές. Άρα,

η αλυσίδα είναι απεριοδική. Οι σχέσεις $P_{00}^{(2)} = 0.5, P_{00}^{(3)} = 0.5$

επαληθεύονται με υπολογισμό των πινάκων P^2 και P^3 . $\square$

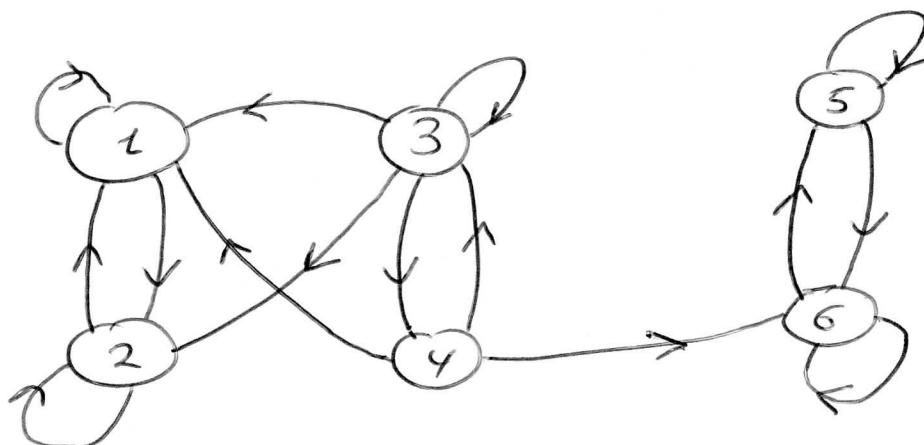
Παράδειγμα 2.8 Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα σε δια-

κριτό χρόνο με έξι καταστάσεις. Ο πίνακας μεταβάσεων

$P = (P_{ij}), i, j = 1, \dots, 6$ της αλυσίδας είναι:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Παραθέτουμε το διάγραμμα καταστάσεων που αντιστοιχεί στον P .



Το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων είναι $M = \{3, 4\}$ και το σύνολο των έρρονων καταστάσεων είναι $E = \{1, 2, 5, 6\}$. Το σύνολο E μπορεί να γραφεί ως ένωση των εξής δύο ξένων αναχώδων συνόλων: $E_1 = \{1, 2\}$ και $E_2 = \{5, 6\}$.

Όλες οι καταστάσεις είναι απεριοδιμές διότι $p_{ii} > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, 6$.

Για την κατάσταση 1, έχουμε:

$$f_{11}^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad f_{11}^{(2)} = p_{12} p_{21} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$f_{11}^{(n)} = p_{12} p_{22}^{(n-2)} p_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-2} \frac{1}{4}, \quad n > 2$$

$$f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = f_{11}^{(1)} + f_{11}^{(2)} + \sum_{n=3}^{\infty} f_{11}^{(n)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{8} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = 1. \text{ Άρα, η κατάσταση 1 είναι έρρον. } 0 \quad -53-$$

ρέσος χρόνος επανόδου στην κατάσταση 1 είναι:

$$P_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{1}{8} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad \underline{y=n-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \frac{4}{3} \sum_{y=1}^{\infty} (y+1) \left(\frac{3}{4}\right)^y = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\sum_{y=1}^{\infty} y \left(\frac{3}{4}\right)^y + \sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^y \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(3 + \sum_{y=1}^{\infty} y \left(\frac{3}{4}\right)^y \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(3 + \frac{3}{4} \frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{15}{6} = 3 < \infty. \text{ Άρα, η κατάσταση 1 είναι θετική, έρρον.}$$

Αφού $1 \leftrightarrow 2$ έπεται ότι και η κατάσταση 2 είναι θετική, έρρον. Για την κατάσταση 5 έχουμε:

$$f_{55}^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad f_{55}^{(2)} = P_{56} P_{65} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f_{55}^{(n)} = P_{56} P_{66}^{(n-2)} P_{65} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}, \quad n > 2$$

Είναι

$$f_{55} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{55}^{(n)} = f_{55}^{(1)} + f_{55}^{(2)} + \sum_{n=3}^{\infty} f_{55}^{(n)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \text{ Άρα, η κατάσταση 5 είναι έρρον. Επειδή ε πιμοινωνεί}$$

με την κατάσταση 6 έπεται ότι και η κατάσταση 6 είναι έρρονη. Οι μέσοι χρόνοι επανόδου των καταστάσεων 2, 5 και 6 υπολογίζονται με παρόμοιο τρόπο όπως για την κατάσταση 1.

Επειδή $p_{55}, p_{66} < \infty$ έπεται ότι και οι καταστάσεις 5 και 6 είναι επίσης θετικές, έρρονες. Για την κατάσταση 3 έχουμε:

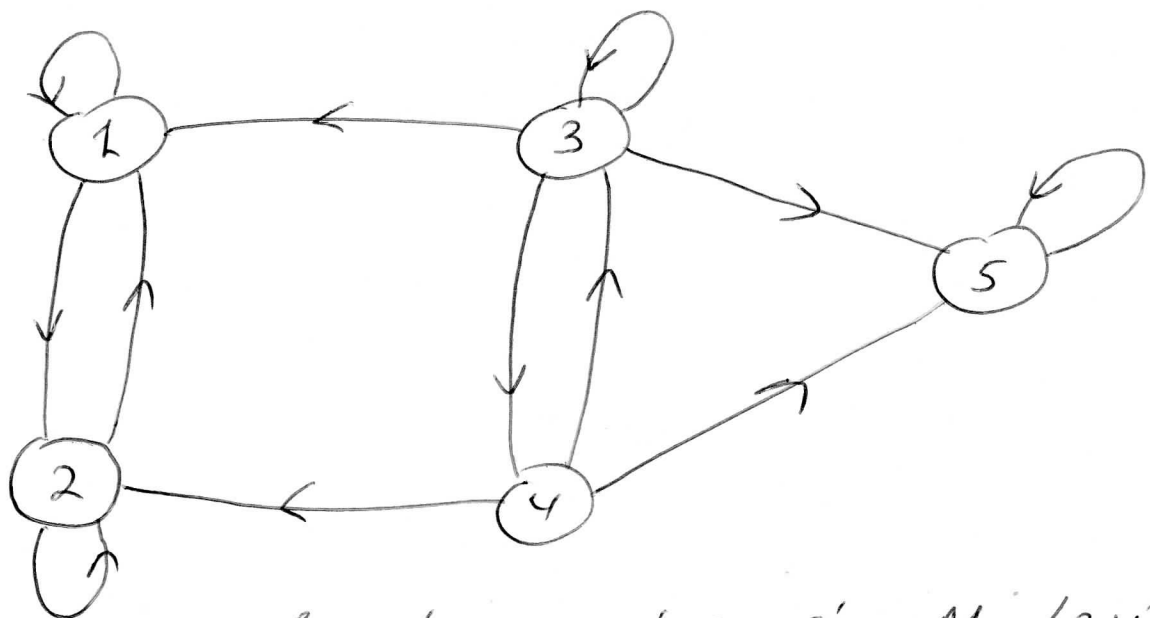
$$f_{33}^{(1)} = \frac{1}{4}, f_{33}^{(2)} = P_{34}P_{43} = \frac{1}{4} \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \text{ και } f_{33}^{(n)} = P_{34}P_{44}^{(n-2)}P_{43} \\ = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}, n > 2. \text{ Συνεπώς, } f_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{33}^{(n)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \neq 1. \text{ Άρα,}$$

η κατάσταση 3 είναι μεταβατική. Επειδή $3 \leftrightarrow 4$ έπεται ότι και η κατάσταση 4 είναι μεταβατική. $\boxtimes$

Παράδειγμα 2.9 Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο με πέντε καταστάσεις. Ο πίνακας μεταβάσεων: $P = (p_{ij})$, $i, j = 1, \dots, 5$ της αλυσίδας είναι:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Το διάγραμμα καταστάσεων που αντιστοιχεί στον πίνακα P είναι:



Το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων είναι $M = \{3, 4\}$ και το σύνολο των έρρονων καταστάσεων είναι $E = \{1, 2, 5\}$.

Το σύνολο E μπορεί να γραφεί ως ένωση των δύο ξένων -55-
 ανάγωγων συνόλων: $E_1 = \{1, 2\}$ και $E_2 = \{5\}$. Η κατάσταση 5
 καλείται κατάσταση απορρόφησης (absorbing state) διότι
 το μονοσύνολο $\{5\}$ είναι κλειστό δηλαδή $P_{55} = 1$ (η αλυσίδα
 εχρησιμεύει ή αλλιώς απορροφάται στη κατάσταση 5.
 Όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας είναι απεριοδικές. $\square$

Παράδειγμα 2.10 Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό
 χρόνο με χώρο καταστάσεων $I = \{1, 2, \dots\}$ και πιθανότητες
 μετάβασης $1^{\text{ης}}$ τάξης τέτοιον ώστε $P_{i,i+1} = 1$ για κάθε
 κατάσταση $i \in I$. Σ' αυτήν την περίπτωση το διάγραμμα
 καταστάσεων έχει τη μορφή:

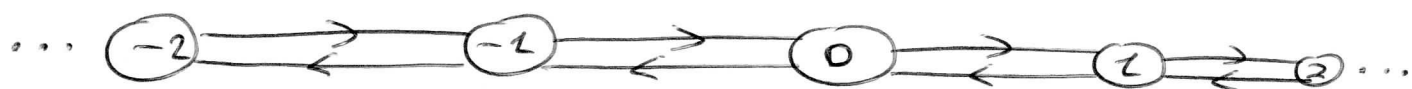


$f_{ii}^{(n)} = 0$, $n \geq 1$ και συνεπώς $f_{ii} = 0$. Συνεπώς η κατά-
 σταση 1 είναι μεταβατική. Παρόμοια, προκύπτει ότι όλες οι
 καταστάσεις είναι μεταβατικές δηλαδή $I = M$, και το σύνολο
 I είναι ένα κλειστό σύνολο καταστάσεων. $\square$

Παράδειγμα 2.11 Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό
 χρόνο με χώρο καταστάσεων $I = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ και πιθα-
 νότητες μετάβασης $1^{\text{ης}}$ τάξης τέτοιον ώστε:

$$P_{i,i+1} = P_{i,i-1} = \frac{1}{2} \text{ για κάθε } i \in I. \text{ Αυτή η Μαρκοβιανή}$$

αλυσίδα αντιστοιχεί στο "συμμετρικό τυχαίο περί-
 πατο". Για αυτήν την αλυσίδα ισχύει ότι $f_{ii} = 1$ για
 κάθε κατάσταση $i \in I$. Επιπλέον, ισχύει ότι $\mu_{ii} = \infty$
 για κάθε $i \in I$. Δηλαδή όλες οι καταστάσεις είναι
 έρρονες, μηδενικές. Το διάγραμμα καταστάσεων έχει



§2.4 Ασυμπλεκτικά αποτελέσματα για μία Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο

Θα περιορίσουμε τη ρεαλιστική σε εκείνες τις Μαρκοβιανές αλυσίδες που πληρούν την ακόλουθη συνθήκη. Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές η συνθήκη ικανοποιείται.

Συνθήκη: Υπάρχει κάποια κατάσταση r τέτοια ώστε $f_{ir} = 1$ για όλες τις καταστάσεις $i \in I$ και $\mu_{rr} < \infty$.

Η παραπάνω συνθήκη συνεπάγεται ότι δεν υπάρχουν δύο ξένα και υλγιστά σύνολα καταστάσεων. Το ακόλουθο αποτέλεσμα σχετίζεται με την ύπαρξη του ορίου των πιθανοτήτων μετάβασης n τάξεως $p_{ij}^{(n)}$ καθώς $n \rightarrow \infty$, για κάθε $i, j \in I$.

Θεώρημα 2.2 Αν η παραπάνω συνθήκη ισχύει και όλες οι καταστάσεις είναι απεριοδικές, τότε υπάρχει μία συνάρτηση πιθανότητας $\pi_j, j \in I$ τέτοια ώστε:

$$p_{ij}^{(n)} \longrightarrow \pi_j \text{ καθώς } n \rightarrow \infty \text{ για κάθε } i, j \in I.$$

Η υπόθεση της απεριοδικότητας είναι ουσιαστική στο παραπάνω Θεώρημα. Αυτό επιβεβαιώνεται εύκολα αν θεωρήσουμε την περιοδική Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $I = \{1, 2\}$ και πιθανότητες μετάβασης 1^{ns} τάξεως: $p_{12} = p_{21} = 1, p_{11} = p_{22} = 0$. Όλες

οι καταστάσεις είναι περιοδικές με περίοδο 2. Για οποιαδήποτε i, j η ακολουθία $p_{ij}^{(n)}$, $n=1, 2, \dots$ εναλλάσσεται μεταξύ των τιμών 0 και 1 και συνεπώς δεν υπάρχει το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε έναν πολύ σημαντικό ορισμό:

Ορισμός 2.5 Μία συνάρτηση πιθανότητας $\pi_j, j \in I$ καλείται στάσιμη κατανομή για την Μαρκοβιανή αλυσίδα $X_n, n=0, 1, \dots$ αν $\pi_j = \sum_{k \in I} \pi_k p_{kj}, j \in I$.

Η χρησιμοποίηση του όρου "στάσιμη" εξηθείται ως εξής: Υποθέτουμε ότι η αρχική κατανομή της αλυσίδας $X_n, n=0, 1, \dots$ επιλέγεται σύμφωνα με την κατανομή

$P(X_0 = j) = \pi_j, j \in I$. Τότε για κάθε $n=1, 2, \dots$ έχουμε: $P(X_n = j) = \pi_j, j \in I$.

Απόδειξη. Με επαγωγή. Για $n=0$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $n-1$. Τότε από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε: $P(X_n = j) = \sum_{k \in I} P(X_{n-1} = k) p_{kj}$.
Επαγωγική υπόθεση $\sum_{k \in I} \pi_k p_{kj} = \pi_j \quad \square$

Συνεπώς αν η αλυσίδα ξεκινήσει σύμφωνα με τη στάσιμη κατανομή τότε θα εξελίσσεται συνέχεια σύμφωνα με το στάσιμο τρόπο.

Πρόταση 2.3 Οι οριακές πιθανότητες $\pi_j, j \in I$ αποτελούν μία στάσιμη κατανομή της αλυσίδας $X_n, n=0, 1, \dots$

Ισχύει ότι: $p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$, $i, j \in I$.

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γνωστές ως εξισώσεις Chapman-Kolmogorov. Αν το σύνολο I είναι πεπερασμένο παίρνουμε το όριο για $n \rightarrow \infty$ και αλλάζοντας στο δεξιό μέλος τη θέση του ορίου και του αθροίσματος έχουμε:

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jk}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k \in I} \pi_k p_{kj}$$

δηλαδή $\pi_j = \sum_{k \in I} \pi_k p_{kj}$ για κάθε $j \in I$. Η εναλλαγή της

σειράς του ορίου και του αθροίσματος είναι επιτρεπτή διότι το σύνολο I είναι πεπερασμένο σύνολο. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και στην περίπτωση κατά την οποία το σύνολο I είναι άπειρο αριθμητικό.

Σημειώσεις:

- (α) Για κάθε $X_0 = i$ το ποσοστό του χρόνου κατά το οποίο η Μαρκοβιανή αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση k είναι ίση με π_k .
- (β) Για κάθε έρπονι κατάσταση i ισχύει $\mu_i < \infty$ λόγω της συνθηκής της σελίδας 56. Επιπλέον $\pi_i > 0$ και $\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$.
- (γ) Αποδεικνύεται επιπλέον ότι οι οριακές πιθανότητες $\pi_j, j \in I$ του θεωρήματος 2.2 είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή της αλυσίδας $X_n, n = 0, 1, \dots$. Ανόρην, αν $x_j, j \in I$ είναι μία λύση του συστήματος των γραμμικών εξισώσεων:

$$x_j = \sum_{k \in I} x_k p_{kj}, j \in I$$

τότε για κάποια σταθερά c , $x_j = c \pi_j$, για κάθε $j \in I$.

(δ) Για να βρούμε τη στάσιμη κατανομή ρίεσ Μαρκοβιανής αλυσίδας λύνουμε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων:

$$\pi_j = \sum_{k \in I} \pi_k P_{kj}, j \in I$$

$$\sum_{j \in I} \pi_j = 1$$

τον οποίου η μοναδική λύση είναι η στάσιμη κατανομή $\pi_j, j \in I$. Το παραπάνω σύστημα σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά και σε άλλες πιο πολύπλοκες περιπτώσεις, στις οποίες το σύνολο I είναι πεπερασμένο, εφαρμόζουμε κάποιο γνωστό επαναληπτικό αλγόριθμο (π.χ. τον αλγόριθμο Gauss-Seidel).

Παράδειγμα 2.12 Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο με χώρο καταστάσεων $I = \{0, 1, 2\}$ και πίνακα μετάβασης πρώτης τάξεως P ο οποίος δίνεται παρακάτω:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τις στάσιμες πιθανότητες της αλυσίδας $\pi_j, j \in I$.
Λύση Από τον πίνακα P φαίνεται εύκολα ότι η αλυσίδα είναι μη-αναχωσίσικη (όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν ανά δύο μεταξύ τους) και η αλυσίδα είναι απεριοδική. Οι καταστάσεις είναι θετικές, έρρονες και η μοναδική λύση του συστήματος:

$$\pi_0 = \frac{1}{3} \pi_0 + \frac{1}{4} \pi_1 + \frac{1}{6} \pi_2$$
$$\pi_1 = \frac{1}{3} \pi_0 + \frac{1}{2} \pi_1 + \frac{1}{3} \pi_2$$

$$\pi_2 = \frac{1}{3} \pi_0 + \frac{1}{4} \pi_1 + \frac{1}{2} \pi_2 \text{ και } \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1. \text{ Η λύση} \quad -60-$$

του συστήματος δίνει τη σταθερή κατανομή της αλυσίδας:

$$\pi_0 = \frac{6}{25}, \pi_1 = \frac{2}{5} \text{ και } \pi_2 = \frac{9}{25}. \quad \square$$

Παράδειγμα 2.13 Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα του Παραδείγματος 2.7. Επειδή η αλυσίδα είναι απεριοδική, μη ανασπαστική και όλες οι καταστάσεις της είναι θετικές έρρονες. Για αυτήν την αλυσίδα υπάρχει μοναδική σταθερή κατανομή. Το σύστημα λερώνει τη μορφή:

$$\pi_0 = \frac{1}{2} \pi_1 + \pi_2$$

$$\pi_1 = \pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{1}{2} \pi_1$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

με μοναδική λύση $\pi_0 = \pi_1 = \frac{2}{5}, \pi_2 = \frac{1}{5}. \quad \square$

Παράδειγμα 2.14 Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα του Παραδείγματος 2.3, με $0 < p_0, p_1 < 1$. Η συνθήκη της σελίδας 56 ικανοποιείται αν διαλέξουμε ως κατάσταση r την κατάσταση 0 ή την κατάσταση 1. Επίσης οι καταστάσεις 0 και 1 είναι απεριοδικές. Από τον τύπο της σελίδας 42, για τον πίνακα P^n προκύπτει ότι οι σταθερές πιθανότητες είναι:

$$\pi_0 = \frac{q_1}{p_0 + q_1} \text{ και } \pi_1 = \frac{p_0}{p_0 + q_1}. \quad \square$$

Παράδειγμα 2.15 Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $I = \{0, 1, \dots, s-1\}$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη της σελίδας 56 με κάποια κατάσταση $r \in I$ και ότι όλες οι καταστάσεις είναι απεριοδικές.

Επιπλέον ο πίνακας $P = (p_{ij}), i, j = 0, \dots, s-1$ μεταβάσεων
1^{ης} τάξης είναι διπλά στοχαστικός δηλαδή: $\sum_{j=0}^{s-1} p_{ij} = 1,$
 $i = 0, 1, \dots, s-1$ και $\sum_{i=0}^{s-1} p_{ij} = 1, j = 0, 1, \dots, s-1$. Δείξτε ότι οι
πιθανότητες μεταβάσεων η τάξης $p_{ij}^{(n)}$ καθώς $n \rightarrow \infty$ τείνουν
στο $\frac{1}{s}$ για κάθε $i, j \in I$.

Λύση: Έστω $p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi_j$ καθώς $n \rightarrow \infty, i, j \in I$. Οι στα-
σιμες πιθανότητες $\pi_j, j \in I$ είναι η μοναδική λύση του
συστήματος των γραμμικών εξισώσεων:

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{s-1} \pi_k p_{kj}, j = 0, 1, \dots, s-1 \quad (*)$$

$$\sum_{j=0}^{s-1} \pi_j = 1 \quad (**)$$

Αφού ισχύει $\sum_{k=0}^{s-1} p_{kj} = 1$ προκύπτει ότι η $\pi_j = c, j \in I,$
όπου c οποιαδήποτε σταθερά, αποτελεί λύση των εξισώ-
σεων (*). Για να ισχύει και η (**) πρέπει $c = \frac{1}{s}$. $\square$

Παράδειγμα 2.16 Ένα σωρατίδιο κινείται πάνω σε s ση-
μεία της περιφέρειας ενός κύκλου που είναι σημειωμένα
με τους αριθμούς $0, 1, \dots, s-1$ κατά τη φορά των δεικτών
ενός ρολογιού. Σε κάθε βήμα υπάρχει πιθανότητα p το
σωρατίδιο να κινήσει σε χειτονικό προς τα δεξιά σημείο
(κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού) και πιθανότητα
 $q = 1 - p$ προς τα αριστερά. Αν X_n είναι η θέση του
σωρατιδίου κατά το n -οστό βήμα, $n = 0, 1, \dots$, να βρεθούν

τα όρια καθώς $n \rightarrow \infty$ των πιθανοτήτων μετάβασης n -τάξεως.

Λύση: Οι πιθανότητες μετάβασης $1^{η} \leq$ τάξης της X_n δίνονται από τις σχέσεις (το σημείο s ταυτίζεται με το 0): $P_{i,i+1} = p, i=0,1,\dots,s-1, P_{i,i-1} = q, i=1,2,\dots,s$

$P_{ij} = 0, j \neq i-1, i+1$. Παρατηρούμε ότι για δεδομένο j , $P_{ij} = 0$ εκτός από τις πιθανότητες $P_{j-1,j} = p$ και $P_{j+1,j} = q$. Συνεπώς, $\sum_{i=0}^{s-1} P_{ij} = 1, j=0,1,\dots,s-1$ και

συνεπώς ο πίνακας $P = (P_{ij}), i,j=0,1,\dots,s-1$ είναι διπλά στοχαστικός. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος έπεται ότι: $P_{ij}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi_j = \frac{1}{s}, i,j=0,1,\dots,s-1. \quad \square$

Παράδειγμα 2.17 θεωρούμε το μοντέλο για έλεγχο αποθεμάτων που εισάγαμε στο Παράδειγμα 2.2. Ο χώρος καταστάσεων είναι το σύνολο $I = \{0,1,\dots,S\}$. Για αυτό το μοντέλο υπάρχει στάσιμη κατανομή $\pi_i, i=0,1,\dots,S$ και είναι η μοναδική λύση του συστήματος:

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{s-1} \pi_k \phi_{s-j} + \sum_{k=j}^S \pi_k \phi_{k-j}, s \leq j \leq S$$

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{s-1} \pi_k \phi_{s-j} + \sum_{k=s}^S \pi_k \phi_{k-j}, 1 \leq j < s$$

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{s-1} \pi_k \sum_{d=s}^{\infty} \phi_d + \sum_{k=s}^S \pi_k \sum_{d=k}^{\infty} \phi_d, j=0 \text{ και } \sum_{j=0}^S \pi_j = 1. \quad \square$$