

§3.1 Εισαγωγή

Ορισμός 3.1 Η στοχαστική ανέλιξη $X(t)$, $t \geq 0$ με χώρο καταστάσεων το πεπερασμένο ή άπειρο αριθμητικό σύνολο I καλείται Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο αν

$$P[X(t_n) = i_n | X(t_0) = i_0, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}] = P[X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}]$$

για οποιαδήποτε $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ και $i_0, \dots, i_{n-1}, i_n \in I$.

Η μαθηματική θεμελίωση της γενικής θεωρίας αυτών των αλυσίδων περιέχει πολλά λεπτά σημεία. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε δύο συγκεντρωμένα σημαντικά παραδείγματα: την ανέλιξη Poisson και την απλή ανέλιξη γεννήσεως-θανάτου.

§3.2 Ανέλιξη Poisson

Θεωρούμε μία ανέλιξη σε συνεχή χρόνο $X(t)$, $t \geq 0$, όπου η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των αφίξεων (ή των γεγονότων) που συμβαίνουν για κατά το χρονικό διάστημα $(0, t)$. Οι αφίξεις συμβαίνουν κατά τυχαίο τρόπο. Ο χώρος καταστάσεων είναι $I = \{0, 1, \dots\}$. Υποθέτουμε τα παρακάτω αξιώματα:

(i) Οι αριθμοί των αφίξεων που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια ξένων χρονικών διαστημάτων είναι ανεξάρτητα καταγεγραμμένοι. Έχουμε δηλαδή "ανεξάρτητες προσαντήσεις".

(ii) Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $X(t+h) - X(t)$,

δηλαδή ο αριθμός των αφίξεων που συμβαίνουν κατά το χρονικό διάστημα $(t, t+h)$ εξαρτάται μόνο από το h και όχι από το t . Έχουμε δηλαδή "χρονική στασιμότητα".

(iii) $P[X(t+h) - X(t) = 1] = \lambda h + o(h)$, καθώς $h \rightarrow 0$ για κάποιο θετικό αριθμό λ . Με $o(h)$ συμβολίζουμε μία συνάρτηση του h τέτοια ώστε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

(iv) $P[X(t+h) - X(t) \geq 2] = o(h)$, καθώς $h \rightarrow 0$.

Η ανέλιξη $X(t)$, $t \geq 0$ εφοδιασμένη με τα παραπάνω τέσσερα αξιώματα καλείται ανέλιξη Poisson (Poisson process). Αποδεικνύεται ότι είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο.

Επίσης από τα αξιώματα (iii) και (iv), έχουμε ότι:

$$P[X(t+h) - X(t) = 0] = 1 - \lambda h + o(h), \text{ καθώς } h \rightarrow 0.$$

Έστω $p_n(t) = P[X(t) = n]$, $n \geq 0$. Οι αρχικές συνθήκες είναι:

$p_0(0) = 1$, $p_n(0) = 0$, $n \geq 1$. Μας ενδιαφέρει να βρούμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$, $t \geq 0$. Οι δεσφόμενες προδeterministic εξισώσεις (forward equations) λαμβάνονται ως εξής:

Για $h \rightarrow 0$: $p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h))$ ή

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h} \quad \text{ή} \quad \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) \quad (*)$$

Αν $n \geq 1$

$p_n(t+h) = p_n(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_{n-1}(t)(\lambda h + o(h))$ ή

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \quad (**)$$

Ορίζουμε την πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$, ως εξής:
$$\phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n, \quad |z| < 1$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (**) με z^n και προσθέτοντας στην (*) έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_n(t)}{dt} z^n = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(t) z^n$$

δηλαδή
$$\frac{d\phi(z, t)}{dt} = -\lambda(1-z)\phi(z, t)$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης βρίσκεται ως εξής:
$$\int \frac{d\phi}{\phi} = -\lambda(1-z) \int dt$$

Ισοδύναμα, $\ln \phi = -\lambda(1-z)t + C$, C σταθερά, δηλαδή

$$\phi(z, t) = f(z) e^{-\lambda(1-z)t} \text{ για κάποια συνάρτηση } f(z),$$

διότι η τιμή της σταθεράς μπορεί να εξαρτάται από την τιμή της z . Η αρχική συνθήκη είναι $\phi(z, 0) = 1$ από την οποία συνεπάγεται ότι $\phi(z, t) = e^{-\lambda t(1-z)}$. Η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$ ορίζεται ως:

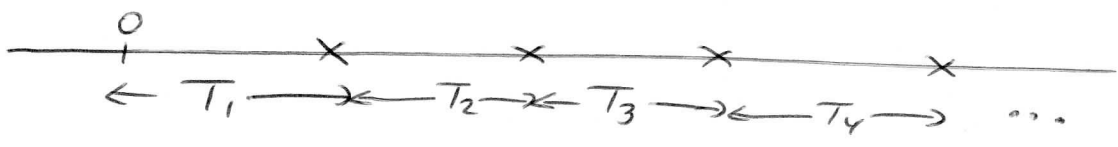
$$M(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (e^t)^n P\{X(t)=n\} = \phi(e^z, t)$$

Άρα $M(z, t) = \exp\{\lambda t(e^z - 1)\}$. Παρατηρούμε ότι ο τύπος της $M(z, t)$ συμπίπτει με τον τύπο της ροπογεννήτριας της Poisson(λt). Συνεπώς, η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt .

Έστω T_1 ο χρόνος μέχρι την πρώτη άφιξη. Έχουμε ότι:

$$P(T_1 > t) = P(X(t) = 0) = e^{-\lambda t} \text{ Άρα, η συνάρτηση πυ-}$$

κνότητας της τυχαίας μεταβλητής T_1 είναι $f_{T_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$. Δηλαδή $T_1 \sim \text{Ευθετική}(\lambda)$. Για $n \geq 2$, έστω T_n ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ της $n-1$ και της n -οστής αφίξεως.



Έχουμε ότι:

$$P(T_{n+1} > t \mid T_1 = t_1, T_2 = t_2, \dots, T_n = t_n)$$

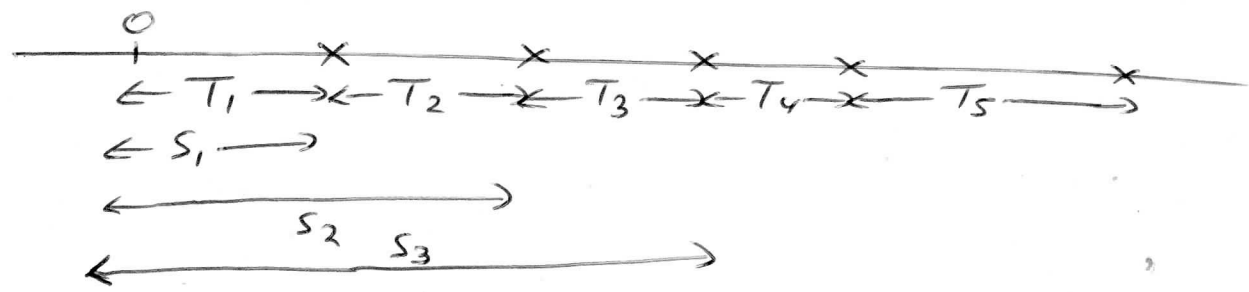
(i) $\underline{=} P[X(s+t) - X(s) = 0]$, όπου $s = t_1 + t_2 + \dots + t_n$

(ii) $\underline{=} P[X(t) - X(0) = 0] = P[X(t) = 0] = e^{-\lambda t}$

Άρα, ο χρόνος T_{n+1} είναι ανεξάρτητος των $T_1, \dots, T_n$ και ακολουθεί την Ευθετική (λ) . Συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $T_n, n \geq 1$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την Ευθετική (λ) . $\square$

Παράδειγμα 3.1 Έστω μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda > 0$. Έστω S_n ο χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση του n -οστού γεγονότος. Βρείτε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής S_n .

Λύση



1^{ος} τρόπος: Έστω T_1 ο χρόνος μέχρι την παραγματοποίηση του 1^{ου} γεγονότος και $T_i, i \geq 2$, ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στο $(i-1)$ και στο i -οστό γεγονός. Προφανώς:

$$S_n = T_1 + \dots + T_n, n=1,2,\dots$$

Γνωρίζουμε ότι $T_i \sim \text{Ευθετική}(\lambda), i=1,2,\dots$ και είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς $S_n = \sum_{i=1}^n T_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$,

δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής S_n είναι: $f_{S_n}(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, t \geq 0.$

2^{ος} τρόπος: Έστω $F_{S_n}(t)$ η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής S_n . Παρατηρούμε ότι το n -οστό γεγονός πραγματοποιείται πριν ή κατά τη χρονική στιγμή t αν και μόνο αν ο αριθμός των γεγονότων που έχουν πραγματοποιηθεί μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι τουλάχιστον n . Δηλαδή, $N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t$

Συνεπώς,
$$F_{S_n}(t) = P\{S_n \leq t\} = P\{N(t) \geq n\} = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!}$$

Παραγωγίζοντας την $F_{S_n}(t)$ ως προς t λαμβάνουμε τη συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής S_n .

$$\begin{aligned} f_{S_n}(t) &= - \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} - \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \square \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.2 Έστω ότι πέχει τη χρονική στιγμή ένα μόνο γεγονός πίας ανέλιξης Poisson συνέβη. Ποια είναι η κατανομή του χρόνου κατά το οποίο το γεγονός συνέβη;

Λύση Για $s \leq t$ έχουμε

$$\begin{aligned} P\{T_1 \leq s | N(t) = 1\} &= \frac{P\{T_1 \leq s, N(t) = 1\}}{P\{N(t) = 1\}} \\ &= \frac{P\{1 \text{ γεγονός στο } [0, s), \text{ κανένα γεγονός στο } [s, t)\}}{P\{N(t) = 1\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\underline{(i)} \frac{P\{1 \text{ γεγονός στο } [0, s)\} \cdot P\{\text{κανένα γεγονός στο } [s, t)\}}{P\{N(t) = 1\}} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}. \text{ Αυτή όμως είναι η συνάρτηση} \end{aligned}$$

κατανομής της Ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα $[0, t]$. Άρα $T_1 | N(t) = 1 \sim \text{Ομοιόμορφη}(0, t)$. $\square$

Παρατήρηση: Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γενικευθεί ως εξής: Αν γνωρίζουμε ότι $N(t) = n$ τότε οι χρόνοι $S_1, S_2, \dots, S_n$ των αφίξεων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανοημένες στο διάστημα $(0, t)$. $\square$

Παράδειγμα 3.3 Κάποια γεγονότα συμβαίνουν σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda = 2$ ανά ώρα. (α) Ποιά είναι η πιθανότητα να μη συμβεί κανένα γεγονός ανάμεσα στις 8 και 9 το πρωί;

(β) Ξεμινώντας από το ρεσιπέρι, ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση του 4^{ου} γεγονότος;

(γ) Ποιά είναι η πιθανότητα να συμβούν δύο ή περισσότερα γεγονότα ανάμεσα στις 6 και 8 το θράδυ;
Λύση

$$(α) N(t) \sim \text{Poisson}(2t)$$

$$P\{\text{να μη συμβεί κανένα γεγονός ανάμεσα στις 8 και 9 το πρωί}\} = P\{N(1)=0\} = e^{-2} \frac{2^0}{0!} = e^{-2}.$$

(β) Έστω S_4 : χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση του 4^{ου} γεγονότος

Είναι $S_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$, όπου $T_i \sim \text{Ευθετική}(2)$, $i=1,2,3,4$.

$$E(S_4) = E[T_1] + E[T_2] + E[T_3] + E[T_4] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

(γ) $P\{\text{να συμβούν δύο ή περισσότερα γεγονότα ανάμεσα στις 6 και 8 το θράδυ}\}$

$$= P\{N(2 \cdot 2) \geq 2\} = 1 - P\{N(4)=0\} - P\{N(4)=1\} \\ = 1 - e^{-4} - 4e^{-4} = 1 - 5e^{-4}. \quad \square$$

Παράδειγμα 3.4 Πελάτες φθάνουν σε μία τράπεζα σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ . Υποθέτουμε ότι δύο πελάτες έφθασαν κατά τη διάρκεια της 1^{ης} ώρας. Ποια είναι η πιθανότητα (α) να έφθασαν και οι δύο πελάτες κατά τα πρώτα 20 λεπτά; (β) να έφθασε τουλάχιστον ένας από τους πελάτες κατά τη διάρκεια

των πρώτων 20 λεπτών;

-70-

Λύση: $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

$$\begin{aligned} (a) \quad P\left[N\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \mid N(1) = 2\right] &= \frac{P\left[N\left(\frac{1}{3}\right) = 2, N(1) = 2\right]}{P[N(1) = 2]} \\ &= \frac{P\left[N\left(\frac{1}{3}\right) = 2\right] P\left[N\left(\frac{2}{3}\right) = 0\right]}{P[N(1) = 2]} \\ &= \frac{e^{-\frac{\lambda}{3}} \frac{(\frac{\lambda}{3})^2}{2!} e^{-\frac{2}{3}\lambda} \frac{(\frac{2}{3}\lambda)^0}{0!}}{e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!}} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad P\left[N\left(\frac{1}{3}\right) \geq 1 \mid N(1) = 2\right] &= P\left[N\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \mid N(1) = 2\right] \\ &+ P\left[N\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \mid N(1) = 2\right] \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως } P\left[N\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \mid N(1) = 2\right] &= \frac{P\left[N\left(\frac{1}{3}\right) = 1, N(1) = 2\right]}{P[N(1) = 2]} \\ &= \frac{P\left[N\left(\frac{1}{3}\right) = 1\right] P\left[N\left(\frac{2}{3}\right) = 1\right]}{P[N(1) = 2]} = \frac{e^{-\frac{\lambda}{3}} \frac{\lambda}{1!} e^{-\frac{2}{3}\lambda} \frac{\frac{2}{3}\lambda}{1!}}{e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!}} \\ &= \frac{5}{9}. \quad \square \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.5 Για μία ανέλιξη Poisson δείξτε ότι για $s < t$ ισχύει ότι: $P\{N(s) = k \mid N(t) = n\} = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

-71-

$$\begin{aligned}
 \text{Απόδειξη: } P\{N(s)=k \mid N(t)=n\} &= \frac{P\{N(s)=k, N(t)=n\}}{P\{N(t)=n\}} \\
 &= \frac{P\{N(s)=k, N(t)-N(s)=n-k\}}{P\{N(t)=n\}} \quad (i) \\
 &= \frac{P\{N(s)=k\} P\{N(t)-N(s)=n-k\}}{P\{N(t)=n\}} \\
 (ii) \quad &\frac{P\{N(s)=k\} P\{N(t-s)=n-k\}}{P\{N(t)=n\}} \\
 &= \frac{e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{s^k (t-s)^{n-k}}{t^n} \\
 &= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, \quad k=0, 1, \dots, n. \quad \square
 \end{aligned}$$

§ 3.3 Απαλή Ανέλιξη Γεννήσεως-Θανάτου

Έστω ότι σ' ένα χρονικό διάστημα μήκους h , όπου $h \rightarrow 0$, ένα συγκεντρωμένο άτομο ενός πληθυσμού γεννά ένα νέο άτομο με πιθανότητα $\lambda h + o(h)$ ή πεθαίνει με πιθανότητα $\mu h + o(h)$, όπου λ και μ είναι θετικοί αριθμοί. Τα διαφορετικά άτομα συμπεριφέρονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και από την προηγούμενη ιστορία της ανέλιξης.

Αν τη χρονική στιγμή t υπάρχουν n άτομα στον πληθυσμό τότε η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς μία γέννηση στο χρονικό διάστημα $(t, t+h)$, όπου

$$h \rightarrow 0 \text{ είναι ίση με: } \binom{n}{2} [\lambda h + o(h)] [1 - \lambda h + o(h)] = -72- \\ = n \lambda h + o(h).$$

Ομοίως, η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένας θάνατος είναι ίση με $\mu n h + o(h)$.

Η πιθανότητα να συμβούν περισσότερα από ένα γεγονότα στο χρονικό διάστημα $(t, t+h)$, όπου $h \rightarrow 0$ είναι ίση με $o(h)$.

Η αντίστοιχη Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο $X(t), t \geq 0$, όπου $X(t)$ είναι το μέγεθος του πληθυσμού κατά τη χρονική στιγμή t , καλείται απλή ανέλιξη γεννήσεως-θάνατου με ρυθμούς γεννήσεως και θανάτου ανά άτομο λ και μ , αντίστοιχα.

Ο χώρος των καταστάσεων είναι το σύνολο των μ -αρνητικών ακεραίων. Για $n \geq 1$ και $h \rightarrow 0$ έχουμε:

$$P[X(t+h) - X(t) = 1 \mid X(t) = n] = \lambda n h + o(h)$$

$$P[X(t+h) - X(t) = -1 \mid X(t) = n] = \mu n h + o(h)$$

$$P[X(t+h) - X(t) = 0 \mid X(t) = n] = 1 - n\lambda h - \mu n h + o(h)$$

$$P[X(t+h) - X(t) = j \mid X(t) = n] = o(h), \text{ για } j \notin \{0, 1, -1\}.$$

Η κατάσταση 0 είναι μία κατάσταση απορρόφησης.

Αντιστοιχεί στην εξάλειψη του πληθυσμού.

Ένας συνοπτικός τρόπος παρουσίασης των μεταβάσεων της ανέλιξης και των αντίστοιχων ρυθμών είναι ο εξής:

Μετάβαση	Ρυθμός
$x \rightarrow x+1$	$\lambda x, \quad x \geq 1$
$x \rightarrow x-1$	$\mu x, \quad x \geq 1$

Μας ενδιαφέρει η μελέτη της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$. Ορίζουμε: $p_n(t) = P[X(t)=n | X(0)=j]$.

Οι προδεδωμένες εξισώσεις λαμβάνονται ως εξής:
για $n \geq 1$ και $h \rightarrow 0$:

$$p_n(t+h) = p_n(t) [1 - \lambda n h - \mu n h + o(h)] \\ + p_{n-1}(t) [\lambda(n-1)h + o(h)] \\ + p_{n+1}(t) [\mu(n+1)h + o(h)] + o(h).$$

Για $n=0$ και $h \rightarrow 0$

$$p_0(t+h) = p_0(t) + p_1(t) [\mu h + o(h)] + o(h)$$

Προκύπτουν οι εξής διαφοροδιαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) n p_n(t) + \lambda(n-1) p_{n-1}(t) + \mu(n+1) p_{n+1}(t) \\ n \geq 1 \quad (*)$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu p_1(t) \quad (**)$$

Για τη λύση των (*) και (**) χρησιμοποιούμε την τεχνική της πιθανογεννήτριας. Θεωρούμε την πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$, δηλαδή τη συνάρτηση: $\phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n, |z| < 1.$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (*) επί z^n και προσθέτοντας στην (*) έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d p_n(t)}{dt} z^n = -(\lambda + \mu) z \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t) z^{n-1} + \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1}(t) z^n + \lambda z^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_{n-1}(t) z^{n-2}$$

σηλαδή

$$\frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu) z \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} + \lambda z^2 \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} + \mu \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} = (\lambda z - \mu)(z-1) \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} (***)$$

Για τη λύση της περιικής διαφορικής εξίσωσης (***) χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Lagrange που παραθέτουμε παρανεπτυχιά παρακάτω.

Μέθοδος Lagrange: Έστω ϕ μία συνάρτηση των z και t που ικανοποιεί τη περιική διαφορική εξίσωση:

$$A \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} + B \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} = C'$$

όπου A, B, C' είναι συναρτήσεις των z, t, ϕ . Θεωρούμε τις βοηθητικές εξισώσεις: $\frac{dt}{A} = \frac{dz}{B} = \frac{d\phi}{C'}$.

Βρίσκουμε δύο ανεξάρτητες λύσεις των βοηθητικών εξισώσεων. Αυτές έχουν τη μορφή:

$$u(z, t, \phi) = \text{σταθερά}, \quad v(z, t, \phi) = \text{σταθερά}.$$

Μία γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι $\psi(u,v)=0$, όπου ψ είναι κάποια αυθαίρετη συνάρτηση. Ισοδύναμα, μία γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι: $u=f(v)$, όπου f είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση.

Επανερχόμαστε στη λύση της (***) . Οι βοηθητικές εξισώσεις είναι:
$$\frac{dt}{t} = \frac{-dz}{(\lambda z - \mu)(z-1)} = \frac{d\phi}{0}$$

Πρέπει $d\phi=0$ δηλαδή $\phi=σταθερά$. Αυτή είναι μία από τις δύο ανεξάρτητες λύσεις. Για να βρούμε τη δεύτερη λύση πρέπει να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1^η: $\lambda \neq \mu$

Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$dt = \frac{dz}{\lambda - \mu} \left(\frac{\lambda}{\lambda z - \mu} - \frac{1}{z-1} \right)$$

Με ολοκλήρωση παίρνουμε:

$$v \equiv \frac{z-1}{\lambda z - \mu} e^{(\lambda - \mu)t} = σταθερά$$

Συνεπώς, η γενική λύση της (***) είναι της μορφής:

$$\phi(z,t) = f \left(\frac{z-1}{\lambda z - \mu} e^{(\lambda - \mu)t} \right)$$

Η συνάρτηση f προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη για $t=0$. Δηλαδή τη συνθήκη:

$$\phi(z,0) = z^{\beta} = f \left(\frac{z-1}{\lambda z - \mu} \right)$$

Θέτουμε $u = \frac{z-1}{\lambda z - \mu}$ και έχουμε $z = \frac{\mu u - 1}{\lambda u - 1}$. Άρα

$$f(u) = \left(\frac{\mu u - 1}{\lambda u - 1} \right)^{\xi}. \text{ Συνεπώς } \phi(z, t) = \left(\frac{\frac{\mu(z-1)}{\lambda z - 1} e^{(\lambda - \mu)t} - 1}{\frac{\lambda(z-1)}{\lambda z - \mu} e^{(\lambda - \mu)t} - 1} \right)^{\xi}$$

Τελικά:

$$\phi(z, t) = \left(\frac{\mu(z-1) e^{(\lambda - \mu)t} + \mu - \lambda z}{\lambda(z-1) e^{(\lambda - \mu)t} + \mu - \lambda z} \right)^{\xi}$$

Περίπτωση 2^η: $\lambda = \mu$

$$\text{Τότε } dt = -\frac{dz}{(\lambda z - \mu)(z-1)} = -\frac{dz}{\mu(z-1)^2}$$

Με ολοκλήρωση παίρνουμε:

$$\mu \int dt = -\int \frac{dz}{(z-1)^2} \Rightarrow \mu t - \frac{1}{z-1} = \text{σταθερά}$$

Άρα, η γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\phi(z, t) = f\left(\mu t - \frac{1}{z-1}\right)$$

$$\text{Θέτοντας } t=0 \text{ έχουμε: } z^{\xi} = \phi(z, 0) = f\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$\text{Όταν } u = \frac{1}{1-z} \Rightarrow z = \frac{u-1}{u} \text{ Άρα } f(u) = \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{\xi}$$

$$\text{Συνεπώς } \phi(z, t) = \left(1 - \frac{1}{\mu t - \frac{1}{z-1}}\right)^{\xi} = \frac{\mu t(z-1) - z}{\mu t(z-1) - 1}$$

Από τον ορισμό της $\phi(z, t)$ προκύπτει ότι οι πιθανότητες $p_n(t)$ εξάγονται από τον τύπο:

$$p_n(t) = \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n \phi(z, t)}{\partial z^n} \right]_{z=0}$$

Ορίζουμε $m(t) = E[X(t)], t \geq 0$

Παρατηρούμε ότι:

$$\left[\frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} \right]_{z=1} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) n = m(t)$$

Παραγωγίζοντας την (***) ως προς z , έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi(z, t)}{\partial t \partial z} &= (\lambda z - \mu)(z-1) \frac{\partial^2 \phi(z, t)}{\partial z^2} + \lambda(z-1) \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} \\ &\quad + (\lambda z - \mu) \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} \end{aligned}$$

Θέτοντας $z=1$ προκύπτει

$$\frac{dm(t)}{dt} = (\lambda - \mu)m(t) \text{ με αρχική συνθήκη } m(0) = \xi.$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$m(t) = \xi e^{(\lambda - \mu)t}, t \geq 0.$$

Για να μελετηθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$ καθώς $t \rightarrow \infty$ αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της ποσότητας $\phi(z, t)$, καθώς $t \rightarrow \infty$. Παρατηρούμε ότι:

αν $\lambda = \mu$ τότε $\phi(z, t) \rightarrow 1$ καθώς $t \rightarrow \infty$

αν $\lambda < \mu$ τότε $\phi(z, t) \rightarrow 1$ καθώς $t \rightarrow \infty$

αν $\lambda > \mu$ τότε $\phi(z, t) \rightarrow \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^z$ καθώς $t \rightarrow \infty$,

Δηλαδή, $\rho_0(t) = \phi(0, t) \rightarrow 1$ καθώς $t \rightarrow \infty$ αν $\lambda \leq \mu$

και $\rho_0(t) = \phi(0, t) \rightarrow \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\lambda}$ καθώς $t \rightarrow \infty$ αν $\lambda > \mu$

Αυτό σημαίνει ότι αν $\lambda \leq \mu$ ο πιθανοσμός εξαλείφεται τελικά με πιθανότητα 1 ενώ αν $\lambda > \mu$ ο πιθανοσμός εξαλείφεται τελικά με πιθανότητα $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\lambda}$. $\square$