Παράδειγμα 4.1 (Κλαδωτή ανέλιξη) Θεωρούμε έναν πληθυσμό με δυνατότητα αναπαραγωγής. Ας υποθέσουμε ότι κάθε άτομο μέχρι το τέλος της ζωής του θα γεννήσει $Z=j$ άτομα σύμφωνα με την κατανομή πιθανότητας $P_j = P(Z=j)$, $j=0,1,2,\ldots$ Προφανώς $P_j \geq 0$ και $\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$. Υποθέτουμε ότι όλοι οι απόγονοι δρουν ανεξάρτητα και παράγουν τους δικούς τους απογόνους σύμφωνα με την ίδια κατανομή πιθανότητας. Έστω ότι $P_j < 1$ για κάθε $j \geq 0$. Θεωρούμε X_0 το μέγεθος του αρχικού πληθυσμού δηλαδή της 0-κικής γενιάς, X_1 είναι το μέγεθος της $1^{ης}$ γενεάς δηλαδή ο αριθμός απογόνων της 0-κικής γενιάς. Η αλυσίδα $\{X_n, n=0,1,2,\ldots\}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο με σύνολο καταστάσεων τους μη-αρνητικούς ακέραιους αριθμούς $\{0,1,2,\ldots\}$. Η κατάσταση 0 είναι έμμονη διότι $P_{00}=1$. Έστω

$\mu = \sum_{j=0}^{\infty} j P_j$ ο αναμενόμενος αριθμός απογόνων ενός ατόμου

και $\sigma^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (j-\mu)^2 P_j$ η διακύμανση αυτού του αριθμού.

Υποθέτουμε ότι $X_0 = 1$. Θα υπολογίσουμε την $E[X_n]$.

Για κάθε $n=0,1,2,\ldots$ μπορούμε να γράψουμε:

$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i$, όπου Z_i είναι ο αριθμός των απογόνων του i-οστού ατόμου της $(n-1)$-γενεάς. Τότε:

$$E[X_n] = E[E[X_n | X_{n-1}]] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i \Big| X_{n-1}\right]\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} E[Z_i | X_{n-1}]\right] = E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} E[Z_i]\right] = E\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \mu\right)$$

$$= E[X_{n-1}\mu] = \mu E[X_{n-1}]$$

Όμως $E[X_0]=1$ άρα $E[X_1]=\mu$, $E[X_2]=\mu E[X_1]=\mu^2$

$\dots E[X_n] = \mu E[X_{n-1}] = \mu^n$.

Έστω π_0 η πιθανότητα αφανισμού του πληθυσμού. Δηλαδή $\pi_0 = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 0 | X_0 = 1)$

Όμως $\mu^n = E(X_n) = \sum_{j=1}^{\infty} j P(X_n = j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} P(X_n = j)$

$= P(X_n \geq 1)$

Άρα αν $\mu < 1$ τότε $\mu^n \to 0$ και συνεπώς $P(X_n \geq 1) \to 0$

δηλ. $P(X_n = 0) \to 1$. Συνεπώς $\pi_0 = 1$.

Αν $\mu > 1$ τότε $\pi_0 < 1$, διότι

$$\pi_0 = P(\text{ο πληθυσμός θα εξαφανισθεί})$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} P(\text{ο πληθυσμός θα εξαφανισθεί} | X_1 = j) P_j$$

Αφού κάθε άτομο του πληθυσμού δρα ανεξάρτητα από κάθε άλλο άτομο έχουμε ότι:

$$P(\text{ο πληθυσμός θα εξαφανισθεί} | X_1 = j) = \pi_0^j$$

Συνεπώς $\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j P_j(1)$. Αποδεικνύεται ότι, σ' αυτήν την περίπτωση η πιθανότητα π_0 είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός που ικανοποιεί την εξίσωση (1). ⊠

Παράδειγμα 4.2 (Καταστροφή ενός χαρτοπαίκτη)
Θεωρούμε ένα χαρτοπαίκτη ο οποίος σε κάθε γύρο ενός παιχνιδιού κερδίζει μία μονάδα με πιθανότητα p και χάνει μία μονάδα με πιθανότητα $q = 1-p$. Ποια είναι η πιθανότητα ο χαρτοπαίκτης, ξεκινώντας με i-μονάδες να φτάσει την περιουσία του στις N-μονάδες πριν καταστραφεί;

Λύση Έστω $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ η περιουσία του χαρτοπαίκτη κατά τη χρονική στιγμή n. Η ακολουθία $\{X_n, n=0,1,\dots\}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο με πιθανότητες μετάβασης $P_{i,i+1} = p$, $P_{i,i-1} = 1-p = q$, $P_{00} = P_{NN} = 1$, (δηλαδή ο χώρος καταστάσεων της αλυσίδας είναι το σύνολο $\{0, 1, \dots, N\}$). Η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει τρεις κλάσεις $\{0\}, \{N\}, \{1, \dots, N-1\}$ με τις καταστάσεις $1, \dots, N-1$ να είναι μεταβατικές και τις $\{0\}, \{N\}$ έμμονες. Αφού σε κάθε μεταβατική κατάσταση η αλυσίδα θα πάει πεπερασμένο αριθμό φορών προκύπτει ότι μετά από πεπερασμένο χρόνο η αλυσίδα θα καταλήξει είτε στην κατάσταση 0 είτε στην κατάσταση N, δηλαδή ο χαρτοπαίκτης είτε θα φτάσει στο στόχο του είτε θα καταστραφεί.

Ορίζουμε $f_i = f_{iN}$ την πιθανότητα ξεκινώντας ο

Χαρτοπαίκτης με i-μονάδες, $0 \le i \le N$, η περιουσία του να φτάσει τις N-μονάδες. Τότε, αν δεσμεύτούμε ως προς τον πρώτο γύρο του παιχνιδιού και τα αποτελέσματά του, θα έχουμε:

$$f_i = f_{iN} = p f_{i+1} + q f_{i-1} \quad , i = 1, \dots, N-1.$$ Όμως $p+q=1$.

Άρα $(p+q) f_i = p f_{i+1} + q f_{i-1}$, $i=1,\dots,N-1$

$$p f_i + q f_i = p f_{i+1} + q f_{i-1} \Rightarrow p(f_i - f_{i+1}) = q(f_{i-1} - f_i)$$

$$\Rightarrow f_{i+1} - f_i = \frac{q}{p}(f_i - f_{i-1}), \; i = 1, \dots, N-1$$

Όμως $f_0 = f_{0N} = 0$

άρα
$$f_2 - f_1 = \frac{q}{p}(f_1 - f_0) = \frac{q}{p} f_1$$
$$f_3 - f_2 = \frac{q}{p}(f_2 - f_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 f_1$$
$$\vdots$$
$$f_i - f_{i-1} = \frac{q}{p}(f_{i-1} - f_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} f_1$$
$$\vdots$$
$$f_N - f_{N-1} = \frac{q}{p}(f_{N-1} - f_{N-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} f_1$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις πρώτες $i-1$ εξισώσεις:

$$f_i - f_{i-1} = f_1\left[\left(\frac{q}{p}\right) + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]$$

$$\Rightarrow f_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)} f_1, & \text{αν } \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ i f_1, & \text{αν } \dfrac{q}{p} = 1 \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $f_N = f_{NN} = 1$, έχουμε:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}, & \text{αν } p \neq 1/2 \\ \dfrac{i}{N}, & \text{αν } p = 1/2 \end{cases}$$

Αν $N \to \infty$ $\quad f_i = \begin{cases} 1-(q/p)^i, & \text{αν } p > 1/2 \\ 0, & \text{αν } p \leq 1/2 \end{cases}$, δηλαδή αν $p > 1/2$ υπάρχει θετική πιθανότητα η περιουσία του χαρτοπαίκτη να γίνει αρκετά μεγάλη, ενώ αν $p \leq 1/2$ τότε με πιθανότητα 1 ο χαρτοπαίκτης θα χάσει την περιουσία του. ⊠

Παράδειγμα 4.3 Υποθέτουμε ότι πελάτες εισέρχονται σε ένα πολυκατάστημα σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Υποθέτουμε επίσης ότι μόλις οι πελάτες εισέρχονται στο πολυκατάστημα μπορούν να εξυπηρετηθούν αμέσως χωρίς να περιμένουν στην ουρά από το θεωρητικά άπειρο προσωπικό του καταστήματος. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών από το προσωπικό θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητοι από πελάτη σε πελάτη με κοινή συνάρτηση κατανομής G. Έστω $X(t)$ η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των πελατών στο πολυκατάστημα τη χρονική στιγμή t. Υπολογίστε τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$, αν γνωρίζετε τις τιμές της τυχαίας μεταβλητής $N(t)$ που αναπαριστά το συνολικό αριθμό των πελατών που έχουν εισαχθεί στο πολυκατάστημα στο χρονικό διάστημα $(0,t)$.

Λύση Θα υπολογίσουμε τη κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$ δεσμευόμενοι στις τιμές της $N(t)$.

$$P\{X(t)=j\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{X(t)=j \mid N(t)=n\}\, P\{N(t)=n\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{X(t)=j \mid N(t)=n\} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Όμως $P\{X(t)=j \mid N(t)=n\} = \begin{cases} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}, & j=0,1,\dots,n \\ 0, & j>n \end{cases}$

διότι η δεσμευμένη κατανομή της $X(t)$ δοθέντος της τυχαίας μεταβλητής $N(t)$ είναι διωνυμική με παραμέτρους n (ο συνολικός αριθμός αφίξεων πελατών στο διάστημα $(0,t)$) και πιθανότητα "επιτυχίας" p, όπου p είναι η πιθανότητα ένας πελάτης να παραμείνει στο κατάστημα μετά από χρόνο t, δηλαδή να μην έχει εξυπηρετηθεί σε χρόνο t. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα p. Έστω ότι ένας πελάτης εισέρχεται στο κατάστημα σε χρόνο x, $0 \le x < t$. Για να παραμείνει στο κατάστημα μετά από χρόνο t, σημαίνει ότι δεν θα εξυπηρετηθεί στο διάστημα $(x,t]$. Έστω η τυχαία μεταβλητή T που αναπαριστά το χρόνο εξυπηρέτησής του. Τότε:

$P\{$ο πελάτης να μην εξυπηρετηθεί σε χρόνο $t\} = P\{T > t-x\}$
$= 1 - G(t-x)$.

Δοθέντος ότι έχουν εισαχθεί στο κατάστημα μέχρι το χρόνο t, n πελάτες, δηλαδή $N(t)=n$, τότε από το Παράδειγμα 3.2, έπεται ότι: $p = \int_0^t (1-G(t-x)) \frac{1}{t} dx =$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t (1-G(x)) dx$$

Επομένως, $P\{X(t)=j\} = \sum_{n=j}^{\infty} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

$$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{(\lambda t(1-p))^{n-j}}{(n-j)!} = e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^j}{j!},$$

επειδή $\sum_{n=j}^{\infty} \frac{(\lambda t(1-p))^{n-j}}{(n-j)!} = e^{\lambda t(1-p)}$. Άρα η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda' = \lambda t p = \lambda \int_0^t (1-G(x))dx$. ☒

Παράδειγμα 4.4 Έστω ο τυχαίος περίπατος $\{X_n, n \geq 0\}$ με σύνολο καταστάσεων $I = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ και πιθανότητες μετάβασης $P_{i,i+1} = p$, $P_{i,i-1} = 1-p$, $i \in I$, $0 < p < 1$. Όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν άρα είναι ή όλες μεταβατικές ή όλες έμμονες. Θεωρούμε την κατάσταση 0. Πρέπει να εξετάσουμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^n$. Ισχύει ότι $P_{00}^{2n+1} = 0$ διότι δεν είναι δυνατόν, ξεκινώντας από την κατάσταση 0 μετά από περιττό αριθμό βημάτων να φθάσουμε στην κατάσταση 0. Επίσης $P_{00}^{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$, διότι μετά από $2n$ βήματα, ξεκινώντας από την κατάσταση 0, μπορούμε να φθάσουμε στην κατάσταση 0, όταν κάνουμε n βήματα δεξιά και n βήματα αριστερά.

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,n!} p^n (1-p)^n$

Από τον τύπο του Stirling, $n! \sim n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}$

και επομένως: $$\frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}\; n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}}$$

$\cong \dfrac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n\pi}}$.

Όμως $4p(1-p) \leq 1$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $p=1/2$. Έτσι $\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} = \infty$ αν και μόνο αν $p=1/2$. Επομένως, η αλυσίδα είναι έμμονη όταν $p=1/2$ και μεταβατική αν $p \neq 1/2$. ⊠