

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2. Ασκήσεις στις Μαρκοβιανές αλυσίδες σε διακριτό χρόνο

1. Δείξτε ότι μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που παίρνουν τιμές σ' ένα πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο I των πραγματικών αριθμών είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο. Κάτω από ποιά συνθήκη είναι αυτή η αλυσίδα ομογενής;

2. Η πιθανότητα εμφάνισης γραμμάτων κατά τη ρίψη ενός νομίσματος είναι a ενώ για ένα άλλο νόμισμα είναι b . Αν εμφανιστούν γράμματα κατά τη ρίψη ενός από τα δύο νομίσματα, επιλέγουμε το άλλο νόμισμα για την επόμενη ρίψη. Να οριστεί κατάλληλη Μαρκοβιανή αλυσίδα και με τη βοήθεια αυτής να υπολογιστεί η πιθανότητα να χρησιμοποιηθεί για τη τρίτη δοκιμή το πρώτο νόμισμα με την υπόθεση ότι είναι το ίδιο πιθανό να χρησιμοποιηθεί για την πρώτη δοκιμή οποιοδήποτε από τα δύο νομίσματα.

3. Ταξινομήστε τις καταστάσεις των Μαρκοβιανών αλυσίδων σε διακριτό χρόνο με πίνακες μετάβασης πρώτης τάξεως:

$$(\alpha) P_1 = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & p \\ p & q & 0 \end{pmatrix} \quad (\beta) P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ όπου } 0 < p < 1 \text{ και } q = 1 - p.$$

Για το (α) δείξτε ότι όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας είναι έμμονες, θετικές, επικοινωνούν ανά δύο μεταξύ τους και είναι απεριοδικές. Για το (β) δείξτε ότι όλες οι καταστάσεις είναι έμμονες, θετικές, επικοινωνούν ανά δύο μεταξύ τους και είναι περιοδικές με περίοδο $d = 3$.

4. Για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα της Άσκησης 3 (α), υπολογίστε τα όρια $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$, για $i, j = 0, 1, 2$.

5. Σε ένα ταχυδρομείο που διαθέτει ένα μόνο ταμείο οι πελάτες που φθάνουν σχηματίζουν ουρά και περιμένουν τη σειρά τους για να εξυπηρετηθούν. Στο χρονικό διάστημα που το ταμείο εξυπηρετεί τον n -οστό πελάτη, έστω X_n ο αριθμός των πελατών που φθάνουν στο ταχυδρομείο και μπαίνουν στην ουρά. Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με $P(X_n = i) = p_i, i, n = 0, 1, 2, \dots$ και $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. Έστω Y_n ο αριθμός των πελατών που περιμένουν στην ουρά τη στιγμή που το ταμείο έχει τελειώσει με την εξυπηρέτηση του n -οστού πελάτη. Τότε:

$$Y_n = Y_{n-1} - \delta(Y_{n-1}) + X_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

όπου, $\delta(x) = 0$, αν $x = 0$ και $\delta(x) = 1$, αν $x \neq 0$. Δείξτε ότι η Y_n , $n = 0, 1, \dots$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο και υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασης πρώτης τάξης.