

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Το πρώτο βήμα στην εξαγωγή συμπερασμάτων για το πληθυσμό από τον οποίον προέρχεται το δείγμα της νέας μεταβλητής που έχουμε στα χέρια μας αφορά την αναζήτηση της κατανομής της.

Για το σκοπό αυτό η Στατιστική χρησιμοποιεί τους στατιστικούς ελέγχους υποθέσεων. Με τους στατιστικούς ελέγχους επιχειρείται να διαπιστωθεί αν:

- οι παρατηρούμενες συχνότητες των κατηγοριών μιας ποιοτικής (κατηγορικής) μεταβλητής απέχουν από τις αντίστοιχες θεωρητικές/αναμενόμενες συχνότητες μιας γνωστής κατανομής. Σ' αυτήν την περίπτωση συνήθως χρησιμοποιείται το τεστ χ^2 κατά Fisher

Προσαρμογής

- η παρατηρούμενη σ.κ. μιας μεταβλητής συμπίπτει με κάποια εκ των γνωστών θεωρητικών κατανομών (π.χ. Poisson, Ομοιόμορφη, Κανονική). Σ' αυτήν την περίπτωση συνήθως χρησιμοποιείται το Kolmogorov-Smirnov test.

- οι παρατηρούμενες συχνότητες των κατηγοριών μιας διχοτομικής μεταβλητής απέχουν πολύ από τις αντίστοιχες θεωρητικές/αναμενόμενες συχνότητες της διωνυμικής κατανομής με δοσμένη πιθανότητα επιτυχίας. Σ' αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιείται το Διωνυμικό test (Binomial Test).

- οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής είναι τυχαίες. Συνήθως σ' αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιείται το test των ροών (Run's test).

Όλοι αυτοί οι έλεγχοι υποθέσεων είναι μη-παραμετρικοί. Εκτός από τα tests, υπάρχουν και γραφικές τεχνικές αναζήτησης της κατανομής μιας μεταβλητής που βασίζονται στα πιθανοθεωρητικά γραφήματα P-P, Q-Q.

(proportion) (quantile
-proportion) (-quantile)

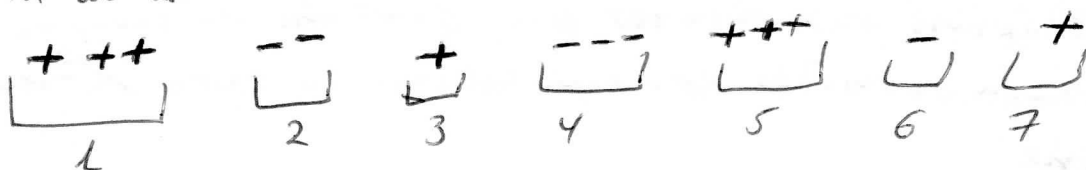
α. Έλεγχος τυχαιότητας δείγματος

Για να έχουμε αξιόπιστα στατιστικά συμπεράσματα θα πρέπει το δείγμα μας να είναι τυχαίο. Αντί των τυχαιότητας ενός δείγματος ελέγχει το κριτήριο των ροών. (Runs Test)

Κριτήριο ροών (Runs Test) (βλέπε βιβλίο Ξενοφάνης, Σελ. 520)

Ο ροή ορίζεται ως διαδοχή ομοίων συμβόλων της οποίας προηγούνται ή έπονται διαφορετικά σύμβολα.

π.χ η ακολουθία των συμβόλων $+, -$



εμφανίζει 7 ροές, 4 του συμβόλου $+$, 3 του $-$.

Ο υπολογισμός αριθμός των ροών σε ένα δείγμα σπουδαίοτε ο μεγάλος είναι ενδεικτικός της τυχαιότητας του δείγματος. Ένας μικρός αριθμός ροών αποτελεί ένδειξη ύπαρξης τάσης στους όρους της ακολουθίας παρατηρήσεων δηλαδή εξάρτησης των από τη (χρονική) σειρά καταγραφής τους, ή εξάρτησης άμεσης μορφής. Ένας πολύ μεγάλος αριθμός ροών είναι ενδεικτικός καίποιας μορφής συστηματικής μηδενικής επίδρασης στις τιμές των όρων της ακολουθίας.

Έστω n στοιχεία κάθε ένα από τα οποία ανήκει σε ένα είδος

$n_1 = \# \text{στοιχείων τύπου 1}, n_2 = \# \text{στοιχείων τύπου 2}.$
Ελέγχουμε:

H_0 : Τα δύο είδη συμβόλων εμφανίζονται με τυχαία σειρά

H_1 : Η σειρά εμφάνισης των συμβόλων δεν είναι τυχαία

Η κατάλληλη ελεγχχοσυνάρτηση είναι η σ.σ.

$$T = \# \text{ροών}$$

Οι πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές τιμές της T αποτελούν ένδειξη έλλειψης τυχαιότητας.

α : $T \leq W_{\alpha/2}$ ή $T \geq 1 - W_{\alpha/2}$ W_p : ποσοστό υπερύ της T

Τιμές της W δίνονται από πίνακες στατιστικών τιμών n_1, n_2 για μονόπλευρους και αμφίπλευρους ελέγχους. ($\alpha = 0.05, \alpha = 0.025$)

Αν H_1 : μικρό αριθμό ροών H_0 αν $T \leq W_{\alpha}$ σε σ.σ. α
 αν H_1 : μεγάλο αριθμό ροών H_0 αν $T \geq 1 - W_{\alpha}$

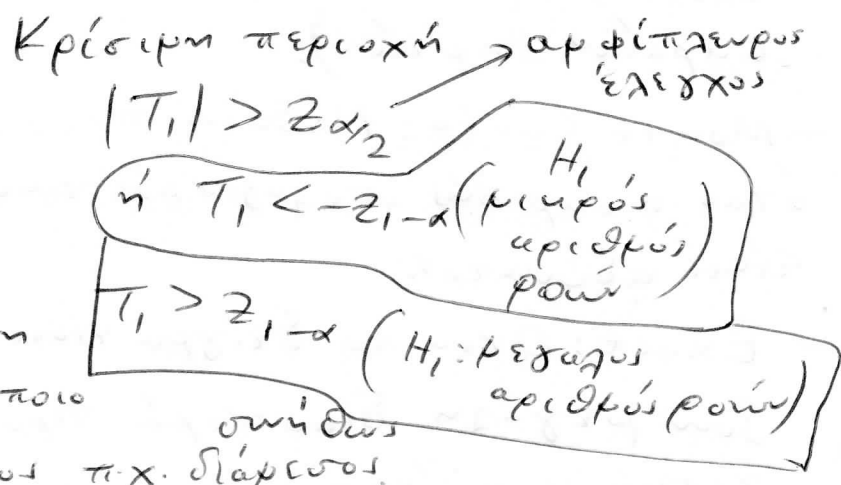
(ΒΛΕΠΕ ΠΙΝΑΚΑ 25 ΒΙΒΛΙΟ ΞΕΚΑΛΑΚΗ ΣΕΛ. 204)

Για $n_1 > 20, n_2 > 20$ T προσέγγιση $N(\mu = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1,$
 Μεγάλα δείγματα $\sigma^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}$

Ελεγχχοσυνάρτηση

$$T_1 = \frac{T - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Για $+$, $-$ γίνεται σύγκριση κάθε παρατήρησης με κάποιο μέτρο θέσης των δειγμάτων π.χ. διάμεσος.



Πως γίνεται το Runs Test με το SPSS?!

- Analyze $\rightarrow$ Non-Parametric Tests $\rightarrow$ Runs
- Διαλέγουμε τη μεταβλητή (ή τις μεταβλητές) της οποίας θα ελέγχσουμε την τυχαιότητα και τις μετακινούμε στο Παράθυρο Test Variable List.
- Ορίσουμε το στατιστικό μέτρο που θα διχοτομήσει τις τιμές της μεταβλητής (Cut point). By default, αυτό είναι η διάμεσος (median). Μπορούμε επιπλέον να ορίσουμε και άλλα

-4-

μέτρα θέως όπως τον δείχρατικό μέτρο, την επιπαρατοούση τμή ή να ορίσουμε κάποιον ποσοστιαίο σπείν (Custom). Για ναθε τέτοιο μέτρο θα παραχαραπούν θεί και ένας διαφωρε-
τικός έλεγχος.

Με την επιλογή Options καθορίζουμε κάποιον βασικό περιγρα-
φικό στατιστικό μέτρο (Descriptive, Quantiles)

Με την επιλογή Exact ορίζουμε την μέθοδο υπολογισμού
τον επιπέδου σημαντικότητας για τον έλεγχο των Jητάρε.

- Asymptotic only: Ο υπολογισμός τον επιπέδου σημαντικότητας
για το test που παραχαραποείται βασίζεται στην
ασυμπτωτική κατανόρη της στατιστικής συνάρτησης.

Συνιστάται όταν η μεθόδο και οι τιμές των δείχρων
έχουν μεγάλη διασπορά (δεν περιέχουν μεθόδο πλήθος
αυθαίων σπείν).

- Monte Carlo: Μέθοδος προσομοίωσης των επιλέχων
όταν ο αυθαίς υπολογισμός των πιθανοτήτων (exact)
είναι αδύνατος.

- Exact: Όταν το δείχρα είναι μικρό ή οι τιμές παρουσια-
ζουν μεγάλη διασπορά προτιμάται ο αυθαίς υπολο-
γισμός των Jητώρεων πιθανοτήτων

Ανάλυση Output

IPSOS: $\hat{\alpha} = 0,391$, BAROS: 0,153
HΛIKIA: 0,568

Εμφανίζει output για τους αντίπαρους ελέγχους μόνο.

Για $\alpha = 0.05$ από τα p-value προκύπτει ότι τα δείχρατα
είναι τυχαία και για mean, median (διάμεσος)
και για (μέση τιμή)

Για $\alpha = 0.05$ δεν απορρ. η H_0 .

Έλεγχος καλής προσομοίωσης χ^2 : Ελέγχουμε αν οι παρατη-
ρούμενες συχνότητες των κατηγοριών (ή κλάσεων) βρίσκονται
στην απόσταση πολύ από τις αντίστοιχες θεωρητικές
(αναμενόμενες) συχνότητες. (ΒΛΕΠΕ ΞΕΥΑΛΑΚΗ, σελ. 390)

Ο έλεγχος χ^2 προτάθηκε από τον Pearson (1900). Χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις προβαλημάτων στις οποίες τα δεδομένα προέρχονται από μία ορισμένη κατανομή. Ελέγχουμε:

$$H_0: f_X(x) = f_0(x) \text{ , όπως } f_X(x) \text{ η σ.κ. της τ.μ. } X.$$

$$H_1: f_X(x) \neq f_0(x)$$

Τα δεδομένα είναι τ.δ. μεθόδους ή παρατηρήσεων ταξινομημένων σε η ιδιάσει ούφωνα με των πίναν

ιγιάση i	1	2	3	...	n	σίηλο
O_i	O_1	O_2	O_3		O_n	$\sum_{i=1}^n O_i = n'$

O_i : # παρατηρήσεων στην i-οστή κατηγορία

π.χ. X : 1 3 1 5 1 0 4 3 6 2 7 5 0 3

	0	1	2	3	4	5	6	7
υγιάση (i)								
Συχνότητα (O _i)	2	3	1	3	2	1	1	1

	1	2	3
υγιάση (i)			
$X_i \leq 1$			
$2 \leq X_i \leq 5$			
$X_i \geq 6$			
Συχνότητα (O _i)	5	7	2

Η επιλογή αυτή
ανήκει
στην
ερευνά μας

Η επιλογή ανήκει στην έρευνά

p_i^0 : πιθανότητα μία τυχαία παρατήρηση πάνω στην X να ανήκει στην κατηγορία i κάτω από την H_0 ότι $f_0(x)$ είναι η σ.κ. της X .

$$p_i^0 = P(n \text{ παρατηρήσεις } X_j \in \text{κατηγορία } i \mid H_0) \quad \forall i, j$$

Τότε ο αναμενόμενος αριθμός των παρατηρήσεων στην κατηγορία i όταν H_0 αληθεύει είναι $E_i = n' p_i^0$

στ.σ. έλεγχου $T = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$

$n := \# \text{ ιγιάσεων}$ $T \sim \chi_{n-1}^2$ $H_0 \text{ αν } T > \chi_{n-1; 1-\alpha}^2$

-6-

όπως $\chi^2_{n-1; 1-\alpha}$ συμβολίζει το $(1-\alpha)$ -ποσοστιαίο σημείο της χ^2_{n-1} . Η $F_0(x)$ μπορεί να υποδιρίζει μία συγκεκριμένη κατανομή, μπορεί και όχι π.χ. $H_0: f_X(x) = F_{\text{Poisson}(3)}(x)$
ή $H_0: f_X(x) = F_{N(3,5)}(x)$

ή $H_0: f_X(x) = F_{\text{Poisson}(x)}(x)$ οπότε η $F_0(x)$ υποδιρίζει
 $H_0: f_X(x) = F_{N(\mu, \sigma^2)}(x)$ μία ομογενή κατανομή
Τότε $T \sim \chi^2_{n-k-1}$, όπου $k := \#$ επιζωήσεων παραμέτρων.

Παρατήρηση: Αν κάποιες E_i μικρές η χ^2 όχι ικανοποιητική, Cochran (1952): καμία από τις E_i δεν πρέπει να είναι μικρότερη της μονάδας και το ποσοστό των E_i που δεν υπερβαίνουν το 5 δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο του 20%.

Yarnold (1970): αν έχουμε περισσότερες από 2 κλάσεις, το ποσοστό των E_i που μπορούν να είναι μικρότερες του 5 μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερο. Αν $n > 2$ τότε l από τις E_i μπορούν να είναι μικρότερες του 5, αν $l > \frac{5l}{n}$

Πρακτικά, όταν υπάρχουν πολλές κλάσεις με $E_i < 5$, επανακαθορίζονται οι κλάσεις με την συνένωση αρχικών κλάσεων ώστε να οδηγηθούν σε ανεπάρκεις συχνότητες $E_i \geq 5$.

Παράδειγμα Τυχαίο δείγμα 52 παρατηρήσεων πάνω στη ζήτηση X για ένα προϊόν (σε αριθμό μονάδων που παραγγέλλονται) ταξινομημένων σε κλάσεις

Κλάση i	≤ 1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
Συχνότητα O_i	4	9	11	7	8	9	1	3

ΕΛΕΓΧΟΣ

-7-

$$H_0: F_X(x) = F_{\text{Poisson}(\lambda)}(x)$$

$$H_1: F_X(x) \neq F_{\text{Poisson}(\lambda)}(x) \quad \forall x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\alpha = 0.05$$

ΠΙΝΑΚΑΣ

υπόψη i	X_i	O_i	P_i^0	$E_i = n' P_i^0$
1	≤ 1	4	0.0916	4.763
2	2	9	0.1465	7.618
3	3	11	0.1954	10.161
4	4	7	0.1954	10.161
5	5	8	0.1563	8.128
6	6	9	0.1042	5.418
7	7	1	0.0595	3.094
8	≥ 8	3	0.0511	2.657

$$n = \sum_{i=1}^8 O_i = 52$$

O_i 8 υπόψεις του πίνακα επιλέχθηκαν αυθαίρετα.

$$P_1^0 = P(X_i \leq 1 | H_0) = P(X_{\text{Poisson}(\lambda)} \leq 1)$$

$$P_i^0 = P(X_i = i | H_0) = P(X_{\text{Poisson}(\lambda)} = i)$$

$i = 2, 3, \dots, 7$

$$P_8^0 = P(X_i \geq 8 | H_0) = 1 - P(X_{\text{Poisson}(\lambda)} \leq 7)$$

X_i τυχαία παρατήρηση του δείγματος

$$\hat{\lambda} = \bar{X}, \quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n'}$$

$$\hat{\lambda} = \bar{X}_g, \quad \bar{X}_g = \frac{\sum_{i=1}^m m_i O_i}{\sum_{i=1}^m O_i} =$$

$$\bar{X} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3}{52}$$

$$= 4$$

$$= 4$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^m m_i O_i}{n'}$$

m_i : υείρη υπόσεων $i = 1, \dots, m$

$$P(X_{\text{Poisson}(4)} = x) = e^{-4} \frac{4^x}{x!}$$

-8-

$$n=8, k=1 \quad T = \sum_{i=1}^8 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi_{8-1-1}^2 \equiv \chi_6^2$$

$$T > \chi_{6;0.95}^2 \equiv 12.59 \quad (\text{Κρίσιμη περιοχή } H_0) \\ \alpha = 0.05$$

$\tau = 5.256$ δεν ανήκει στην κρίσιμη περιοχή σε $\alpha = 5\%$
 Δεν παρέχουν τα δεδομένα ενδείξεις ότι η κατανομή
 της βήματος διαφέρει από την κατανομή Poisson.

$$\hat{\alpha} = P(T \geq 5.256 | H_0) = 1 - P(T < 5.256 | H_0) = 1 - P(\chi_6^2 < 5.256) \\ = 0.5055$$

Παρατήρηση Δύο από τις 8 υγιείς (ποσοστό 25%) έχουν
 $E_i \leq 5$. Είναι αποδεκτό κατά Yarnold αφού αυτές οι συχνό-
 τες δεν είναι μικρότερες του $\frac{5E}{n} = \frac{5 \cdot 2}{8} = 1.25$

Αν αποδεχόμαστε την άποψη των Cochran, θα πρέπει να επα-
 να καθορίσουμε τα όρια των υγιέων ενώπιος τις δύο τελευ-
 τικές υγιείς. Αυτό θα μας οδηγήσει σε 7 υγιείς με την
 τελευταία να ανεφεραται σε ≥ 7 με συχνότητα $3+1=4$.
 και αναμενόμενη συχνότητα $3.094 + 2.657 = 5.751$. Τότε

$$T = \sum_{i=1}^7 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi_{7-1-1}^2 \equiv \chi_5^2$$

$$T > \chi_{5;0.95}^2 \equiv 11.071, \quad \tau = 4.328$$

$$\hat{\alpha} = P(T \geq 4.328 | H_0) = 1 - P(\chi_5^2 < 4.328) \\ = 0.5034.$$

- Δημιουργούμε την μεταβλητή d και καταχωρίζουμε τις παρατηρήσεις του δείγματος με βάση ποικίλουν δηλ. δίνουμε 4 φορές την τιμή 1, 9 φορές την τιμή 2 και συνεχίζουμε με όποιο τρόπο για όλες τις υλάνσεις.

- Δημιουργούμε μία μεταβλητή y η οποία ως τιμές περιέχει τα άνω όρια όλων των υλάνσεων εντός από την τελευταία. Στο παράδειγμά μας, όλες οι υλάνσεις εντός της πρώτης και της τελευταίας, αποτελούνται από μία μόνο τιμή (το άνω όριο τους). Υπολογίζουμε την τιμή της αθροιστικής σ.κ.

$f_0(x)$ στα σημεία της y . Για να υπολογίσουμε τις τιμές της

$f_0(y)$ επιλέγουμε Transform $\rightarrow$ Compute Variable $\rightarrow$

$\rightarrow$ Numeric Expression (CDF.POISSON($y, 4$))

$$p_i = p \text{ για } i=1 \quad p_i = p(i) - p(i-1), i=2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$p_i = 1 - \sum_{i=1}^7 p_i, i=8$$

Test Variable (d)

χ^2 : Analyze $\rightarrow$ Non-Parametric Tests $\rightarrow$ Chi-Square

Get from data: Το πρόγραμμα θεωρεί ότι οι κωδικές των υλάνσεων μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε **ακέραια** τιμή μεταξύ της μικρότερης και της μεγαλύτερης από τις τιμές της d . Αν υπήρχαν και άλλες υλάνσεις που δεν φαίνονταν στην d θα επιλέγαμε Use specified range και θα δίνουμε το εύρος τιμών των κωδικών. Το πρόγραμμα τότε θα γυρίζει ότι υπάρχουν κι άλλες υλάνσεις με παρατηρούμενη συχνότητα μηδέν.

Expected values: Δηλώνουμε την θεωρητική πιθανότητα κάθε υλάνης κάτω από την H_0 . Εκφράζουμε τις πιθανότητες τους ως υλάνσεις ανεξάρτητων με τον ίδιο παρονομαστή τα οποία αθροίζονται στην μονάδα.

Πρέπει να έχουμε τόσα κλάσματα όσες και οι κλάσεις.
Στο παράδειγμά μας δίνουμε: 916, 1465, 1954, 1953,
1563, 1042, 596, 511 (Συν. τις τιμές $PL \times 10000$ για να
γίνω αμέτρητοι). Values $\rightarrow$ Add $\rightarrow$ ok.

Frequencies $\rightarrow$ O_i, E_i για κάθε κλάση

$T = 5.258$ (Chi-Square του πίνακα Test Statistics)
df, Asymp. Sig. (όλες οι παράμετροι της F_0 είναι γνωστές)

$$\lambda = 1 - P(T < 5.258 | H_0) = P(T > 5.258)$$

χ^2_6

(δεν απορρ. η H_0) $\rightarrow$ τα δεδομένα προέρχονται από $Poisson(4)$

Παρατήρηση 37.5% των κλάσεων έχουν ανεπάρκεια συχνότητα

Η κριτική του S. Μπορεί να συνεκφέρει την έβδομη με
την όγδοη κλάση αντικαθιστώντας την μεταβλητή X αντικαθιστούμε τον κωδικό 8 με τον κωδικό 7 έχουμε 7 κλάσεις

Από το Expected Value διαγράφουμε την τιμή 511 και
αντικαθιστούμε την τιμή 596 (με την $1107 = 596 + 511$)
πιθανότητα της νέας έβδομης κλάσης.

Έλεγχος προσρμογής με το κριτήριο Kolmogorov-Smirnov

Ελέγχουμε αν η παρατηρούμενη συνάρτηση αθροιστικής
κατανομής μιας μεταβλητής συμπίπτει με κάποια εκ των
θεωρητικών κατανομών (π.χ. κανονική, ομοιομορφία,
Poisson.) (βλ. Π.Ε. ΞΕΥΛΑΚΗ, Σελ. 422)

Παράδειγμα Ας υποθέσουμε ότι οι αποστάσεις του σπρέι

Θραύσης 20 νημάτων είναι:

0.6	0.8	1.1	1.2	1.4	1.7	1.8	1.9	2.2	2.4
2.5	2.8	3.1	3.4	3.9	4.4	4.9	5.2	5.9	

Ελέγχουμε αν H_0 : η απόσταση των σπείρων Οράδων από το στερεωμένο σπείρο κατανέμεται ομοιόμορφα στο $(0,6)$

Προσδιορίζουμε την καίρια αυτή συνάρτηση $S'(x)$

$S'(x)$	$\forall x$		
0	$x < 0.6$	0.5	$2.4 \leq x < 2.5$
0.05	$0.6 \leq x < 0.8$	0.55	$2.5 \leq x < 2.9$
0.1	$0.8 \leq x < 1.1$	0.6	$2.9 \leq x < 3.1$
0.15	$1.1 \leq x < 1.2$	0.65	$3.1 \leq x < 3.4$
0.2	$1.2 \leq x < 1.4$	0.75	$3.4 \leq x < 3.5$
0.25	$1.4 \leq x < 1.7$	0.8	$3.9 \leq x < 4.4$
0.3	$1.7 \leq x < 1.8$	0.85	$4.4 \leq x < 4.9$
0.35	$1.8 \leq x < 1.9$	0.9	$4.9 \leq x < 5.2$
0.4	$1.9 \leq x < 2.2$	0.95	$5.2 \leq x < 5.9$
0.45	$2.2 \leq x < 2.4$	1	$5.9 \leq x < \infty$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/6, & 0 \leq x < 6 \\ 1, & 6 \leq x < \infty \end{cases}$$

Η μέγιστη κατά απόσταση της απόστασης της $S'(x)$ από την $F(x)$ είναι 0.18 και παρατηρείται στο σπείρο $x=3.4$

Πως γίνεται ο έλεγχος με το SPSS?

X : Απόσταση σπείρων Οράδων καταχωρίζουμε το δείγμα

Transform $\rightarrow$ Rank Cases (υπολογίζουμε την εμπειρική συνάρτηση του δείγματος)

Rank Types $\rightarrow$ Fractional Ranks (για την τάξη μετέδω)

Ties (Rank Assigned to Ties, High)

Syntax Window $\rightarrow$ npar tests $K-S$ (uniform, 0,6) =

$$T=0.183 \text{ (ασυμπτωτική)} \quad \hat{\lambda}_{\text{EXACT}}=0.458 \text{ (Rank)} \quad \text{δεν απορρ. } H_0 \quad \forall \alpha$$

$\hat{\lambda} \geq 0.512$ (δεν απορρ. H_0) $\forall \alpha$ Η τιμή που τεσσάρων

δραστή των πίνακα είναι ασυμπτωτική (δεν έχει έννοια) (το δείγμα είναι μικρό).

Ο έλεγχος K-S συχνά προτιμάται από τον χ^2 όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό, είναι αμφοτερόπλευρος και για μικρά δείγματα.

Διωνυμικός Έλεγχος (Binomial Test)!

Εξετάζει αν οι παρατηρούμενες συχνότητες των κατηγοριών μιας διχοτομικής μεταβλητής απέχουν πολύ από τις αντίστοιχες θεωρητικές/αναμενόμενες συχνότητες μιας διωνυμικής κατανομής με δοσμένη πιθανότητα επιτυχίας

Ελέγχουμε $H_0: p = p_0$
 $H_1: p \neq p_0$

Δείγμα n ανεξάρτητων δοκιμών $\rightarrow$ επιτυχία 1
 $\rightarrow$ αποτυχία 0

στ. συνάρτηση ελέγχου $T := \# \text{επιτυχιών στις } n \text{ ανεξάρτητες δοκιμές}$

$$T = \sum_{i=1}^n X_i, \quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η } i\text{-οστή δοκιμή οδηγεί σε επιτυχία} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$\sim \text{bin}(n, p)$

Παράδειγμα 5 από τους 13 θανάτους εργατών που βόλταν κοντά σε ένα εργοστάσιο πυρηνικής ενέργειας ήταν το αποτέλεσμα καρμίνου. Με βάση αυτό το δεδομένο μπορεί να υποστηριχθεί ο ισχυρισμός ότι 25% των θανάτων που συνέβησαν την χρονιά αυτή σε εργάτες που βόλταν κοντά σε εργοστάσια πυρηνικής ενέργειας μπορούν να θεωρηθούν ως αποτέλεσμα καρμίνου; ($\alpha = 0.05$)

Λύση Θεωρούμε τις τ.μ. $X_1, \dots, X_{13}$, όπου
 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } i\text{-οστός θάνατος οφείλεται σε καρμίνι} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 13$

$$H_0: p = 0.25 \quad \text{Δουκός: Θάνατος}$$

$$H_1: p \neq 0.25 \quad \text{Επιτυχία: Θάνατος που οφείλεται σε καρμικό}$$

-13-

$$T := \# \text{επιτυχιών στις 13 δοκιμές} \Rightarrow T = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^{13} X_i$$

$$T \sim \text{Bin}(13, p = P(X_i = 1)) \Rightarrow T \stackrel{H_0}{\sim} \text{Bin}(13, p = 0.25)$$

H_0 σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$ αν $T \leq t_1$ ή $T \geq t_2$ όπου

$$P(T \leq t_1 | n=13, p=0.25) = \alpha_1 \approx 0.025$$

$$P(T \geq t_2 | n=13, p=0.25) = \alpha_2 \approx 0.025 \quad \text{ή}$$

$$P(T \leq t_2 | n=13, p=0.25) = 1 - \alpha_2 \approx 0.975$$

Από πίνακες της διωνυμικής

$$P(T \leq 0 | n=13, p=0.25) = 0.0238 \approx 0.025$$

$$P(T \leq 6 | n=13, p=0.25) = 0.9757 \approx 0.975$$

$$\text{Αν } \alpha_1 = 0.0238, \alpha_2 = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha_2 = 0.9757 \text{ άρα}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0.0238 + (1 - 0.9757) = 0.0238 + 0.0243 = 0.0481 \approx 0.05$$

0,6 : κρίσιμη τιμή του ελέγχου μελέθου $\alpha_1 + \alpha_2 = 0.0481$.

σημ. $t_1 = 0$ και $t_2 = 6$. Η H_0 σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.0481$ αν $T \leq 0$ ή $T \geq 6$, $\tau = 5$ δεν απορρ. η H_0 τα δεδομένα δεν συνηγορούν υπέρ της απόρριψης του ισχυρισμού.

$$\frac{\alpha}{2} = P(T \geq 5 = \tau | n=13, p=0.25) = 1 - P(T \leq 4 | n=13, p=0.25) = 1 - 0.7940 = 0.206$$

$$\hat{\alpha} = 2 \cdot 0.206 = 0.412 \Rightarrow H_0 \text{ σε ε.σ.σ. } \alpha \text{ αν } \underline{\alpha \geq 0.412}$$

Λύση με το SPSS: $X: 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$

Analyze $\rightarrow$ Nonparametric Tests $\rightarrow$ Binomial

$x \rightarrow$ Test Variable List $\rightarrow$ Define Dichotomy
• Get from data

- 14

Test Proportion: $0.25 = p_0$

- Exact < Asymptotic only

Exact (Μικρό δείγμα: επιβεβαιώνει

Time Limit per test Exact

p-value δεν απαιτεί πολύ

χρόνο υπολογισμού

Συμπέρασμα: Αναλογα με την τιμή Obs. Proportion αν είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη του p_0 (Test Proportion) το SPSS εμφανίζει το κρίσιμο επίπεδο για τον αντίστοιχο μονό-πλευρό έλεγχο.

Point Probability $n=13$

Για αμφίπλευρο

$$\hat{\alpha} = 2 \cdot (0.206) = 0.412$$

$$P(X=x) = \binom{13}{5} (0.25)^5 (0.75)^{13-5}$$

$$H_0: p \leq 0.25$$

$$H_1: p > 0.25$$

$$0.38$$

Υπολογίζει

$$\hat{\alpha} = p\text{-value} = P(T \geq t=5 | n=13, p=0.25) = 1 - P(T \leq 4 | n=13, p=0.25)$$

$$0.126$$

Δεν απωρ.

in H_0 .

Έλεγχος υποθέσεων για την μέση τιμή (t-test) $= 1 - 0.7940 = 0.206$

Ελέγχουμε $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$

Εάν το δείγμα προέρχεται από πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$ ανεξάρτητα

του μεγέθους του δείγματος ισχύει $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ή αν η

ίδια σχέση ισχύει λόγω του ΚΟΘ και στην περίπτωση

που το δείγμα προέρχεται από κανονικό πληθυσμό

και είναι μεγάλος δηλ. $n \geq 30$.

στ. συνάρτηση ελέγχου: $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ή $\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$

Μονόπλευρο test

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{ή} \quad H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0 \quad \text{ή} \quad H_1: \mu < \mu_0$$

Αμφίπλευρο Test

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

-25-

$$R = \{z > z_\alpha\} \quad R = \{z < -z_\alpha\} \quad R = \{|z| > z_{\alpha/2}\}$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Αν το δείγμα είναι μικρό και η διασπορά του πληθυσμού άγνωστη και το δείγμα προέρχεται από κανονικό πληθυσμό, τότε

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Μονόπλευρο test

Δίπλευρο test

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0 \quad \text{ή} \quad H_1: \mu < \mu_0$$

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$R = \{t > t_{n-1; \alpha}\} \quad R = \{|t| > t_{n-1; \alpha/2}\}$$

$$\text{ή} \quad R = \{t < -t_{n-1; \alpha}\}$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad (t\text{-test})$$

Παράδειγμα με το SPSS Σε τ.δ. από 15 χάπια μετρήσαμε την περιεκτικότητα X σε ορισμένη δραστική ουσία και πήραμε τα ακόλουθα αποτελέσματα σε mgr: 8.4, 8.5, 8.5, 8.7, 8.7, 8.8, 8.8, 9.0, 9.0, 9.2, 9.4, 9.5, 9.8, 9.8, 10. Αν η κατανομή της X μπορεί να υποθεθεί κανονική, να ελεγχθεί η υπόθεση ότι η μέση τιμή της είναι ίση με 10 σε ε.δ.δ. $\alpha = 0.05$.

Λύση Υποθέτουμε ότι η κατανομή του πληθυσμού είναι κανονική και η διασπορά του πληθυσμού είναι άγνωστη.

$H_0: \mu = 10$ Ο έλεγχος θα γίνει με το κριτήριο t.

$H_1: \mu \neq 10$ Για $\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025, n = 15$
 $n - 1 = 14$

-16-

$$t_{14;0.025} = 2.145 \text{ (από πίνακα της } t_{14})$$

$$\text{'Αρα } |t| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s/\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{15} (136.3) = 9.0866$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{15} x_i^2 - \left(\frac{n}{n-1} \right) \bar{x}^2 = 0.27825$$

$$\Rightarrow s = 0.5275$$

$$|t| = \frac{|9.0866 - 10|}{0.5275/\sqrt{15}} = 6.706 > t_{14;0.025} = 2.145$$

Υπάρχουν ενδείξεις απόρριψης της H_0 υπέρ της H_1 .

Ανάλυση Output από το SPSS

One-Sample Statistics

$$\bar{x} = \text{Mean} \quad \text{Std. Deviation} = s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow 5$$

$$\boxed{SE_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

One-Sample Test

Καρι: Διάστημα έσθετο

$$t = -6.722 \text{ (τιμή στατιστικής)}$$

$$df = n - 1 = 14$$

Mean Difference

$$\hat{\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > \hat{\alpha} \text{ απέρρ. της } H_0 \quad \bar{x} - 10 = 9.087 - 10$$

φαινεται και από το διάστημα εμπιστοσύνης 95% = -0.9133

$$(-1.205, -0.622) \quad (8.795, 9.378) \text{ δεν περιέχει}$$

το 10.

$$\text{για τη διαφορά } \mu - 10 < -0.622$$
$$-1.205 <$$

Έλεγχος υποθέσεων για τη διαίρεση (Sign Test)

ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ: Μη-παραμετρικές τεχνικές ή ελεύθερες κατανομών

Πλεονέκτημα: Δεν προϋποθέτουν γνώση της μορφής της κατανομής του πληθυσμού από τον οποίο έχω προέλθει τα υπερέχον στοιχεία. Μπορώ να εφαρμόσώ τις τάξεις μεθόδους των μεταβλητών και όχι μόνο στις τιμές τους. Πέρα από την απλότητα των υπολογισμών που απαιτούν χρησιμοποιούνται στην περίπτωση μικρών δείγματος. Χρησιμοποιούνται ανεξάρτητα από την κατανομή των δεδομένων. Δεν είναι το ίδιο ισχυροί με τους παραμετρικούς έλεγχους. Μπορώ να εφαρμόσω σε κατανομικά δεδομένα ενώ οι παραμετρικές τεχνικές προϋποθέτουν αυριβείς μετρήσεις. Οι μη-παραμετρικές μέθοδοι μπορώ να θεωρηθούν ως προπαρασκευαστικές για τις παραμετρικές μεθόδους.

SPSS: Statistical Package for the Social Sciences.

Προσνηκός Έλεγχος χρησιμοποιείται κυρίως για τον έλεγχο της υποθέσεως ότι οι τιμές μιας από τις τ.ρ. του ζεύγους (X,Y) τείνουν να είναι μεγαλύτερες από τις τιμές της άλλης. Χρησιμοποιείται επίσης για τον έλεγχο ύπαρξης τάσης σε μετρήσεις με διάταξη και ως έλεγχος ύπαρξης συσχέτισης ή αλλαγής μιας κατάστασης (Έλεγχος McNemar)

Δεδομένα: n' παρατηρήσεις σε διδιάστατο τ.δ.

$(X_1, Y_1), \dots, (X_{n'}, Y_{n'})$ με X_i, Y_i να

έχουν κάποια είδος εξάρτησης.

"+" $X_i < Y_i$ "-" $X_i > Y_i$ "0" (tied pair) $X_i = Y_i$
 $i = 1, \dots, n'$

$T = \# "+" \text{ ζευγών}$ $n = \# "+" + \# "-"$

$T \sim \text{Bin}(n, p = I(+))$

Παράδειγμα Έξι άτομα υποβλήθηκαν σε μία δίαιτα για να χάσουν βάρος. Τα βάρη των ανδρών πριν (X_i) και μετά (Y_i) την δίαιτα $i=1,2,\dots,6$ είναι:

X_i :	174	191	189	182	201	189
Y_i :	165	186	183	178	203	181
		-	-	-	+	-

Πρόσκληση (X_i, Y_i) -
Παρέχουν τα δεδομένα εσωχρές ενδείξεις ότι η δίαιτα
ήταν αποτελεσματική;

Λύση Αν "+": $X < Y$

$$H_0: P(+) \geq P(-) \quad T \sim_{H_0} \text{bin}(n=6, p=P(+)=1/2)$$

$$H_1: P(+) < P(-)$$

$$n'=n=6 \quad \hat{\alpha}=10.94\%$$

η H_0 απορρ. σε κάθε $\alpha \geq 0.1094$

Με το SPSS Analyze $\rightarrow$ Non-parametric Tests
 $\rightarrow$ 2 Related Samples

Sign (Exact λόγω μικρού δείγματος)

Test statistics p-value $\hat{\alpha}=0.109$

Για $\alpha=0.05$ δεν απορρ. η H_0 η δίαιτα δεν φαίνεται να είναι αποτελεσματική.

Έλεγχος McNemar για την Σημαντικότητα Αλλαγής πίας
Κατάστασης (McNemar Test for Significance of Changes)

ή ανεξ. διδύματα π. (X_i, Y_i), $i=1, \dots, n'$

Κατηγορικές Μεταβλητές $\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$

$(X_i, Y_i) \in \begin{matrix} (0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1) \end{matrix}$

		0	1
X	0	(0,0)	(0,1)
	1	(1,0)	(1,1)

$$H_0: P(X=0, Y=1) = P(X=1, Y=0)$$

$$H_1: P(X=0, Y=1) \neq P(X=1, Y=0)$$

Ερώτηση: X_i κατάσταση i-χρονόσας πληθυσμώ πριν από κάποιο πείραμα

Y_i κατάσταση μετά το πείραμα

$$n = (0,1) + (1,0)$$

$$(0,1) \quad X < Y = "+"$$

$$(1,0) \quad X > Y = "-"$$

$$T := \# \text{ επιτυχιών}$$

$$\sim \text{Bin}(n, p = 1/2)$$

Ελέγχουμε: $H_0: P(+) = P(-)$

$$H_1: P(+) \neq P(-)$$

Παράδειγμα Από 135 άτομα που επιλέχτηκαν τυχαία ζητήθηκε να εκφράσουν γνώμη για την εξωτερική πολιτική της χώρας τους. 43 άτομα ήταν εναντίον της αμερικανόφρωνς εξ. πολιτικής. Μετά από κάποιο διάστημα τα άτομα επερωτήθηκαν ξανά 37 άτομα ήταν εναντίον της αμερικανόφρωνς εξ. πολιτικής από τα οποία 30 ήταν άτομα που αρχικά ήταν υπέρ. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η μεταβολή στον αριθμό των ατόμων που ήταν εναντίον της αμερικανόφρωνς εξ. πολιτικής της χώρας τους είναι σημαντική;

Λύση X, Y : γνώμη ατόμων την πρώτη και τη δεύτερη φορά που ρωτήθηκαν αντίστοιχα

0: αρνητική γνώμη

1: θετική γνώμη

$$n = 36 + 30 = 66$$

		Y		
		0	1	
X	0	7	36(+)	43
	1	30(-)	62	92
		37	98	135

-20-

$$H_0: P(0,1) = 1/2 \quad T = \#(0,1) \text{ βεβαιώσεων}$$

αριθμός "4"

$$H_1: P(0,1) \neq 1/2 \quad T \stackrel{H_0}{\sim} \text{b.m.} (n=66, p=1/2)$$

$$n=66 > 20 \quad T \sim N(\mu = np = n/2, \sigma^2 = np(1-p) = n/4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} &\cong P(T \leq t | n, p=1/2) = P\left(\frac{T - n/2}{\sqrt{n/4}} < \frac{t - n/2}{\sqrt{n/4}}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{t - n/2}{\sqrt{n/4}}\right) \quad Z \sim N(0,1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{t - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/4}} = z_{\alpha/2} = z_{1-\alpha/2} \Rightarrow t = \frac{n}{2} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{n/4}$$

Για $\alpha = 0.1 \quad z_{1-\alpha/2} = z_{0.95} = 1.645$

αριθμική περιγραφή $\{T \leq t\} \cup \{T \geq n-t\}$

$$t = \frac{66}{2} - 1.645 \sqrt{\frac{66}{4}} \cong 26.32 \cong 27$$

Για $\alpha = 0.1 \quad T \leq 27 \text{ ή } T \geq 39$

$T=36$ Για $\alpha = 0.1$ η H_0 δεν απορρ. δηλ. η μεταβολή

στον αριθμό των απόρων που δεν ήταν εναντίον της απορρύθμιξης εξωτερικής πολιτικής δεν μπορεί να θεωρηθεί σημαντική σε επίπεδο $\alpha = 0.1$.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 2 P(T \geq 36 | n=66, p=1/2) = 2 P\left(Z \geq \frac{36-33}{\sqrt{\frac{66}{4}}}\right) \\ &= 2 (1 - P(Z < 0.74)) = 0.4592 \end{aligned}$$

$$p\text{-value} = 0.539 \quad \left(\begin{array}{l} \text{δεν χρησιμοποιεί} \\ \text{τη } N(0,1) \text{ αλλά τη } \chi^2 \\ \text{για τη σ.ε.σ. } \chi^2 \end{array} \right)$$
$$\chi^2 = \frac{(b-c)^2}{b+c} \sim \chi_1^2$$

Το αποτέλεσμα δεν αλλάζει και είναι ισχύος για τη ρητοποίηση της H_0 .

