Μάθημα: ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Διδάσκων: Θ. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΣ
Τμήμα Στατιστικής, Ο. Π. Α.

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ:

Μέχρι τώρα: Ασχοληθήκαμε με μεθόδους που οδηγούν σε εκτιμήτριες των τιμών μίας ή περισσότερων παραμέτρων.

Η εκτίμηση των άγνωστων σε μας τιμών των παραμέτρων έγινε με την κατασκευή κατάλληλων συναρτήσεων (των στατιστικών συναρτήσεων) ενός τυχαίου δείγματος. Για κάθε συγκεκριμένο τυχαίο δείγμα (τ. δ.) αυτές οι συναρτήσεις έδιναν μία μοναδική τιμή ως εκτίμηση μίας παραμέτρου ενός πληθυσμού.

Για παράδειγμα, η μέση τιμή δείγματος δίνει μία εκτίμηση της μέσης τιμής του πληθυσμού.

Χρησιμοποιώντας αυτές τις μεθόδους (π.χ. μέθοδος ροπών, μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας κλπ.)

κάνουμε μία σημειακή εκτίμηση της παραμέτρου (δηλ. κάνουμε εκτίμηση της παραμέτρου σε σημείο).

Σ' αυτό το σημείο ας υπενθυμίσουμε κάποιες βασικές έννοιες που χρησιμοποιήσαμε μέχρι τώρα στο κείμενο.

Οι παράμετροι εμφανίζονται ως άγνωστες σταθερές στις συναρτήσεις πυκνότητας (ή στις συναρτήσεις πιθανότητας) μιας συνεχούς (ή μιας διακριτής) τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X.

Η τ.μ. X περιγράφει ένα υπο-μελέτη χαρακτηριστικό ενός πληθυσμού.

Για παράδειγμα, αν X αναπαριστά το ύψος των ανδρών μιας πόλης για την οποία μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε το μέσο ύψος (δηλ. τη μέση τιμή του πληθυσμού των ανδρών της πόλης) και αν υποθέσουμε ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την παράμετρο μ.

Αν, $X \sim Bin(n, p)$ τότε $P\{X=x\} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$,
(Διωνυμική κατανομή) $x = 0, 1, \ldots, n$.

Το n είναι γνωστό και η προς εκτίμηση παράμετρος είναι η πιθανότητα ("επιτυχίας") p.

Στην πράξη γνωρίζουμε τη συναρτησιακή μορφή της $f_X(x)$ και οι παράμετροι των κατανομών μας είναι άγνωστοι. Έχουν μία σταθερή αλλά άγνωστη σε μας τιμή.

Οι παράμετροι περιγράφουν ένα υπό μελέτη χαρακτηριστικό ενός πληθυσμού

Για παράδειγμα, το ποσοστό του πληθυσμού που ψηφίζει ένα συγκεκριμένο κόμμα, τις βαθμολογίες των φοιτητών ενός έτους σε ένα συγκεκριμένο μάθημα κλπ.

Για την εκτίμηση: Συλλέγουμε κάποια αριθμητικά δεδομένα $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \geq 1$ τα οποία σχετίζονται με την ποσότητα που μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε. Αυτά τα δεδομένα αποτελούν παρατηρούμενες τιμές τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ από κάποια <u>από κοινού</u> κατανομή που εξαρτάται από μία άγνωστη παράμετρο θ.

Αν οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. λέμε ότι αποτελούν ένα <u>τ.δ.</u> (τυχαίο δείγμα) από αυτήν την κατανομή.

Μία συνάρτηση των δεδομένων που <u>δεν</u> εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο θ καλείται στατιστική συνάρτηση (σ.σ.). Μία σ.σ. $\delta = \delta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της παραμέτρου θ ή μίας συνάρτησής της $g(\theta)$ καλείται εκτιμητής (ή εκτιμήτρια) της $g(\theta)$ (ή του θ).

Η εκτίμηση της άγνωστης τιμής μίας παραμέτρου σε σημείο έχει βασικά μειονεκτήματα:

- Δεν παρέχει καμία πληροφορία για την ακρίβεια της εκτίμησης.
- Η εκτιμήτρια μίας παραμέτρου σε σημείο δηλ. η τιμή της για συγκεκριμένο τ.δ. (σίγουρα) θα διαφέρει από την πραγματική τιμή της παραμέτρου θ.
- Μία μέση τιμή δείγματος που βασίζεται σε 100 παρατηρήσεις θα έχει σίγουρα μεγαλύτερη ακρίβεια στην προς εκτίμηση άγνωστη τιμή μίας παραμέτρου σε σχέση με αυτήν που βασίζεται σε 5 παρατηρήσεις.

<u>Άρα,</u>
μπορούμε να βελτιώσουμε την "πληροφορία" που μας δίνει η σημειακή εκτίμηση με το να διαθέτουμε και το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης.

Για τους παραπάνω λόγους:

Είναι προτιμότερο να μιλάμε για ένα φάσμα πιθανών τιμών για την προς εκτίμηση άγνωστη τιμή της παραμέτρου παρά για μία και μόνη συγκεκριμένη τιμή.

Ο καθορισμός ενός φάσματος (διαστήματος) πιθανών τιμών για την προς εκτίμηση άγνωστη τιμή της παραμέτρου επιτυγχάνεται με την κατασκευή ενός <u>διαστήματος εμπιστοσύνης.</u>

Ένα διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) παρέχει μία ασφαλέστερη εκτίμηση (της άγνωστης τιμής) μίας παραμέτρου ενός πληθυσμού.

Η κατασκευή του βασίζεται σε ένα τ.δ. από αυτόν τον πληθυσμό και στην κατανομή της εκτιμήτριας της παραμέτρου δηλαδή της σ.σ. Γι'αυτό το λόγο ένα δ.ε. λαμβάνει υπόψη όλα τα δυνατά δείγματα που θα μπορούσαν να επιλεγούν.

Τα διαστήματα εμπιστοσύνης παρέχουν ένα φάσμα τιμών για την παράμετρο λαμβάνοντας υπόψη τη σημειακή εκτίμηση, το τυπικό σφάλμα και το βαθμό (συντελεστή) εμπιστοσύνης δηλ. την πιθανότητα το φάσμα τιμών να περιέχει την πραγματική (αληθινή) τιμή της παραμέτρου.

Ας δούμε πως ορίζεται το διάστημα εμπιστοσύνης.

<u>Ορισμός</u> Θεωρούμε τις σ.σ. $L(X_1,\dots X_n)$, $U(X_1,\dots,X_n)$ του τ.δ. $(X_1,X_2,\dots X_n)$ τ.ω. $L(X_1,\dots X_n)\leq U(X_1,\dots X_n)$. Έστω ένας αριθμός α τ.ω. $\alpha\in(0,1)$. Το τυχαίο διάστημα (δηλ. ένα διάστημα του οποίου τα άκρα είναι τ.μ.) $[L(X_1,\dots,X_n),\ U(X_1,\dots,X_n)]$ για το οποίο ισχύει:

$$P[L(X_1,\dots,X_n)\leq \Theta\leq U(X_1,\dots,X_n)]=1-\alpha \quad \forall\,\Theta\in\Theta$$

καλείται διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) για την παράμετρο Θ, με συντελεστή (ή βαθμό) εμπιστοσύνης $1-\alpha$.
Πιο απλά καλείται $(1-\alpha)\,100\%$ δ.ε.

Οι σ.σ. $L(X_1,\ldots,X_n)$ και $U(X_1,\ldots,X_n)$ είναι γνωστές ως κατώτερο και ανώτερο όριο εμπιστοσύνης, αντίστοιχα. Εξαρτώνται από τον συντελεστή (βαθμό) εμπιστοσύνης $1-\alpha$ και από την τιμή του τ.δ.

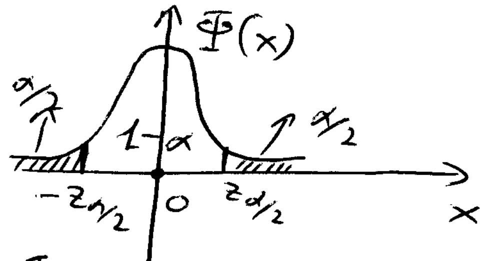
Ας δούμε ένα πρώτο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1

Υποθέτουμε ότι ένα μηχάνημα εμφιάλωσης ποτού γεμίζει τις φιάλες με ποσότητα X gr ποτού, όπου X είναι τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\sigma^2=5^2$ και μέση τιμή μ άγνωστη! Έστω $\mu=\theta$. Παίρνουμε ένα τ.δ. $n=25$ φιάλων που μας δίνει $\bar{x}=485$gr. Να βρεθεί ένα 95% δ.ε. για την άγνωστη τιμή της παραμέτρου θ.

Λύση Γνωρίζουμε ότι αν Z τ.μ. $\sim N(0,1)$ τότε:

$$P\left[-1.96 < Z < 1.96\right] = 0.95$$



όπου $-1.96 = -z_{\alpha/2}$ και $1.96 = z_{\alpha/2}$ όπου $\alpha = 0.05$ και

$\Phi(x)$: συνάρτηση πυκνότητας της $N(0,1)$.

$$Z = \frac{\bar{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\theta)}{\sigma} \overset{(*)}{\sim} N(0,1),$$

καθώς $n \to \infty$ (n μεγάλο) προσεγγιστικά από το Κ.Ο.Θ.

Έχουμε, διαδοχικά:

$$P\left[-1.96 < \frac{(\bar{X}-\theta)\sqrt{n}}{\sigma} < 1.96\right] = 0.95 \Rightarrow$$

(*) Συνήθως, θεωρούμε $n \geq 30$.

$$\Rightarrow P\left[\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 0.95$$

Αν συμβολίσουμε το τ.δ. ως $\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_n)$, τότε:

$$U(\underset{\sim}{X}) = \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 486.96gr$$

$$L(\underset{\sim}{X}) = \bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 483.04gr$$

Άρα, το ζητούμενο 95% δ.ε. για την παράμετρο $\mu = \theta$ είναι $(483.04, 486.96)$.

Ερμηνεία:

Εάν επαναλάβουμε το τυχαίο πείραμα πολλές φορές λαμβάνοντας κάθε φορά τυχαίο δείγμα μεγέθους n το δ.ε. αλλάζει υπολογίζοντας αντίστοιχα 95% δ.ε.

Αν κατασκευαστούν 100 δ.ε. (με 95% βαθμό εμπιστοσύνης ή συντελεστή εμπιστοσύνης) για την παράμετρο μ από 100 δείγματα ίδιου μεγέθους από έναν πληθυσμό τότε τα 95 στα 100 δ.ε. (περίπου) θα περιέχουν την πραγματική τιμή της παραμέτρου μ (Βλέπε Βιβλίο σελ. 302, Σχήμα).

Επιπλέον, υπάρχει 95% πιθανότητα το δ.ε. να περιλαμβάνει την πραγματική άγνωστη τιμή της παραμέτρου μ.

Εναλλακτικά, υπάρχει 95% πιθανότητα η διαφορά μεταξύ $\bar{X}$ (δειγματικού μέσου) και μ (πραγματική τιμή παραμέτρου του πληθυσμού) να είναι μικρότερη από 1.96 τυπικά σφάλματα.

Παρατηρήσεις:

(1) Η εύρεση του δ.ε. προϋποθέτει πολύ καλή γνώση της κατανομής που ακολουθεί η σ.σ. με την οποία εκτιμάται η παράμετρος θ.

(2) Στο Παράδειγμα 1 είδαμε ότι ένα 95% δ.ε. για μία τμ. $Z \sim N(0,1)$ είναι το $(-1.96, 1.96)$. Αυτό το διάστημα <u>δεν</u> είναι το μοναδικό με πιθανότητα 0.95. διότι τα διαστήματα $(-\infty, 1.64)$ και $(-1.64, \infty)$ έχουν επίσης πιθανότητα 0.95, όπου $1.64 = z_{0.05}$ και $-1.64 = -z_{0.05}$. Προφανώς, "καλύτερο" δ.ε. είναι το διάστημα με το μικρότερο μήκος.

Τα βασικά συστατικά για την κατασκευή ενός δ.ε.

1ο Επιλογή τ.δ. μεγέθους n από ένα πληθυσμό με άγνωστη παράμετρο θ.

2ο Είναι γνωστή η κατανομή του σημειακού εκτιμητή της παραμέτρου ή κάποιας σχετικής σ.σ.

3ο Ξεκινώντας από αυτήν την κατανομή και χρησιμοποιώντας κατάλληλα Θεωρήματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων λαμβάνουμε μία κατάλληλη συνάρτηση που περιέχει την παράμετρο και στοιχεία του δείγματος και για την οποία γνωρίζουμε την κατανομή.

4ο Με γνωστή την κατανομή της συνάρτησης και αφού επιλέξουμε το βαθμό (συντελεστή) εμπιστοσύνης και υπολογίσουμε τη δειγματική διασπορά (η οποία σε κάποιες περιπτώσεις είναι γνωστή), μετά από πράξεις καταλήγουμε στο ζητούμενο δ.ε. Το δ.ε. που θα προκύψει παρέχει ένα φάσμα πιθανών τιμών της παραμέτρου που μας ενδιαφέρει.

Μετά από την επιλογή ενός τ.δ. μεγέθους η από έναν πληθυσμό παρατηρήσεων (μετρήσεων) που σχετίζονται με μία άγνωστη παράμετρο Θ, η διαδικασία κατασκευής ενός δ.ε. απαντάει στα εξής ερωτήματα:

1ο Πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την "πληροφορία" που μας δίνει το δείγμα για να εκτιμήσουμε την άγνωστη παράμετρο και να πάρουμε αποφάσεις για τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού **που** μας ενδιαφέρουν;

Απάντηση: Καθορισμός της κατανομής της σ.σ. του δείγματος.

2ο Πόση εμπιστοσύνη μπορούμε να έχουμε στις εκτιμήσεις και κατ' επέκταση στις αποφάσεις που παίρνουμε;

Απάντηση: Καθορισμός του βαθμού (συντελεστή) εμπιστοσύνης.

3ο Πως μπορούμε να εκφράσουμε αυτήν την εμπιστοσύνη;

Απάντηση Καθορισμός ενός δ.ε. (διαστήματος εμπιστοσύνης).

Παράδειγμα 2

Έστω $X \sim N(\mu, 4)$

Έστω τ.δ. 20 τιμών $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ οι οποίες δίνουν δειγματική μέση τιμή $\bar{x} = 6.4$.

Η καλύτερη εκτίμηση για τη μέση τιμή μ του πληθυσμού είναι 6.4.

Ερωτήματα: Πόσο καλή είναι αυτή η εκτίμηση;

Πως μπορούμε να εκφράσουμε **την** ακρίβεια αυτής της εκτίμησης;

Υπολογίζουμε το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης

$$S.E.(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{20}}$$

(standard error), όπου σ είναι η τυπική απόκλιση του πληθυσμού.

Γνωρίζουμε ότι ο δειγματικός μέσος $\bar{X}$ είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου μ, δηλαδή

$E[\bar{X}] = \mu$.

$$\sqrt{var(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ (Τυπικό σφάλμα εκτίμησης).

Κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις (Κ.Ο.Θ.) η δειγματική μέση τιμή $\bar{X}$ ακολουθεί (ασυμπτωτικά $(n \to \infty)$) την κανονική κατανομή έτσι ώστε: $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Ισοδύναμα, $$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή του πληθυσμού.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε διάφορα Δ.Ε. ανάλογα με τις προϋποθέσεις που ισχύουν. Τέτοιες προϋποθέσεις αφορούν το **μέγεθος** του δείγματος (αν είναι μικρό ή μεγάλο) και τη διασπορά του πληθυσμού (αν είναι γνωστή ή άγνωστη).

1η περίπτωση: Δ.ε. για μέση τιμή κανονικού πληθυσμού
Διασπορά σ^2 του υπό μελέτη πληθυσμού γνωστή.

Θέλουμε να βρούμε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών που να περιέχει την πραγματική τιμή του μ με πιθανότητα (βαθμό εμπιστοσύνης) $1-\alpha$.

Ένας εκτιμητής $\hat{\mu}$ της μέσης τιμής μ ενός πληθυσμού είναι η δειγματική μέση τιμή για την οποία: $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ ή

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ (✱)

Όταν το δείγμα προέρχεται από κανονικό πληθυσμό η σχέση (✱) ισχύει είτε το δείγμα είναι μικρό είτε είναι μεγάλο.

Είναι $P(x_1 < \bar{X} < x_2) = P\left(\dfrac{x_1-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \dfrac{x_2-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$

Θέλουμε $P(x_1 < \bar{X} < x_2) = 1-\alpha$

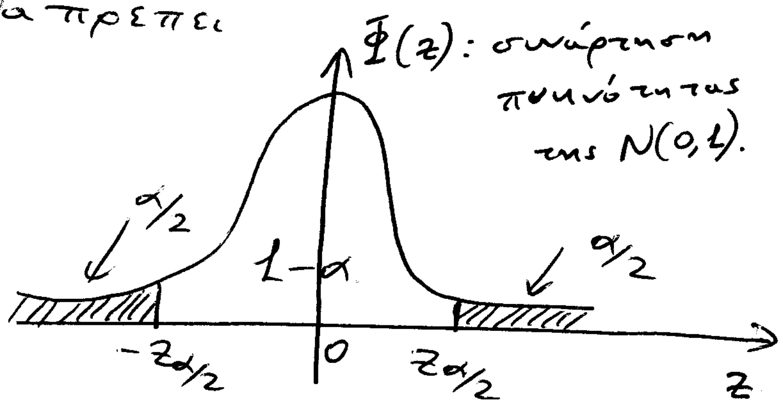
Θέτουμε: $Z_1 = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ όμως $Z \sim N(0,1)$

Άρα $P\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z < \frac{x_2-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

Θέτουμε $z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, $z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

Από το σχήμα, έπεται ότι θα πρέπει

$$z_1 = -z_{\alpha/2}, \quad z_2 = z_{\alpha/2}$$



Άρα,

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2})$$

$$= P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right),$$

όπου $z_{\alpha/2} : P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ και $-z_{\alpha/2} : P(Z < -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$

$$= P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Επομένως, ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη μέση τιμή μ του πληθυσμού όταν η διασπορά του πληθυσμού σ^2 είναι γνωστή, είναι:

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

ή το δ.ε. έχει όρια: $\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Παρατηρήσεις:

(1) Λόγω Κ.Ο.Θ. για μεγάλο n (π.χ. $n \geq 30$) το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση που ο πληθυσμός δεν είναι κανονικός. Αν ο πληθυσμός είναι κανονικός, το δ.ε. είναι ένα ακριβές δ.ε. Διαφορετικά, είναι ένα προσεγγιστικό δ.ε.

(2) Το εύρος του διαστήματος εμπιστοσύνης επηρεάζεται από τις τιμές των n, σ και α.

(3) Το μήκος του δ.ε. είναι $2\, z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

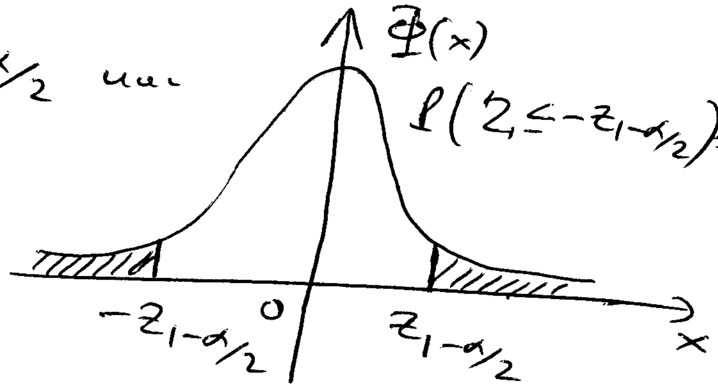
(4) Η τιμή $z_{\alpha/2}$ προκύπτει από τους πίνακες της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Στο βιβλίο το δ.ε. δίνεται

με όρια $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ όπου $z_{1-\alpha/2}$ ορίζεται ως

$$P(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 \quad \text{και}$$

$$P(Z \leq -z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2.$$



Ο ορισμός του ποσοστιαίου σημείου διαφέρει από βιβλίο σε βιβλίο.
Γενικά, είναι θέμα ορισμού.

Για τους συνήθεις βαθμούς εμπιστοσύνης έχουμε

$1-\alpha$	α	$z_{1-\alpha/2}$ (όπως ορίζεται στο βιβλίο)
90%	10%	1.645
95%	5%	1.96
99%	1%	2.58

Παράδειγμα 3

Σε τυχαίο δείγμα από 36 ειδικά σχολεία μιας χώρας ο μέσος αριθμός μαθητών ανά σχολείο ήταν 379.2 και η τυπική απόκλιση εκτιμήθηκε ίση με 124. Δώστε ένα 95% δ.ε. για το μέσο αριθμό μ των μαθητών όλων των σχολείων της χώρας, αν θεωρήσουμε ότι η τυπική απόκλιση του πληθυσμού από προηγούμενες μελέτες βρέθηκε όσο και του δείγματος δηλ. **124.**

Λύση Είναι $S.E.(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{124}{6} = 20.6$

Ο βαθμός εμπιστοσύνης είναι 95% δηλαδή

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96 \text{ όπου } z_{0.975} : P(Z < z_{0.975}) = 0.975$$

Άρα, ένα 95% δ.ε. για τη **μέση τιμή** του πληθυσμού των μαθητών όλων των σχολείων της **χώρας είναι:**

$$379.2 - 1.96 \cdot 20.6 < \mu < 379.2 + 1.96 \cdot 20.6$$

$$\Rightarrow 338.69 < \mu < 419.71.$$

Αν θέλαμε ένα 99% δ.ε. θα είχαμε τα όρια

$379.2 \pm 2.58 \cdot 20.6$ δηλ. το δ.ε. με άκρα

$$L(\underline{X}) = 326.052 \text{ και } U(\underline{X}) = 432.348$$

Όπως μοιάζει λογικό, όσο αυξάνει **το** $1-\alpha$ αυξάνει το εύρος του δ.ε.

Ερμηνεία Παραδείγματος 3 Αν κατασκευάζαμε πολλές φορές δ.ε. για την παράμετρο μ, το ποσοστό των φορών που τα διαστήματα αυτά θα περιείχαν την πραγματική τιμή της παραμέτρου θα πλησίαζε στο 0.95 (ή στο 0.99) όσο θα αυξανόταν ο αριθμός των φορών που θα επαναλαμβανόταν το πείραμα.

2η Περίπτωση Άγνωστη διακύμανση του πληθυσμού (σ^2).

Αφού η διακύμανση του πληθυσμού σ^2 είναι άγνωστη μπορούμε να την εκτιμήσουμε με τη δειγματική διασπορά $S'^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$ (Εκτιμήτρια που προκύπτει από Μ.Μ.Π. ή μέθοδο ροπών).

Μ.Μ.Π.: μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας.

Όμως η S'^2 δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της σ^2, διότι $E\left[S'^2\right] = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$.

Η αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2 είναι: $S^{*2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$

Ισχύει ότι: $S'^{*2} = \dfrac{n}{n-1} S'^2$.

Επομένως, η σ.σ. $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, αν αντικαταστήσουμε το σ^2 με S^{*2} γράφεται:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\cancel{n}}{(n-1)}\frac{S'^2}{\cancel{n}}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S'^2/(n-1)}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{S^{*2}}{n}}}$$

Όμως ισχύει ότι:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S'/\sqrt{n-1}} \equiv \frac{\overline{X}-\mu}{S^*/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$ (t_{n-1}: κατανομή t_{n-1} - student με $n-1$ β.ε.)

Επομένως για τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ μεγέθους n από κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$ είναι

$$P\left(-t_{n-1,1-\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S'/\sqrt{n-1}} \equiv \frac{\overline{X}-\mu}{S^*/\sqrt{n}} \leq t_{n-1,1-\alpha/2}\right)$$

$$=1-\alpha.$$

Αν λύσουμε ως προς μ (για την S')

$$P\left(\overline{X}-t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n-1}} \leq \mu \leq \overline{X}+t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right)=$$

$$=1-\alpha$$

Άρα, με βάση ένα τ.δ., ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη μέση τιμή μ ενός κανονικού πληθυσμού είναι:

$$\overline{X} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

Αν λύσουμε ως προς μ (για την S^*)

$$P\left(\overline{X}-t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S^*}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}+t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=1-\alpha$$

Άρα με χρήση της S^* το δ.ε. είναι:

$$\overline{X} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S^*}{\sqrt{n}}$$

Παρατηρήσεις:

(1) Συνήθως ως εκτιμήτρια της παραμέτρου σ^2 χρησιμοποιείται η αμερόληπτη εκτιμήτρια $S^{*2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$.

(2) Αν η υπόθεση της κανονικότητας του πληθυσμού δεν ισχύει ή δεν είναι δυνατόν να ελεγχθεί, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω δ.ε. που βασίζεται στην κατανομή t εφόσον το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο (εν γένει $n \geq 25$ ή $n \geq 30$). διότι η σ.σ.

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

ακολουθεί και σε αυτήν την περίπτωση, προσεγγιστικά, την κατανομή t_{n-1}.

(3) Για μεγάλο n, η κατανομή t προσεγγίζει ικανοποιητικά την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Σε τέτοιες περιπτώσεις συχνά χρησιμοποιούμε κατευθείαν την κανονική κατανομή (για μεγάλα δείγματα π.χ. $n > 100$), ακόμα και σε περιπτώσεις στις οποίες δεν γνωρίζουμε την διακύμανση του πληθυσμού.

(4) Για μεγάλο μέγεθος δείγματος n, η κατανομή t προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή. Επομένως, η χρησιμοποίηση της κανονικής κατανομής (ανεξάρτητα από τη γνώση ή μη του σ^2) για μεγάλο n δίνει μία καλή προσέγγιση του τελικού (σωστού) δ.ε.

Συνοψίζοντας, για τα δ.ε. για τη μέση τιμή κανονικών πληθυσμών, έχουμε:

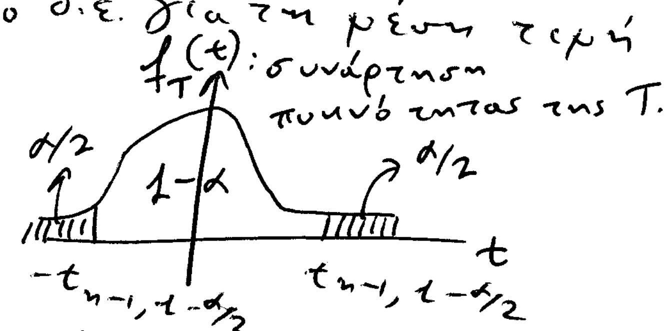
(1) σ^2 γνωστή:
$$\left\{ \bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

(2) σ^2 άγνωστη: Προσεγγίζουμε την παράμετρο σ^2 με την αμερόληπτη εκτιμήτρια S^{*2}.

Για μεγάλο n ($n > 100$ π.χ.), ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη μέση τιμή μ του πληθυσμού είναι το:
$$\left\{ \bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{S^*}{\sqrt{n}} \right\}$$
, όπου S^* η δειγματική τυπική απόκλιση (αμερόληπτη εκτιμήτρια).

Το παραπάνω δ.ε. αποτελεί ικανοποιητική προσέγγιση.

Για n μικρό ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη μέση τιμή μ του πληθυσμού είναι το:
$$\left\{ \bar{X} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{S^*}{\sqrt{n}} \right\}$$



όπου $t_{n-1,1-\alpha/2}$: $P(T \le t_{n-1,1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$, όπου T τ.μ. $\sim t_{n-1}$.

Με την προϋπόθεση ότι το μέγεθος n του δείγματος είναι "μεγάλο", ($n \geq 25$ ή $n \geq 30$), ακόμα και αν δεν ισχύει η υπόθεση της κανονικότητας του πληθυσμού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω Δ.Ε.

Σε πιο σπάνιες περιπτώσεις, αντί για την αμερόληπτη εκτιμήτρια S^{*2} μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως εκτιμήτρια της διασποράς, η εκτιμήτρια S^2.

<u>Παράδειγμα 4</u> Για τον προσδιορισμό του συντελεστή θερμικής διαστολής μ του νικελίου έγιναν 25 μετρήσεις οι οποίες έδωσαν δειγματική μέση τιμή $\bar{x} = 12.81$ και τυπική απόκλιση $S^* = 0.04$. Δώστε ένα 95% Δ.Ε. για τη μέση διαστολή μ.

<u>Λύση</u> Για την κατασκευή ενός Δ.Ε. για το θερμικό συντελεστή μ και για $\alpha = 0.05$ και επειδή η τυπική απόκλιση σ του πληθυσμού των μετρήσεων είναι άγνωστη, θα είναι: $\left\{ \bar{x} \pm t_{n-1,\alpha/2} \frac{S^*}{\sqrt{n}} \right\}$
όπου $\bar{x} = 12.81$, $S^* = 0.04$, $n = 25$, $t_{24, 0.025} = 2.064$
(από πίνακες).

Έχουμε: $12.79 < \mu < 12.83$

<u>Σημείωση:</u> Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά "μεγάλο" ($n \geq 25$) θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $\left\{ \bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{S^*}{\sqrt{n}} \right\}$
όπου για $\alpha = 0.05$, $z_{0.975} = 1.96$.

<u>Παράδειγμα 5</u> Τυχαίο δείγμα έξι λογιστικών ελέγχων δίνει τα παρακάτω αποτελέσματα (σε ευρώ): 58.3, 61.2, 60.4, 49.2, 55.4, 52.9

τα οποία δίνουν δειγματική μέση τιμή $\bar{x} = 56.23$ και δειγματική τυπική απόκλιση (αμερόληπτη εκτίμηση) $s'^{*} = 4.64$. Βρείτε ένα 95% δ.ε. για τη μέση τιμή του πληθυσμού των λογιστικών μετρήσεων.

<u>Λύση</u>

Το 95% δ.ε για την παράμετρο μ είναι:

$$\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s'^{*}}{\sqrt{n}}$$

Εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα $\frac{s^{*}}{\sqrt{n}} = \frac{4.64}{\sqrt{6}} = 1.8942$

$\bar{x} = 56.23$

Από πίνακες της κατανομής t_{n-1}, $n=6$ και για βαθμό εμπιστοσύνης $1-\alpha = 95\%$ είναι $t_{n-1,0.975} = t_{5,0.975} =$
$= 2.571$

Άρα το δ.ε. είναι: $(56.23 \pm 2.571 \cdot 1.8942)$

$\Rightarrow (51.36, 61.10)$.

Υπάρχει 95% πιθανότητα το παραπάνω δ.ε. να περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου μ.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν το δείγμα είναι μικρό και το Κ.Ο.Θ. δεν μπορεί να εφαρμοσθεί η υπόθεση της κανονικότητας του πληθυσμού πολλές φορές δεν είναι δυνατόν να παρακαμφθεί.

Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε έναν κατάλληλο μαθηματικό μετασχηματισμό των δεδομένων για να μετατρέψουμε τον υπό μελέτη πληθυσμό σε ένα σχεδόν κανονικό πληθυσμό, ώστε η Θεωρία για κανονικούς πληθυσμούς να εφαρμοσθεί στα μετασχηματισμένα δεδομένα. Συχνά χρησιμοποιούμε τον λογαριθμικό μετασχηματισμό (Βλέπε Βιβλίο, σελ. 315-316, Σχήματα).

Για τα παραπάνω δ.ε. που περιγράψαμε, για περαιτέρω μελέτη παραπέμπουμε στο Βιβλίο (σελ. 301-316).

Διαστήματα εμπιστοσύνης για τη διαφορά μέσων τιμών κανονικών πληθυσμών (σελ. 324-332)

Σ' αυτήν την περίπτωση τα διαστήματα εμπιστοσύνης εξαρτώνται από το αν τα δείγματα είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα, αν είναι μεγάλα ή μικρά, και αν οι διασπορές των υπό μελέτη πληθυσμών είναι γνωστές ή άγνωστες.

1η Περίπτωση : Ανεξάρτητα Δείγματα

Γνωστές διακυμάνσεις - Μεγάλα δείγματα

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ και $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ δύο τυχαία δείγματα μεγέθους n και m αντίστοιχα, από δύο ανεξάρτητους κανονικούς πληθυσμούς

$N(\mu_X, \sigma_X^2)$ και $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Έστω $x_1, \ldots, x_n$ και $y_1, \ldots, y_m$ παρατηρήσεις από τα τυχαία δείγματα μεγέθους n και m από τους δύο ανεξάρτητους κανονικούς πληθυσμούς $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ και $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.
Ενδιαφερόμαστε να κατασκευάσουμε ένα δ.ε. για τη διαφορά $\mu_X - \mu_Y$, δηλαδή την διαφορά στους μέσους (μέσες τιμές) των πληθυσμών.

Εκτιμούμε τη διαφορά $\mu_X - \mu_Y$ με τη δειγματική διαφορά $\bar{x} - \bar{y}$ όπου $\bar{x}, \bar{y}$ είναι οι μέσοι των δύο δειγμάτων.
Όταν οι διασπορές των δύο πληθυσμών είναι γνωστές, ισχύει ότι:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right) \text{ και } \bar{Y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{m}\right) \quad (1)$$

όπου $\bar{X}, \bar{Y}$ οι τ.μ. με αντίστοιχες παρατηρούμενες τιμές $\bar{x}, \bar{y}$.
Η διαφορά $\bar{X} - \bar{Y}$ ακολουθεί κανονική κατανομή και ισχύει ότι: $\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)$
Το τυπικό σφάλμα της τ.μ. $\bar{X} - \bar{Y}$ είναι: (2)

$$S.E.(\bar{X} - \bar{Y}) = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}$$

Το αποτέλεσμα (1), προκύπτει από την πρόταση:
Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. $\sim N(\mu, \sigma^2)$. Τότε: $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.
(Κ.Ο.Θ.)

Το αποτέλεσμα (2) προκύπτει από την πρόταση:
Έστω X_1, X_2 δύο ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κανονικές κατανομές $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, αντίστοιχα. Η τ.μ. $R = X_1 \pm X_2$ ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, όπου $\mu = \mu_1 \pm \mu_2$ και $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Από τη σχέση (2) ισοδύναμα έχουμε ότι η τ.μ. Z_1,

$$Z_1 = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

Συνεπώς, ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη διαφορά $\mu_X - \mu_Y$ είναι: $\overline{X} - \overline{Y} \pm Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{m}}$ (3).

Το αποτέλεσμα (3) προκύπτει με παρόμοιο τρόπο όπως τα αντίστοιχα δ.ε. για τη μέση τιμή του πληθυσμού που είδαμε προηγουμένως στις σημειώσεις.

Παρατήρηση: Αν οι πληθυσμοί δεν είναι ακριβώς κανονικοί αλλά τα μεγέθη των δειγμάτων n και m είναι αρκετά μεγάλα (π.χ. $n \geq 30$, $m \geq 30$) λόγω του Κ.Ο.Θ. τα όρια (3) μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως όρια ενός κατά προσέγγιση δ.ε. για τη διαφορά $\mu_X - \mu_Y$.

2η Περίπτωση: Ανεξάρτητα Μεγάλα δείγματα και άγνωστες διακυμάνσεις

Όταν οι διασπορές των δύο πληθυσμών είναι άγνωστες και τα δείγματα είναι μεγάλα (δηλ. $n \geq 30$, $m \geq 30$), εκτιμούμε τις άγνωστες διακυμάνσεις σ_X^2, σ_Y^2 με τις αμερόληπτες δειγματικές εκτιμήσεις τους $S_X'^{*2}$ και $S_Y'^{*2}$, αντίστοιχα.

Όπως και στην Περίπτωση 1, έχουμε ότι:

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{S_X'^{*2}}{n}+\dfrac{S_Y'^{*2}}{m}}} \sim N(0,1)$$

Ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη διαφορά $\mu_X-\mu_Y$ θα δίνεται από τα όρια:

$$\overline{X}-\overline{Y} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_X'^{*2}}{n}+\frac{S_Y'^{*2}}{m}}$$

Παράδειγμα 6 Μαθητές από την επαρχία και από την πόλη πρόκειται να συγκριθούν σ' ένα test σχετικά με τις γνώσεις τους γύρω από τη δημοτική μουσική. Δύο τυχαία δείγματα το πρώτο με μέγεθος 45 και το δεύτερο με μέγεθος 50 επιλέγονται, το πρώτο σχηματίζεται από παιδιά της επαρχίας της ΣΤ' τάξης και το δεύτερο από παιδιά της πόλης πάλι της ΣΤ' τάξης. Τα δεδομένα που έχουμε από τα δύο δείγματα έδωσαν:

1ο Δείγμα	2ο Δείγμα
$n=45$	$m=50$
$\bar{X}=76.8$	$\bar{Y}=80.8$
$S_X^{*2}=7.2^2$	$S_Y^{*2}=7^2$

όπου X, Y τ.μ. που αναπαριστούν τα αποτελέσματα του test για τους μαθητές της επαρχίας και της πόλης, αντίστοιχα.

Βρείτε ένα 98% δ.ε. για τη διαφορά $\mu_X-\mu_Y$ των μέσων τιμών των επιδόσεων των μαθητών στο test.

<u>Λύση</u> Είναι $\alpha=0.02$, $\frac{\alpha}{2}=0.01$,

$$z_{1-\alpha/2}=z_{0.99}=2.33$$

και το δ.ε. έχει όρια

$$\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_X^{*2}}{n}+\frac{S_Y^{*2}}{m}}=$$

$$=76.8-80.8\pm 2.33\sqrt{\frac{7.2^2}{45}+\frac{7^2}{50}}$$

$$=-4\pm 3.4021$$

Το δ.ε. είναι $(-7.4021, -0.5979)$.

3η Περίπτωση Μικρά δείγματα, ανεξάρτητα με ίσες αλλά άγνωστες διακυμάνσεις.

Υποθέτουμε ότι: $X\sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$, $Y\sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$.

Οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες.

Υποθέτουμε ότι: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$

Λαμβάνουμε δύο ανεξάρτητα δείγματα με μεγέθη n και m από δύο κανονικούς ανεξάρτητους πληθυσμούς με ίσες αλλά άγνωστες διασπορές.

Έστω S_X^{*2}, S_Y^{*2} οι αμερόληπτες εκτιμήτριες των δύο δειγμάτων. Λόγω της υπόθεσης $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ και της ανεξαρτησίας των δύο δειγμάτων, θα έχουμε ότι:

$$V = \frac{(n-1) S_X^{*2}}{\sigma^2} + \frac{(m-1) S_Y^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n+m-2} \quad (*)$$

Η σχέση (*) προκύπτει από την πρόταση:

Η διασπορά S^{*2} του τ.δ. που αποτελεί αμερόληπτη εκτιμήτρια της διασποράς σ^2 ενός πληθυσμού μετρήσεων είναι τ.μ. για την οποία ισχύει ότι: $\frac{(n-1) S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

Οι τ.μ. Z_1 και V είναι ανεξάρτητες.

Επομένως για την τ.μ. $T = \dfrac{Z_1}{\sqrt{\dfrac{V}{n+m-2}}}$ (**) ισχύει

ότι: $T \sim t_{n+m-2}$

Το παραπάνω αποτέλεσμα, προκύπτει διότι:

αν δύο τ.μ. X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες και η $X_1 \sim N(0,1)$ ενώ η $X_2 \sim \chi^2_n$ τότε η τ.μ. $Y := \dfrac{X_1}{\sqrt{\dfrac{X_2}{n}}} \sim t_n$ (κατανομή Student) (με n β.ε.).

Με αντικατάσταση των τ.μ. Z_1 και V στην παραπάνω σχέση (**) προκύπτει:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{S_p^{*2}}{n} + \dfrac{S_p^{\prime *2}}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

όπου

$$S_p^{\prime *2} = \frac{(n-1)\, S_X^{*2} + (m-1)\, S_Y^{\prime *2}}{n+m-2}$$

Εναλλακτικά,

$$S_p^{\prime *2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{m} (Y_i - \bar{Y})^2}{n+m-2},$$

όπου S_p^{*2} καλείται σταθμισμένη διακύμανση (pooled variance). Είναι ένας εκτιμητής της κοινής διασποράς σ^2 η οποία εκτιμάται, χρησιμοποιώντας "πληροφορίες" και από τα δύο ανεξάρτητα δείγματα. Είναι ο σταθμισμένος μέσος των δύο δειγματικών διασπορών. Στον υπολογισμό της συμμετέχουν οι δύο διασπορές σε ποσοστό ανάλογο του μεγέθους του δείγματος από το οποίο προέρχεται η κάθε μία.

Αποδεικνύεται ότι, η σταθμισμένη διακύμανση S_p^{*2} είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια της κοινής διασποράς σ^2.

Ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη διαφορά $\mu_X - \mu_Y$ είναι:

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{n+m-2,\,1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_p^{*2}}{n} + \frac{S_p^{*2}}{m}}$$

Το τυπικό σφάλμα για την τμ. $\bar{X}-\bar{Y}$ είναι:

$$S.E.(\bar{X}-\bar{Y}) = S_p^{*2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

<u>Σημείωση:</u> Αν $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ αλλά n, m είναι αρκετά μεγάλα μπορούμε να λάβουμε ένα κατά προσέγγιση $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη διαφορά $\mu_X - \mu_Y$, χρησιμοποιώντας την κανονική κατανομή και τις αμερόληπτες εκτιμήτριες S_X^{*2}, S_Y^{*2} των σ_X^2 και σ_Y^2.

Σε μία τέτοια περίπτωση:

Ένα, κατά προσέγγιση, $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη διαφορά $\mu_X-\mu_Y$ είναι: $\overline{X}-\overline{Y} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_X^{*2}}{n}+\frac{S_Y^{*2}}{m}}$

Αν δεν χρησιμοποιηθούν οι αμερόληπτες εκτιμήτριες τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εκτιμήτριες $S_X'^2$ και $S_Y'^2$ και να εκτιμήσουμε τις διακυμάνσεις σ_X^2, σ_Y^2 με τις εκτιμήτριες $\frac{nS_X'^2}{(n-1)}$ και $\frac{mS_Y'^2}{(m-1)}$.

Τότε ένα κατά προσέγγιση $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη διαφορά $\mu_X-\mu_Y$ είναι: $\overline{X}-\overline{Y} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_X'^2}{(n-1)}+\frac{S_Y'^2}{(m-1)}}$.

Παρατήρηση: Η επιβεβαίωση της υπόθεσης $\sigma_X^2=\sigma_Y^2$ μπορεί να γίνει (όπως θα δούμε παρακάτω) με ελέγχους υποθέσεων.

Παράδειγμα 7 Σε ένα πείραμα θέλουμε να ελέγξουμε αν μία δίαιτα βελτίωσε το μέσο βάρος των γουρουνιών τα οποία υποβλήθηκαν σ' αυτήν. Μετρήσεις (σε κιλά) πάρθηκαν από δύο ανεξάρτητα δείγματα. Το πρώτο αφορά μετρήσεις βάρους από κανονική δίαιτα (τ.μ. X) και το δεύτερο αφορά μετρήσεις βάρους από ειδική δίαιτα (τ.μ. Y).

Κανονική δίαιτα	Ειδική δίαιτα
50.9	50.3
34.5	46.3
34.2	55.8
24.7	47.4
49.8	46.7
32.1	$(m=5)$
23.0	
21.6	
34.1	
34.2 $(n=10)$	

Δειγματικοί μέσοι $\bar{x}=33.91$, $\bar{y}=49.30$

Δειγματικές διακυμάνσεις: $S_1'^{*2}=100$, $S_2'^{*2}=15.655$.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα 95% δ.ε. για τη διαφορά των μέσων $\mu_X-\mu_Y$. Τα δείγματα είναι μικρά και οι διακυμάνσεις των πληθυσμών από τις οποίες προέρχονται είναι άγνωστες. Υποθέτουμε ότι είναι ίσες, δηλ. $\sigma_X^2=\sigma_Y^2$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι τ.μ. X, Y που αναπαριστούν το βάρος των γουρουνιών στους δύο πληθυσμούς μετρήσεων κατανέμονται κανονικά.

Η σταθμισμένη διακύμανση είναι:

$$S_p'^{*2}=\frac{9\cdot 100+4\cdot 15.655}{10+5-2}=74.06$$

Άρα $S_p'^{*}=\sqrt{74.06}=8.61$

Από πίνακες της κατανομής Student, $t_{10+5-2;\,0.975}=2.16$

Το 95% δ.ε. είναι:

$$(33.91-49.30) \pm 2.16 \cdot 4.71 = (-25.6, -5.2)$$

<u>Παρατήρηση:</u> Μερικές φορές κάποιο από τα άκρα του διαστήματος που προκύπτει (ή και τα δύο άκρα) μπορεί να είναι αρνητικό. Αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η μέση τιμή του δεύτερου πληθυσμού υπερβαίνει τη μέση τιμή του πρώτου. Στη περίπτωση του παραπάνω παραδείγματος, υπάρχει ένδειξη ότι η ειδική δίαιτα <u>δεν</u> βελτίωσε (μείωσε) το βάρος των γουρουνιών.

<u>4η Περίπτωση:</u> <u>Εξαρτημένα δείγματα</u>

<u>Παρατηρήσεις κατά ζεύγη</u> (Σελ. Βιβλίου, 339 - 344).

Η εξάρτηση στις παρατηρήσεις δύο δειγμάτων μπορεί να εμφανισθεί είτε διότι οι παρατηρήσεις έχουν επιλεγεί με βάση κάποιο χαρακτηριστικό, είτε διότι έχουμε <u>επαναλαμβανόμενες</u> <u>μετρήσεις</u> στα <u>ίδια</u> άτομα.

Για παράδειγμα, μελέτη αποτελεσματικότητας μίας ιατρικής θεραπείας. Έστω ότι θέλουμε να συγκρίνουμε δύο θεραπείες. Τα **δείγματα** στα οποία θα εφαρμοστούν οι δύο θεραπείες, πρέπει να είναι όσον το δυνατόν όμοια.

Αν μεταβληθούν κάποιες συνθήκες που επηρεάζουν τον τρόπο που αντιδρούν τα άτομα στις δύο θεραπείες μπορεί να μεταβληθούν κατά πολύ οι μετρήσεις και κατ' επέκταση τα αποτελέσματα των μετρήσεων.
Σε τέτοιες περιπτώσεις τα δείγματα που θα **επιλεγούν** πρέπει να είναι ομοιογενή. Για να συγκριθούν π.χ. δύο παυσίπονα θα πρέπει να επιλεχθούν δύο ομάδες ατόμων της ίδιας ηλικίας με περίπου ίδια κατάσταση υγείας με περίπου ίδια αντοχή (ή ανοχή) στον πόνο κλπ.
Για να επιτευχθεί αυτή η ομοιογένεια των δειγμάτων επιλέγεται μία ομάδα ατόμων και στα ίδια άτομα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές δίνονται τα παυσίπονα και γίνονται οι μετρήσεις (επαναλαμβανόμενες μετρήσεις πάνω στα ίδια άτομα). Οι παρατηρήσεις που επιλέγονται μ' αυτόν τον τρόπο καλούνται <u>ζευγαρωτές παρατηρήσεις</u> (paired measures).

Αν x_i, y_i είναι οι δύο μετρήσεις του i-οστού ατόμου οι x_i, y_i <u>δεν</u> είναι ανεξάρτητες. Για <u>διαφορετικά</u> άτομα οι διαφορές $x_i - y_i$ για τα διάφορα i, $i=1,\dots,n$, είναι ανεξάρτητες.

Το πρόβλημα <u>ανάγεται</u> σε <u>ένα</u> δείγμα λαμβάνοντας τις διαφορές μεταξύ των παρατηρήσεων του κάθε ζευγαριού.

$$\begin{array}{lll} x_1 & y_1 & d_1 = x_1 - y_1 \\ x_2 & y_2 & d_2 = x_2 - y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & d_n = x_n - y_n \end{array}$$

Έχουμε δύο σειρές μετρήσεων $X_1, \dots, X_n$ και $Y_1, \dots, Y_n$. Θεωρούμε n ζευγάρια παρατηρήσεων (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$ και παίρνουμε τις διαφορές $D_i = X_i - Y_i$.

Καταλήγουμε σε ένα πρόβλημα n παρατηρήσεων $d_1, \dots, d_n$ και η ανάλυσή μας αφορά το δείγμα των διαφορών των παρατηρήσεων $d_i = x_i - y_i$, $i = 1, \dots, n$.

Η δειγματική μέση τιμή είναι: $\bar{d} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$

Είναι η εκτιμήτρια της διαφοράς των μέσων τιμών των δύο πληθυσμών $\mu_X - \mu_Y$.

Οι διαφορές $d_i = x_i - y_i$, $i = 1, \dots, n$, είναι ανεξάρτητες παρατηρήσεις που αποτελούν τ.δ. με δειγματική διασπορά

$$S_d^{*2} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2\right).$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n\bar{d}^2\right).$$

Ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη διαφορά $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$ των μέσων τιμών δύο κανονικών πληθυσμών στην περίπτωση ζευγαρωτών παρατηρήσεων (οι διαφορές των παρατηρήσεων ακολουθούν την κανονική κατανομή),

είναι: $\bar{d} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \dfrac{S_d^*}{\sqrt{n}} = \bar{d} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot S.E.(\bar{d})$

όπου $S.E.(\bar{d}) = \dfrac{S_d^*}{\sqrt{n}}$ το τυπικό **σφάλμα** των διαφορών των δειγματικών μέσων $\bar{x}, \bar{y}$ των δύο δειγμάτων, **X** και Y.

Παρατήρηση: Ο παραπάνω τύπος ισχύει για $n<30$ δηλ. για μικρά δείγματα. Για $n \geq 30$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση από την κανονική κατανομή, $N(0,1)$.

Ο τύπος γίνεται: $\bar{d} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{S_d^*}{\sqrt{n}}$, όπου $z_{1-\alpha/2}$ το αντίστοιχο ποσοστιαίο σημείο της κανονικής κατανομής $N(0,1)$.

Παράδειγμα 8 Σε μία μελέτη για το αποτέλεσμα της έκθεσης των ανθέων του τριφυλλιού σε διαφορετικές περιβαλλοντικές συνθήκες, διαλέχτηκαν 10 υγιή φυτά με άνθη ελεύθερα εκτεθειμένα στην κορυφή και άνθη όσο το δυνατόν πιο καλά κρυμμένα στο κάτω μέρος. Στη συνέχεια καταμετρήθηκαν οι αριθμοί των σπόρων, που βρέθηκαν να είναι:

ΦΥΤΟ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Άνθη στην κορυφή	4	5,2	5,7	4,2	4,8	3,9	4,1	3	4,6	6,8
Άνθη στο κάτω μέρος	4,4	3,7	4,7	2,8	4,2	4,3	3,5	3,7	3,1	1,9

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα βρείτε ένα 90% δ.ε. για την πραγματική διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ στο αριθμό των σπόρων του τριφυλλιού που προέρχεται από λουλούδια στο πάνω και στο κάτω μέρος του φυτού.

Λύση Επειδή οι μετρήσεις x_i, y_i αναφέρονται στο ίδιο φυτό, είναι ζευγαρωτές και το 90% δ.ε. είναι:

$$\bar{d} \pm \frac{S_d^*}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}$$

$$d_i = \begin{pmatrix}\text{μετρήσεις} \\ \text{άνθη} \\ \text{στην κορυφή}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{μετρήσεις} \\ \text{άνθη} \\ \text{στο} \\ \text{κάτω} \\ \text{μέρος}\end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, 10$$

d_i
-0.4
1.5
1.0
1.4
0.6
-0.4
0.6
-0.7
1.5
4.9

$$\bar{d} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} d_i = 1$$

$$S_d^{*2} = \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{10} d_i^2 - n\bar{d}^2\right)$$

$$= \frac{1}{9}(33.84 - 10) = 2.648 \Rightarrow S_d^* = 1.63$$

Από τους πίνακες $t_{9;0.05} = 1.833$.

Η πραγματική διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ στον αριθμό των σπόρων του τριφυλλιού που προέρχεται από λουλούδια στο πάνω και στο κάτω μέρος του φυτού, βρίσκεται στο διάστημα

$$\bar{d} \pm \frac{S_d^*}{\sqrt{n}} t_{n-1; 1-\alpha/2} = 1 \pm \frac{1.63}{\sqrt{9}} 1.833 = 1 \pm 0.996$$

ή $(0.004, 1.996)$.

Η διαφορά είναι σταθερά θετική που σημαίνει ότι υπάρχουν ενδείξεις ότι $\mu_1 > \mu_2$ ή ότι ο αριθμός των σπόρων του τριφυλλιού από λουλούδια στο πάνω μέρος είναι μεγαλύτερος από ότι στο κάτω μέρος.

Διαστήματα εμπιστοσύνης για αναλογίες (Βιβλίο, Σελ. 346-351)

Μελετάμε μία ακολουθία n ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli (δηλ. δοκιμών που οδηγούν σε "επιτυχία" ή σε "αποτυχία") με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας (ανά δοκιμή) ίση με p. Ο αριθμός των επιτυχιών X είναι τ.μ. τ.ω. (τέτοια ώστε)

$X \sim B(n, p)$ (διωνυμική κατανομή).

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δ.ε. για την πραγματική αναλογία P στον πληθυσμό. Η κατασκευή του δ.ε. βασίζεται σε τ.δ. μεγέθους n στο οποίο θεωρούμε την τ.μ. X που αναπαριστά το συνολικό αριθμό των στοιχείων στο δείγμα που έχει το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε (συνολικός αριθμός επιτυχιών στο δείγμα μεγέθους n).

Γνωρίζουμε ότι: $X \sim B(n, P)$, όπου $B(n, P)$ είναι η διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και P.

Η σημειακή εκτιμήτρια της αναλογίας P στον πληθυσμό είναι $\hat{p} = \frac{X}{n}$. Η εκτιμήτρια $\hat{p}$ είναι αμερόληπτη (δηλ. $E(\hat{p}) = P$).

Για μεγάλο n, η τ.μ. X ακολουθεί προσεγγιστικά την κανονική κατανομή με μέση τιμή nP και διασπορά $nP(1-P) = nPQ$, όπου $Q = 1-P$.

δηλ. $X \underset{\substack{\text{προσέγγιση} \\ (n \to \infty)}}{\sim} N(nP, nP(1-P))$

Άρα, $\frac{X}{n} \underset{\substack{\text{προσέγγιση} \\ (n \to \infty)}}{\sim} N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right)$

Επομένως,

$$\frac{X - nP}{\sqrt{nPQ}} = \frac{X - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} = \frac{\frac{X}{n} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \overset{(n\to\infty)}{\sim} N(0,1)$$

Ισχύει ότι:

$$P\left\{-z_{1-\alpha/2} \le \frac{\frac{X}{n}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le z_{1-\alpha/2}\right\} = 1-\alpha \qquad (***)$$

Η ανισότητα

$$\frac{\frac{X}{n}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le z_{1-\alpha/2}$$

είναι ισοδύναμη με την:

$$\left(\frac{X}{n}-p\right)^2 - z^2_{1-\alpha/2}\frac{p(1-p)}{n} \le 0$$

Έστω $K(p) = \left(\frac{X}{n}-p\right)^2 - z^2_{1-\alpha/2}\frac{p(1-p)}{n}$

Για την κατασκευή του δ.ε. απαιτείται να προσδιοριστούν οι τιμές του p που ικανοποιούν την ανισότητα $K(p) \le 0$.

Πιο απλά συνήθως προτιμάται μία απλουστευμένη προσέγγιση σύμφωνα με την οποία η (***) λύνεται αρχικά ως προς p, έτσι ώστε να γράφεται στη μορφή:

$$P\left\{\frac{X}{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le p \le \frac{X}{n} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\} = 1-\alpha$$

Τα P και $1-P$ που εμφανίζονται στα παραπάνω ριζικά αντικαθιστούνται από τις σημειακές εκτιμήτριές τους, $\frac{X}{n}$ και $1-\frac{X}{n}$, αντίστοιχα.

Επομένως, ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την αναλογία P στοιχείων (ή ατόμων) (σε ένα δείγμα μεγέθους n) που έχουν ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό ενός πληθυσμού είναι:

$$\frac{X}{n} \pm Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}{n}}$$

Προϋποθέτουμε μεγάλο μέγεθος δείγματος (δηλ. $n>30$), ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής. Αν όμως το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό τότε για την κατασκευή του δ.ε. χρησιμοποιείται η διωνυμική κατανομή.

<u>Παράδειγμα 9</u> Σε ένα τ.δ. 200 μικρών εταιρειών οι 40 από αυτές έδειξαν άνοδο στα κέρδη τους τον προηγούμενο χρόνο. Έστω P η αναλογία όλων των μικρών εταιρειών που είχανε αύξηση κερδών τον προηγούμενο χρόνο.

Στο δείγμα μεγέθους $n=200$ είναι $X=40$ ο αριθμός των μικρών εταιρειών που έδειξαν άνοδο στα κέρδη τους τον προηγούμενο χρόνο. Η σημειακή εκτιμήτρια της αναλογίας P είναι $\frac{X}{n} = \frac{4\cancel{0}}{20\cancel{0}} = 0.20$

Ένα 95% δ.ε. για την αναλογία P είναι:

$$\left(0.2-1.96\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{200}},\ 0.2+1.96\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{200}}\right)$$

$$=(0.14,\ 0.25).$$

<u>Παράδειγμα 10</u> Με σκοπό να εκτιμηθεί το ποσοστό των ατόμων σε ένα πληθυσμό που γνωρίζει την ύπαρξη λογισμικού αναγνώρισης ομιλίας λάβαμε τυχαίο δείγμα 200 ατόμων. Στο δείγμα 83 ήταν τα άτομα που ήταν γνώστες της ύπαρξης του λογισμικού.

Εκτιμούμε σημειακά την αναλογία p στον πληθυσμό μέσω της εκτιμήτριας: $\dfrac{83}{200}=0.415$

Το τυπικό σφάλμα της αναλογίας δείγματος είναι:

$$\sqrt{\frac{0.415\cdot 0.585}{200}}=0.0348$$

Ένα 95% δ.ε. για την αναλογία p είναι:

$$(0.415-1.96\cdot 0.0348,\ 0.415+1.96\cdot 0.0348)=$$

$$=(35\%,\ 48\%).$$

<u>Διαστήματα Εμπιστοσύνης για τη διαφορά των αναλογιών δύο πληθυσμών (Ανεξάρτητα δείγματα)</u>

Θέλουμε να κατασκευάσουμε δ.ε. για τη διαφορά p_1-p_2 των αναλογιών σε επιτυχίες <u>δύο</u> <u>ανεξάρτητων</u> <u>πληθυσμών</u>.
Θεωρούμε δύο τ.δ. μεγέθους n_1 και n_2 και έστω X_1, X_2 οι αριθμοί των επιτυχιών τους, αντίστοιχα. Αφού $\dfrac{X_1}{n_1}, \dfrac{X_2}{n_2}$ είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες των p_1, p_2, αντίστοιχα,

έπεται ότι: $\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}$ είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια της διαφοράς $p_1 - p_2$.

Για μεγάλα μεγέθη δειγμάτων, έχουμε ότι:

$$\frac{X_1}{n_1} \underset{\text{προσεγγιστικά}}{\overset{n_1 \to \infty}{\sim}} N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right)$$

και $$\frac{X_2}{n_2} \underset{\text{προσεγγιστικά}}{\overset{n_1 \to \infty}{\sim}} N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

Άρα, $$\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} \sim N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

Επομένως, ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη διαφορά $p_1 - p_2$ είναι:

$$\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

όπου $\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1}$ και $\hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$ είναι οι σημειακές εκτιμήσεις των αναλογιών p_1 και p_2, αντίστοιχα.

<u>Παράδειγμα 11</u> Κατασκευάστε ένα 95% και ένα 90% δ.ε. για τη διαφορά αναλογιών των ατόμων δύο πληθυσμών που είναι ενημερωμένοι για την ύπαρξη κάποιου προϊόντος πριν και μετά από μία διαφημιστική εκστρατεία.

	Μέγεθος δείγματος	$X_i, i=1,2$
Πριν	$n_1 = 150$	$X_1 = 68$
Μετά	$n_2 = 120$	$X_2 = 65$

, όπου

$X_i :=$ αριθμός ενημερωμένων ατόμων πριν $(i=1)$ και μετά $(i=2)$ από μία διαφημιστική εκστρατεία.

Η διαφορά των αναλογιών $p_1 - p_2$ στους δύο πληθυσμούς (πριν και μετά από την διαφημιστική εκστρατεία) εκτιμάται σημειακά από τη διαφορά

$$\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} = \frac{68}{150} - \frac{65}{120} = 0.45 - 0.54 = -0.088$$

Ένα 95% δ.ε. για τη διαφορά $p_1 - p_2$ είναι

$$\left(-0.088 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{150} + \frac{0.54 \cdot 0.56}{120}}\right) =$$

$$= (-0.03, 0.21)$$

Ένα 90% δ.ε. είναι (**αντί** για $z_{0.975} = 1.96$ έχουμε $z_{0.95} = \mathbf{1.645}$)

$$(-0.01, 0.19).$$

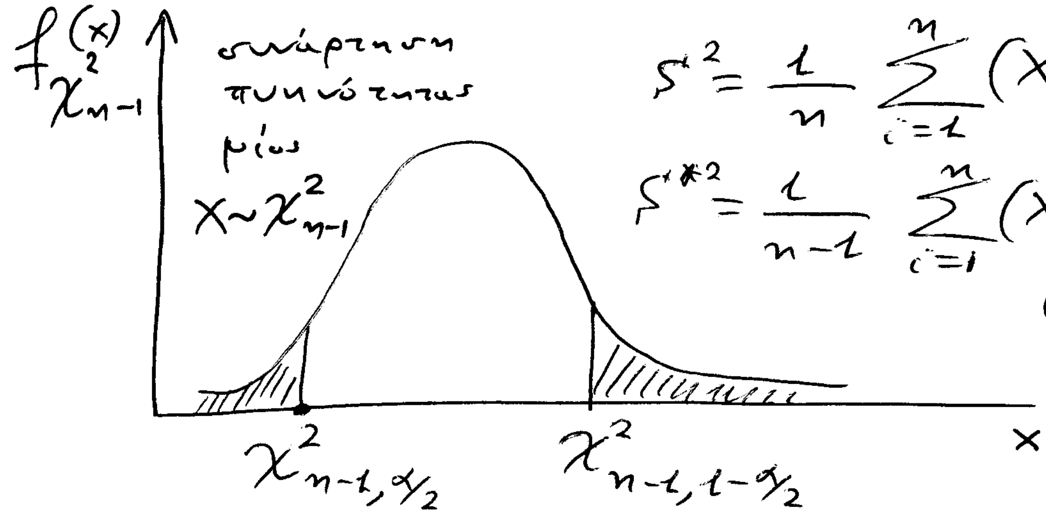
<u>Διαστήματα εμπιστοσύνης για Διακυμάνσεις (σελ. 352-358)</u>

Θέλουμε να κατασκευάσουμε δ.ε. για τη διακύμανση $\boldsymbol{\sigma^2}$ ενός πληθυσμού. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. μεγέθους n από κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$.

Ισχύει ότι:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Σχηματικά για την κατανομή χ^2_{n-1}



$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$$S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

(αμερόληπτη εκτίμηση)

όπου $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ είναι τ.ω. $P\left(X \le \chi^2_{n-1,\alpha/2}\right) = \alpha/2$

και $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ είναι τ.ω. $P\left(X \le \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha/2$.

και X τ.μ. $\sim \chi^2_{n-1}$.

Ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη διακύμανση σ^2 του πληθυσμού προκύπτει από τις σχέσεις:

$$P\left\{\chi^2_{n-1,\alpha/2} \le \frac{nS^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

ή $$P\left\{\chi^2_{n-1,\alpha/2} \le \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} \le \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right\} = 1-\alpha.$$

Ισοδύναμα

$$P\left\{\frac{nS^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{nS^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right\} = 1-\alpha$$

ή $$P\left\{\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right\} = 1-\alpha$$

Παρατήρηση: Δεν είναι απαραίτητο να κατανεμηθεί το συνολικό α συμμετρικά στις δύο ουρές της κατανομής αν και αυτό είναι το πιο σύνηθες.

Παράδειγμα 12 Μία εταιρεία που κατασκευάζει ρολόγια θέλει να μάθει τη διακύμανση του προϊόντος που παράγει επιλέγοντας ένα τ.δ. από 10 ρολόγια από ένα μεγάλο πλήθος ρολογιών που θέλει να ελέγξει. Οι αποκλίσεις των 10 ρολογιών από μία σταθερή ώρα σημειώνονται στο τέλος ενός μήνα και τα στοιχεία που λαμβάνουμε είναι $\bar{x}=0.7$ min και $s^*=0.4$ min. Υποθέτοντας ότι η κατανομή των μετρήσεων μπορεί να θεωρηθεί κανονική, να βρεθεί ένα 90% δ.ε. για τη διακύμανση στις ενδείξεις των ρολογιών.

Είναι $n=10$, $\alpha=0.1$

$$\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}=\chi^2_{9,0.95}=16.919$$

και

$$\chi^2_{n-1,\alpha/2}=\chi^2_{9,0.05}=3.325$$

Ένα 90% δ.ε. για την σ^2 δίνεται από:

$$\frac{(n-1)s^{*2}}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)s^{*2}}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{9\cdot 0.4^2}{16.919}\le\sigma^2\le\frac{9\cdot 0.4^2}{3.325}=(0.085,0.433).$$

Όταν μας ενδιαφέρει η σύγκριση των διακυμάνσεων δύο ανεξάρτητων κανονικών πληθυσμών κατασκευάζουμε δ.ε. για τον λόγο τους $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$, όπου X και Y είναι τ.μ. που περιγράφουν κάποια ιδιότητα στα δύο ανεξάρτητα δείγματα από τους δύο πληθυσμούς, με μεγέθη n και m, αντίστοιχα.

Ισχύει ότι: $$\frac{(n-1)S_X'^{*2}}{\sigma_X^2} = \frac{nS_X'^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

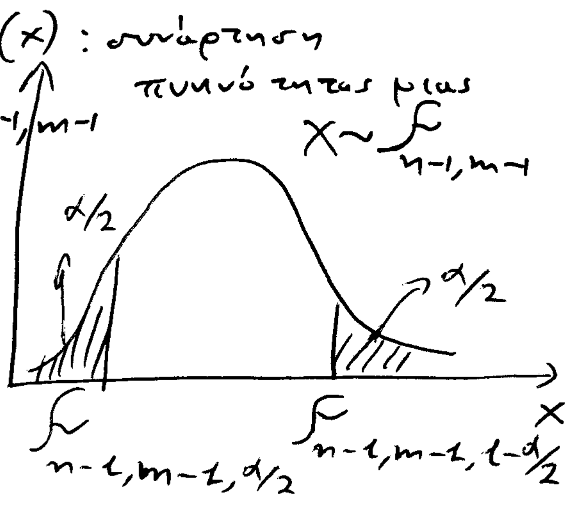
και $$\frac{(m-1)S_Y'^{*2}}{\sigma_Y^2} = \frac{mS_Y'^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2_{m-1},$$ όπου

$S_X'^{*2}$, $S_Y'^{*2}$ και $S_X'^2$, $S_Y'^2$ είναι οι δειγματικές διακυμάνσεις.

Ισχύει ότι: $$\frac{\dfrac{S_X'^{*2}}{\sigma_X^2}}{\dfrac{S_Y'^{*2}}{\sigma_Y^2}} = \frac{\dfrac{nS_X'^2}{(n-1)\sigma_X^2}}{\dfrac{mS_Y'^2}{(m-1)\sigma_Y^2}} \sim F_{n-1,m-1}$$

διότι $S_X'^2$, $S_Y'^2$ ανεξάρτητες τ.μ. (αφού X, Y ανεξάρτητες τ.μ.).

Σχηματικά για την $F_{n-1,m-1}$



$F_{n-1,m-1,\alpha/2}$: $P[X \le F_{n-1,m-1,\alpha/2}] = \alpha/2$

και $F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}$ είναι τ.ω. $P\left[X \le F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha/2$

όπου X τ.μ. $\sim F_{n-1,m-1}$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τον λόγο των δύο διακυμάνσεων στον πληθυσμό, διότι:

$$P\left\{ F_{n-1,m-1,\alpha/2} \le \frac{\dfrac{S'^{*2}_X}{\sigma_X^2}}{\dfrac{S'^{*2}_Y}{\sigma_Y^2}} \le F_{n-1,m-1,1-\alpha/2} \right\} = 1-\alpha$$

Ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για το λόγο $\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ δίνεται ως:

$$\left(F^{-1}_{n-1,m-1,1-\alpha/2} \frac{\dfrac{n S'^2_X}{n-1}}{\dfrac{m S'^2_Y}{m-1}} , F^{-1}_{n-1,m-1,\alpha/2} \frac{\dfrac{n S'^2_X}{n-1}}{\dfrac{m S'^2_Y}{m-1}} \right)$$

ή ισοδύναμα

$$\left(F^{-1}_{n-1,m-1,1-\alpha/2} \frac{S'^{*2}_X}{S'^{*2}_Y} , F^{-1}_{n-1,m-1,\alpha/2} \frac{S'^{*2}_X}{S'^{*2}_Y} \right)$$

<u>Σημείωση:</u> Οι πίνακες της κατανομής $F_{n,m}$ δεν δίνουν πάντα το κατώτερο ποσοστιαίο σημείο της κατανομής. Για διευκόλυνση στη χρήση των πινάκων της κατανομής $F_{n,m}$, ισχύει η σχέση:

$$F_{n,m,\alpha/2} = \frac{1}{F_{m,n,1-\alpha/2}}$$. Για την απόδειξη βλέπε Βιβλίο, σελ. 356-357.

Παράδειγμα 13

Σε 21 παιδιά ηλικίας 14 ετών που ζούσαν σε υψόμετρο 1500 μέτρων βρήκαμε διασπορά περιφέρειας στήθους $6cm^2$, ενώ η διασπορά της περιφέρειας στήθους 16 παιδιών που ζούσαν σε παραλιακά μέρη ήταν $4cm^2$. Βρείτε ένα 98% δ.ε. για το λόγο των διασπορών.

Λύση

Υψόμετρο 1500m	Υψόμετρο 0m
$S_1^{*2} = 6$	$S_2^{*2} = 4$
$n = 21$	$m = 16$
$n-1 = 20$	$m-1 = 15$

Είναι $\alpha = 0.02$ και $1-\alpha = 0.98$ ενώ $\alpha/2 = 0.01$.

Το ζητούμενο δ.ε. με βαθμό εμπιστοσύνης 98%, δίνεται ως:

$$\left(\frac{6}{4} F^{-1}_{20,15,0.99}, \frac{6}{4} F^{-1}_{20,15,0.01}\right) = \left(\frac{6}{4} F^{-1}_{20,15,0.99}, \frac{6}{4} F_{15,20,0.99}\right)$$

όπου $$F^{-1}_{20,15,0.01} = \frac{1}{F_{20,15,0.01}} = F_{15,20,0.99}$$

Από πίνακες της $F_{20,15}$ έχουμε: $\left(\frac{1.5}{3.37}, 1.5 \cdot 3.09\right)$

$$= (0.446, 4.64).$$