

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1. Ασκήσεις στη συνοπτική ανασκόπηση θεωρίας πιθανοτήτων

1. Η από κοινού συνάρτηση κατανομής των χρόνων ζωής X, Y δύο λαμπτήρων A, B σε χιλιάδες ώρες δίνεται από τον τύπο: $F(x, y) = (1 - e^{-4x^2})(1 - e^{-3y})$, $x, y > 0$ και $F(x, y) = 0$, αλλού.

(α) Να υπολογιστούν οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομών των τυχαίων μεταβλητών X και Y .

(β) Ποια είναι η πιθανότητα (i) και οι δύο λαμπτήρες να ζήσουν περισσότερο από 500 ώρες (ii) τουλάχιστον ένας από τους δύο λαμπτήρες να ζήσει περισσότερο από 500 ώρες;

(γ) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y . Ποια είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής (X, Y) ;

2. Έστω $X \sim \text{Bin}(n, p)$ και $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ και έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες. Δείξτε με δύο διαφορετικούς τρόπους (δηλαδή με χρήση ροπογεννητριών και χωρίς τη χρήση ροπογεννητριών) ότι $X + Y \sim \text{Bin}(n + m, p)$.

3. Έστω η διανυσματική τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας $f(x, y) = \frac{3}{2} \exp[-(x + y)]$, αν $0 < x < 2y$ και $f(x, y) = 0$, διαφορετικά. Να βρεθεί η συνδιακύμανση $\text{Cov}(5X + 4, 2 - Y)$.

4. Για τη τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = \theta e^{-\theta(x-a)}$, αν $x > a$ και $f(x) = 0$, διαφορετικά, όπου θ και a σταθερές θετικές παράμετροι, υπολογίστε:

(α) Τη συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και την πιθανότητα $P\left(\frac{a}{2} < X < a + 1\right)$.

(β) Τη ροπογεννήτρια $M(t) = E(e^{tx})$ για $t < \theta$.

(γ) Τη μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X .

5. Ένας μεταλλωρύχος είναι παγιδευμένος σ' ένα ορυχείο το οποίο έχει 3 πόρτες. Η πρώτη πόρτα οδηγεί σ' ένα τούνελ το οποίο τον απελευθερώνει μετά από πορεία 3 ωρών. Η δεύτερη πόρτα οδηγεί σ' ένα τούνελ το οποίο τον ξαναφέρει στο ορυχείο μετά από πορεία 5 ωρών. Η τρίτη πόρτα οδηγεί σ' ένα τούνελ το οποίο τον ξαναφέρει στο ορυχείο μετά από πορεία 7 ωρών. Αν υποθέσουμε ότι πάντοτε ο μεταλλωρύχος διαλέγει κάποια από τις τρεις πόρτες με την ίδια πιθανότητα, ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την απελευθέρωσή του; **Υπόδειξη:** Αν Y είναι ο χρόνος μέχρι την απελευθέρωση και X η πόρτα που διαλέγει αρχικά ο μεταλλωρύχος, χρησιμοποιήστε τη σχέση $E(Y) = E[E(Y | X)]$.

6. Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$. Έστω $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Δείξτε ότι η $Z_n = n(1 - Y_n)$ συγκλίνει κατά κατανομή, καθώς $n \rightarrow \infty$, σε μία τυχαία μεταβλητή Z που ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο ίση με τη μονάδα.