

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

-1-

ΦΥΛΛΑΔΙΟ #3-ΛΥΣΕΙΣ

$$\#1 \quad P(W > w) = P \left\{ \begin{array}{l} \text{να μην υπάρχει κανένα σωματίδιο} \\ \text{μέσα στην κυκλική περιοχή} \\ \text{επιπέδου αυτών w γύρω} \\ \text{από ένα σωματίδιο} \end{array} \right\}$$

$$= P(X(u) = 0) = e^{-\lambda u} = e^{-\lambda \pi w^2}, \text{ όπου}$$

$u = \pi w^2$ είναι το εμβαδόν κυκλικής περιοχής αυτών w .

$$F_W(w) = P(W \leq w) = 1 - e^{-\lambda \pi w^2}$$

$$f_W(w) = 2\pi\lambda w e^{-\lambda \pi w^2}, \quad w > 0$$

$$E(W) = \int_0^{\infty} w f_W(w) dw = 2\pi\lambda \int_0^{\infty} w^2 e^{-\lambda \pi w^2} dw$$

$$\text{Θέτουμε } t = \pi\lambda w^2, \text{ άρα } E[W] = \int_0^{\infty} e^{-t} \sqrt{\frac{t}{\pi\lambda}} dt$$

$$\text{Όπως } \Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \text{ όπου } \Gamma(a) \text{ είναι η συνάρτηση}$$

Γάμμα. Επομένως, θα έχουμε:

$$(b) \quad E[W] = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi\lambda}} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\sqrt{\pi\lambda}} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$$

#2 Η κίνηση των αυτοκινήτων που θα περάσουν από το δρόμο στα επόμενα 5 δευτερόλεπτα, γίνεται σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda' = 0.5$ αυτοκίνητα/5sec. Έστω τ.κ.

$X := \#$ αυτοκινήτων που θα περάσουν το δρόμο στα επόμενα 5 δευτερόλεπτα.

Τότε:

$$\begin{aligned} P(\text{να συνοπρωθεί ο λαδός}) &= P(X \geq 1) \\ &= 1 - P(X=0) = 1 - e^{-0.5} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

#3 Δεσφενόμαστε πάνω στις τιμές της τ.κ. $N(t)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - s_i) \mid N(t) = n \right] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^n (t - s_i) \mid N(t) = n \right] \\ &= nt - E \left[\sum_{i=1}^n s_i \mid N(t) = n \right] \end{aligned}$$

Έστω $U_1, U_2, \dots, U_n$ n-ανεξάρτητες τ.κ. ομοιόμορφα κατανοημένες στο διάστημα $(0, t)$. Χρησιμοποιώντας το γνωστό θεώρημα,

δοθέντος $N(t)=n$, οι τ.φ. $S_1, S_2, \dots, S_n$ έχουν την ίδια κατανομή μ' αυτήν των διατεταγμένων στατιστικών που αντιστοιχούν σε n ανεξάρτητες τ.φ. που είναι ομοιόμορφα καταμετρημένες στο διάστημα $(0, t)$, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^n S_i \mid N(t)=n\right] &= E\left[\sum_{i=1}^n U_{(i)}\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n U_i\right] = \sum_{i=1}^n E[U_i] = \frac{nt}{2}, \end{aligned}$$

όπου $U_{(i)}$ είναι η i -οστή μικρότερη από τις τ.φ.

$U_1, U_2, \dots, U_n, i=1, 2, \dots, n$. Άρα,

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i) \mid N(t)=n\right] = nt - \frac{nt}{2} = \frac{nt}{2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)\right] &= E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i) \mid N(t)=n\right]\right] \\ &= \frac{t}{2} E[N(t)] = \frac{t}{2} \lambda t = \frac{\lambda t^2}{2}, \end{aligned}$$

δίδει η τ.φ. $U \sim \text{Ομοιόμορφη}(a, b)$ τότε

$$E[U] = \frac{a+b}{2}, \text{ Επίσης, προφανώς ότι: } \sum_{i=1}^n U_{(i)} = \sum_{i=1}^n U_i.$$

#4

-4-

$$P[X_1(t)=n, X_2(t)=m]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P[X_1(t)=n, X_2(t)=m | X(t)=k] \cdot P[X(t)=k]$$

Is $X \in \mathcal{U}$: $P[X_1(t)=n, X_2(t)=m | X(t)=k] = 0$
 or $k \neq n+m$.

Apa,

$$P[X_1(t)=n, X_2(t)=m]$$

$$= P[X_1(t)=n, X_2(t)=m | X(t)=n+m]$$

$$P[X(t)=n+m]$$

$$= P[X_1(t)=n, X_2(t)=m | X(t)=n+m]$$

$$\cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}$$

$$= \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}$$

$$= e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t (1-p)} \frac{(\lambda t (1-p))^m}{m!}$$

Άρα,

-5-

$$\begin{aligned} P(X_1(t)=n) &= \sum_{m=0}^{\infty} P(X_1(t)=n, X_2(t)=m) \\ &= e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda t(1-p)} \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!} \\ &= e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^n}{n!}, n=0,1,2,\dots \end{aligned}$$

Κατά παρόμοιο τρόπο,

$$P[X_2(t)=m] = e^{-\lambda t(1-p)} \frac{[\lambda t(1-p)]^m}{m!}, m=0,1,2,\dots$$

Άρα, δείξαμε ότι: $X_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda p)$
και $X_2(t) \sim \text{Poisson}(\lambda(1-p))$.

#5 Βάσει της προηγούμενης άσκησης, ο αριθμός των ατόμων με αγγλική καταγωγή που μεταναστεύουν στην περιοχή Α κατά τη διάρκεια του Φεβρουαρίου, ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο ίση με: $\lambda t p = 10 \cdot 4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{10}{3}$.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$e^{-10/3}$$

Σ