

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3. Ασκήσεις στο Διωνυμικό Θεώρημα

1. Αν ν, r, k είναι θετικοί ακέραιοι με $0 \leq r \leq k \leq \nu$, να αποδειχτούν οι επόμενες ταυτότητες:

$$(a) \quad (k)_r \binom{\nu}{k} = (\nu)_r \binom{\nu-r}{k-r} \quad (\beta) \quad \nu \binom{\nu}{k} = k \binom{\nu+1}{k+1} + \binom{\nu}{k+1}.$$

2. Χρησιμοποιώντας το τρίγωνο του Pascal, δείξτε ότι, για οποιουδήποτε θετικούς ακέραιους ν, k με

$$1 \leq k \leq \nu, \text{ ισχύει } \binom{\nu+1}{k+1} = \sum_{j=k}^{\nu} \binom{j}{k}.$$

3. Εφαρμόζοντας την ταυτότητα της προηγούμενης άσκησης για $k=1$ και $k=2$, δείξτε ότι:

$$1+2+\dots+\nu = \sum_{j=1}^{\nu} j = \frac{\nu(\nu+1)}{2} \text{ και } 1^2+2^2+\dots+\nu^2 = \sum_{j=1}^{\nu} j^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

4. Αν ν, k είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχτούν οι επόμενες ταυτότητες:

$$(a) \quad \begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu \\ k-1 \end{bmatrix}, \quad (\beta) \quad \begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix} = \frac{\nu+k-1}{\nu-1} \begin{bmatrix} \nu-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

5. Ποιος είναι ο συντελεστής του όρου $x^8 y^{12}$ στο ανάπτυγμα $(3x+4y)^{20}$;

6. Αν r, ν είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $r \leq \nu$ και $x \in \mathfrak{R}$, να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$S = \sum_{k=r}^{\nu} \binom{\nu}{k} \binom{k}{r} x^k.$$

7. Με τη βοήθεια του αθροίσματος της προηγούμενης άσκησης, να υπολογιστούν τα αθροίσματα

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\nu} k \binom{\nu}{k} p^k q^{\nu-k} \text{ και } S_2 = \sum_{k=0}^{\nu} k(k-1) \binom{\nu}{k} p^k q^{\nu-k}.$$