

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4. Ασκήσεις στην αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού και στις Γεννήτριες Συναρτήσεις

1. Έστω ότι 100 φοιτητές εξετάζονται σε 3 θέματα. 100 απάντησαν σωστά σε τουλάχιστον ένα θέμα, 70 απάντησαν σωστά σε τουλάχιστον δύο θέματα, 10 απάντησαν σωστά σε τουλάχιστον τρία θέματα. Κάθε θέμα το γνώριζε ο ίδιος αριθμός φοιτητών. Ποιος είναι ο αριθμός των φοιτητών που δε γνωρίζουν το πρώτο θέμα;
2. Από τους μουσικούς μιας ορχήστρας, οι 12 παίζουν έγχορδο όργανο, 7 παίζουν πνευστό και 10 παίζουν κρουστό. Γνωρίζουμε επίσης ότι τρεις παίζουν και έγχορδο και πνευστό, τέσσερις παίζουν και πνευστό και κρουστό όργανο, 2 παίζουν έγχορδο και κρουστό ενώ υπάρχει ένας που παίζει και τα τρία είδη οργάνων. Πόσοι είναι οι μουσικοί;
3. Πόσοι από τους $n = 70$ αριθμούς $1, \dots, 70$ δε διαιρούνται ούτε με 2, ούτε με 3, ούτε με 11;
4. Πόσοι ακέραιοι αριθμοί μεταξύ 1 και 300 διαιρούνται (α) με τουλάχιστον έναν εκ των 3, 5, 7; (β) διαιρούνται με το 3, με το 5 αλλά όχι με το 7; (γ) διαιρούνται με το 5 αλλά δε διαιρούνται ούτε με το 3 ούτε με το 7;
5. Να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \sum_{k=0}^v (3k^2 - 2k + 1) \binom{v}{k} 5^k$.
6. Να υπολογιστεί το άθροισμα $\sum_{k=0}^v \frac{1}{k+1} \binom{v}{k} 3^k$.
7. Να υπολογιστεί το άθροισμα $\sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^k$.