ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ #7

Ασκήσεις στους ελέγχους υποθέσεων

#1 Από ορισμένη παραγωγική διαδικασία παράγονται χάπια στα οποία η περιεκτικότητα σε ορισμένη δραστική ουσία ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 5$gr και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.1$gr. Η παραγωγική διαδικασία ελέγχεται καθημερινά σε τυχαίο δείγμα $n = 15$ χαπιών. Αν στο δείγμα μιας μέρας υπολογίσαμε $\bar{X} = 5.05$gr και $s^* = 0.14$gr, ζητείται:

(a) Να γίνει ο αμφίπλευρος έλεγχος της υπόθεσης $\mu = 5$gr σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha = 0.05$.

(β) Να υπολογιστεί η p-τιμή του ελέγχου.

Λύση (a) Η κατανομή της περιεκτικότητας X είναι κανονική με τυπική απόκλιση $\sigma = 0.1$gr. Ελέγχουμε την $H_0: \mu = 5$ έναντι της εναλλακτικής $H_1: \mu \neq 5$, σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$.

Για $\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$, έχουμε:

$z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$. Είναι $\mu_0 = 5$gr.

Αν $Z_0 = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ή $Z_0 < -z_{1-\alpha/2}$ απορρίπτουμε την H_0 σε ε.σ.σ. α. Επειδή $Z_0 = \dfrac{5.05 - 5}{0.1/\sqrt{5}} = 1.94 < 1.96$ δεν υπάρχουν ενδείξεις για να απορρίψουμε την H_0 σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$.

(β) Η p-τιμή είναι το ελάχιστο επίπεδο σημαντικότητας στο οποίο μπορεί να απορριφθεί η H_0.

Η p-τιμή υπολογίζεται ως εξής:

$$p\text{-τιμή} = P(Z_0 > 1.94) + P(Z_0 < -1.94)$$

$$\underset{\text{λόγω συμμετρίας}}{=} 2P(Z_0 > 1.94) = 2[1 - P(Z_0 < 1.94)]$$

$$= 2[1 - F_{Z_0}(1.94)]$$

$$= 2[1 - 0.97381]$$

$$= 0.05238 = \hat{\alpha}$$

Για κάθε $\alpha \geq p$-τιμή υπάρχουν ενδείξεις απόρριψης της H_0 και για κάθε $\alpha < p$-τιμή <u>δεν</u> υπάρχουν ενδείξεις απόρριψης της H_0.

#2 Ο σύλλογος καταναλωτών για να εξακριβώσει αν τα κουτιά των 100gr καφέ περιέχουν πραγματικά 100gr ζύγισε 9 κουτιά τυχαία επιλεγμένα από διάφορα καταστήματα και βρήκε $\bar{X} = 96$gr και $S^* = 1.8$gr.

(α) Παρέχουν τα δεδομένα ισχυρές ενδείξεις για να υποστηρίξουμε ότι τα κουτιά των 100gr είναι ελλιποβαρή; Ελέγξτε τον ισχυρισμό σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$.

(β) Υπολογίστε την p-τιμή του ελέγχου του ερωτήματος (α).

(γ) Βρείτε ένα 95% δ.ε. για την πραγματική τιμή της παραμέτρου μ που αναπαριστά το μέσο βάρος στον πληθυσμό των κουτιών του καφέ.

<u>Λύση</u> (α) Ελέγχουμε την $H_0: \mu = 100$ έναντι της εναλλακτικής $H_1: \mu < 100$. Το δείγμα είναι "μικρό", $n = 9$, και η διασπορά σ^2 είναι άγνωστη. Απορρίπτουμε την H_0 σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$, αν:

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S^*/\sqrt{n}} < -t_{n-1;1-\alpha}$$

Είναι $T_0 = \dfrac{(96-100)\sqrt{9}}{1.8} = -6.67$

Από τους πίνακες της t_{n-1} για $n=9$, έχουμε: $t_{8;0.95} = 1.860$. Επειδή $T_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$, τα δεδομένα παρέχουν ενδείξεις απόρριψης της H_0, συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι τα κουτιά του καφέ των 100γρ είναι ελλιποβαρή.

(β) Είναι p-τιμή $= \hat{\alpha} = P(T_0 < -6.67) = P(T_0 > 6.67)$

λόγω συμμετρίας της t_{n-1}

Από τον πίνακα της t_8-κατανομής, η παραπάνω πιθανότητα είναι μικρότερη από 0.005. Συνεπώς, στο test του ερωτήματος (α), η H_0 απορρίπτεται για ε.σ.σ. που συνήθως χρησιμοποιούμε π.χ. $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.01$ κλπ.

(γ) Επειδή "n μικρό" και σ^2 άγνωστο, ένα 95% δ.ε. για την παράμετρο μ, θα δίνεται ως:

$$\left(\overline{X} - \frac{S^*}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\alpha/2},\ \overline{X} + \frac{S^*}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\alpha/2}\right)$$

$$= \left(96 - \frac{1.8}{\sqrt{9}} t_{8;0.975},\ 96 + \frac{1.8}{\sqrt{9}} t_{8;0.975}\right)$$

$$= \left(96 - \frac{1.8}{3} 2.306,\ 96 + \frac{1.8}{3} 2.306\right)$$

$$= (94.62,\ 97.38)$$

#3 Η ατμοσφαιρική ρύπανση μίας πόλης με ορισμένη χημική ουσία θεωρείται ανεκτή, όταν η μέση περιεκτικότητα ανά m^3 αέρος δεν είναι μεγαλύτερη από 7mgr, ενώ θεωρείται επικίνδυνη όταν ξεπερνά τα 7.9mgr. Για να ελεγχθεί η υπόθεση $H_0: \mu = 7$ έναντι της $H_1: \mu > 7$, καθημερινά γίνονται μετρήσεις σε n τυχαία σημεία της πόλης. Αν επιθυμούμε η πιθανότητα εσφαλμένης απόρριψης της H_0 να ισούται με 0.10 και η πιθανότητα εσφαλμένης αποδοχής της, όταν $\mu = 7.9$ να ισούται με 0.001, να προσδιοριστεί:

(α) Το μέγεθος του δείγματος, δηλ. ο αριθμός των μετρήσεων που πρέπει να κάνουμε καθημερινά.

(β) Η κριτική τιμή του δειγματικού μέσου πέρα από την οποία θα λαμβάνονται μέτρα ασφαλείας. Η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι γνωστή και ίση με $\sigma = 4.8$ mgr.

<u>Λύση</u> (α) Είναι $H_0: \mu = 7$
$H_1: \mu > 7$

Θέλουμε να ισχύει: $\alpha = 0.10 = P(\text{απόρριψης } H_0 | \mu = 7)$

Αφού $\alpha = 0.1 \Rightarrow z_{1-\alpha} = z_{0.90} = 1.28$ και

$$\beta = 0.001 = P(\text{αποδοχής } H_0 | \mu = 7.9)$$

Έστω $\bar{X}_c$ η κριτική (ή κρίσιμη) τιμή του δειγματικού μέσου $\bar{X}_n$ που ορίζει τις περιοχές απόρριψης και αποδοχής της H_0. Τότε:

$$\beta = 0.001 = P(\bar{X}_n < \bar{X}_c | \mu = 7.9)$$

$$\Rightarrow \beta = P\left(\frac{\bar{X}_n - 7.9}{4.8/\sqrt{n}} < \frac{\bar{x}_{c'} - 7.9}{4.8/\sqrt{n}} \right) = P\left(Z_1 < \frac{\bar{x}_{c'} - 7.9}{4.8/\sqrt{n}} \right) \quad (1)$$

Από τους πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής βρίσκουμε ότι: $P(Z_1 < -3.09) = 0.001$, διότι

$$P(Z_1 < 3.09) = 0.999 \Leftrightarrow P(Z_1 > 3.09) = P(Z_1 < -3.09) = 0.001 \quad (2)$$

Συνεπώς, από (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{\bar{x}_{c'} - 7.9}{4.8/\sqrt{n}} = -3.09 \Leftrightarrow \bar{x}_{c'} = 7.9 - 3.09 \frac{4.8}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

Επιπλέον, για τον μονόπλευρο έλεγχο $H_0: \mu = 7$, $H_1: \mu > 7$

ισχύει ότι

$$\bar{x}_c = \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7 + 1.28 \frac{4.8}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) λαμβάνουμε:

$$7.9 - 3.09 \frac{4.8}{\sqrt{n}} = 7 + 1.28 \frac{4.8}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{6.144 + 14.832}{\sqrt{n}} = 0.9 \Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{20.976}{0.9}$$

$$\Rightarrow n = 543.2 \cong 543$$

$\Rightarrow \boxed{n \cong 543}$ Χρειαζόμαστε περίπου 543 μετρήσεις καθημερινά για να έχουμε: $\alpha = 0.1$ και $\beta = 0.001$ (όταν $\mu = 7.9$).

(β) Η κρίσιμη (ή κριτική) τιμή του δειγματικού μέσου πέρα από την οποία θα λαμβάνονται μέτρα ασφαλείας είναι: $\bar{X}_c = 7.9 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7.9 - 1.28\,\frac{4.8}{\sqrt{543}}$

$= 7.636\ mgr/m^3$.

#4 Να εκτιμηθεί το διάστημα με επίπεδο εμπιστοσύνης 0.95 στο οποίο θα βρίσκεται η μέση εσωτερική διάμετρος ενός κυλίνδρου αν σε τυχαίο δείγμα $n=27$ κυλίνδρων υπολογίσαμε $\bar{X} = 4.82$ cm και $s^* = 1$ cm. Η διάμετρος ακολουθεί την κανονική κατανομή. Με βάση το διάστημα αυτό, μπορεί να γίνει δεκτή η υπόθεση $H_0: \mu = 5$ έναντι της $H_1: \mu \neq 5$ σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$;

Λύση Η κατανομή του πληθυσμού είναι κανονική με άγνωστη διασπορά. Η τ.μ. $T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{s^*/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Το 95% δ.ε. που περιέχει τη μέση εσωτερική διάμετρο μ υπολογίζεται ως εξής:

$$\bar{X} - t_{n-1;1-\alpha/2}\frac{s^*}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{n-1;1-\alpha/2}\frac{s^*}{\sqrt{n}}$$

Από τους πίνακες της t_{26} έχουμε:

$t_{26;0.975} = 2.056$

Το ζητούμενο διάστημα είναι:

$$4.82 - 2.056\frac{1}{\sqrt{27}} \le \mu \le 4.82 + 2.056\frac{1}{\sqrt{27}}$$

$\Leftrightarrow 4.4243 \leq \mu \leq 5.216$

Σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$, υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις μη-απόρριψης της $H_0: \mu = 5$ διότι το δ.ε. περιέχει τη μέση τιμή $\mu = 5cm$ με πιθανότητα $1-\alpha = 95\%$.

<u>Το μέγεθος του δείγματος</u> Το μέγεθος του δείγματος παίζει

σημαντικό ρόλο στη Στατιστική και στον υπολογισμό δ.ε. για μία παράμετρο που μας ενδιαφέρει. Όσο μεγαλύτερο είναι το δείγμα τόσο μικρότερο είναι το εύρος του δ.ε. που εκτιμάται. Το να αυξηθεί όμως το δείγμα δεν είναι πάντοτε δυνατό (πολύς χρόνος, μεγάλο κόστος). Κάτι λοιπόν που θα μπορούσε να βοηθήσει πολύ είναι να γνωρίζει κανείς πόσο μεγάλο δείγμα πρέπει να λάβει ώστε να καταλήξει σε ασφαλή συμπεράσματα δηλ. σε συμπεράσματα που να ανταποκρίνονται στα σφάλματα τύπου I και II που επιθυμεί, στο εύρος του διαστήματος που θέλει κλπ.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω ότι το βάρος σκύλων ράτσας fox terrier ακολουθεί κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση $\sigma = 2.5 Kg$. Πόσο μεγάλο δείγμα πρέπει να λάβουμε ώστε να είμαστε 95% σίγουροι ότι η δειγματική μέση τιμή και η μέση τιμή του πληθυσμού δεν διαφέρουν περισσότερο από 0.5 Kg;

<u>Λυση</u> Έστω X τ.μ. που μετρά το βάρος των σκύλων

Τότε: $X \sim N(\mu, 2.5^2) \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{2.5^2}{n}\right)$ και

$\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1)$. Από τον ορισμό των δ.ε. και τους πίνακες της $N(0,1)$ ένα 95% δ.ε. δίνεται ως:

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} < z_{1-\alpha/2}\right) = 0.95$$

και είναι το διάστημα: $-1.96 < \dfrac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} < 1.96$

Εάν n^* είναι το μικρότερο n για το οποίο ισχύουν οι συνθήκες του Παραδείγματος τότε θα πρέπει:

$$\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n^*}}{\sigma} = 1.96 \text{ και επιπλέον } \overline{X}-\mu = 0.5$$

Συνεπώς $n^* = 1.96^2 \dfrac{2.5^2}{0.5^2} = 96$. Πράγματι, για $n > n^*$ η διαφορά $\overline{X}-\mu$ γίνεται μικρότερη άρα n^* είναι το μικρότερο n για το οποίο είμαστε βέβαιοι με πιθανότητα 0.95 ότι η δειγματική μέση τιμή και η μέση τιμή του πληθυσμού διαφέρουν το πολύ κατά 0.5 Kg.

<u>Παράδειγμα</u> Από έναν πολύ μεγάλο αριθμό νεοσυλλέκτων παίρνεται ένα τ.δ. μεγέθους n. Το μέσο βάρος των νεοσυλλέκτων του δείγματος υπολογίστηκε στα 64 Kg και η δειγματική τυπική απόκλιση S^* είναι $S^* = 4$ Kg. Έστω ότι το 90% δ.ε. πρέπει να έχει εύρος το πολύ 2 Kg. Τι μέγεθος δείγμα θα πρέπει να ληφθεί αν $n \geq 30$;

<u>Λύση</u> Έστω d το εύρος του δ.ε. Τότε $d = 2$. Από το Κ.Ο.Θ. $\Rightarrow \dfrac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S^*} \sim N(0,1)$. Ένα 90% δ.ε. δίνεται από τη σχέση:

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{s^*} < z_{1-\alpha/2}\right) = 0.9$$ και είναι

το διάστημα: $-1.64 < \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{s^*} < 1.64 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{x} - 1.64\frac{s^*}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + 1.64\frac{s^*}{\sqrt{n}}$ με

εύρος $d = 2 \cdot 1.64 \frac{s^*}{\sqrt{n}} = 3.28 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}}$ Όμως $d=2$ είναι

η μέγιστη τιμή που επιτρέπεται για το εύρος του

διαστήματος και συνεπώς $n = \left(\frac{3.28 \cdot 4}{2}\right)^2 = 43.03$

είναι το μικρότερο n που δίνει 90% δ.ε. με εύρος το πολύ 2 Kg. Πρέπει να ληφθεί τ.δ. το λιγότερο 44 νεοσυλλέκτων, ώστε το 90% δ.ε. να πληρεί τις απαιτήσεις που τέθηκαν.

Γενικά ισχύει $n \geq \left[\frac{z_{1-\alpha/2}\,\sigma}{d}\right]^2$, όταν η διασπορά σ^2 του πληθυσμού είναι γνωστή και το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. πρέπει να έχει εύρος το πολύ d.

Όταν σ^2 άγνωστο, χρησιμοποιείται η αμερόληπτη (ή η μεροληπτική) εκτιμήτριά του.

#5 Σε μία χημική αντίδραση είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθεί ένα διάλυμα με δείκτη pH ίσο με 8.30. Μία μέθοδος προσδιορισμού του δείκτη pH δίνει μετρήσεις που προσεγγιστικά ακολουθούν την $N(\mu, \sigma^2=(0.02)^2)$. Έξι μετρήσεις του δείκτη pH έδωσαν τις τιμές

8.34, 8.29, 8.30, 8.31, 8.3, 8.32, για ένα συγκεκριμένο διάλυμα.

(α) Μπορούμε να ισχυριστούμε, σε ε.σ.σ. $\alpha = 5\%$ ότι ο δείκτης pH του διαλύματος είναι 8.3;

(β) Αν θέλουμε να είμαστε σίγουροι 95% ότι η αρχική υπόθεση $H_0: \mu = 8.3$ δεν γίνεται δεκτή όταν ο πραγματικός δείκτης είναι > 8.33 ή < 8.27 τότε, πόσες μετρήσεις θα πρέπει να λάβουμε;

(γ) Να υπολογιστεί το μέγεθος του σφάλματος τύπου II που διαπράττουμε στην περίπτωση (α), όταν $\mu = 8.32$.

<u>Λύση</u> (α) Αν X τ.μ. που μετρά το δείκτη pH τότε:

$X \sim N(\mu, 0.02^2)$. Οι $n=6$ μετρήσεις $x_i, i=1,\dots,6$ της τ.μ. X δίνουν $\bar{x} = 8.31$, $s^{*2} = 0.00032$, $s^* = 0.018$

Για τον έλεγχο $H_0: \mu = 8.3$ έναντι της $H_1: \mu \neq 8.3$ η απορριπτική περιοχή της H_0 είναι η.ω.

$$|Z_0| > Z_{1-\alpha/2} \quad \text{όπου} \quad Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{8.31 - 8.3}{0.02/\sqrt{6}} = 1.22$$

$z_{0.975} = 1.96$

Σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$ <u>δεν</u> υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις απόρριψης της $H_0: \mu = 8.3$.

(β) Σύμφωνα με το ερώτημα (β) η Ho γίνεται δεκτή, όταν ο πραγματικός δείκτης είναι μικρότερος της τιμής 8.33 και μεγαλύτερος της τιμής 8.27 όταν δηλαδή ανήκει στο διάστημα (8.27, 8.33) ή σε δ.ε. εύρους $d = 0.06$.

Το μέγεθος του δείγματος που πρέπει να λάβουμε είναι: $n \geq \left[\frac{z_{1-\alpha/2}\,\sigma}{d}\right]^2 = \left[\frac{1.96 \cdot 0.02}{0.06}\right]^2 = 0.43$

δηλ. το λιγότερο μία μέτρηση πρέπει να λάβουμε για να πληρούνται οι προϋποθέσεις που θέλουμε.

(γ) Το σφάλμα τύπου II είναι η πιθανότητα:

$P(H_0 \text{ δεκτή} \mid H_1 \text{ σωστή})$. Όταν η πραγματική μέση τιμή είναι $\mu = 8.32$ η παραπάνω πιθανότητα δίνει:

$$P\left(\left|\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right| < z_{1-\alpha/2} \,\middle|\, \mu = 8.32 \right)$$

$$= P\left(\frac{|\bar{X}-8.3|\sqrt{6}}{0.02} < 1.96 \,\middle|\, \mu = 8.32 \right)$$

$$= P\left(|\bar{X}-8.3| < \frac{1.96 \cdot 0.02}{\sqrt{6}} \,\middle|\, \mu = 8.32 \right)$$

$$= P\left(-0.016 < \bar{X} - 8.3 < 0.016 \,\middle|\, \bar{X} \sim N\left(8.32, \frac{0.02^2}{6}\right)\right)$$

$$= P\left(8.284 < \bar{X} < 8.316 \,\middle|\, \frac{(\bar{X}-8.32)\sqrt{6}}{0.02} \sim N(0,1) \right)$$

$$= P\left(\frac{(8.284-8.32)\sqrt{6}}{0.02} < Z < \frac{(8.316-8.32)\sqrt{6}}{0.02} \right)$$

$$= P(-4.41 < Z < -0.49) = \Phi(-0.49) - \Phi(-4.41)$$

$$= 0.3121.$$

#6 Αν σε τυχαίο δείγμα $n=36$ προϊόντων βρήκαμε 2 ελαττωματικά, ζητείται:

(α) Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι το ποσοστό των ελαττωματικών στο σύνολο της παραγωγής δεν είναι μεγαλύτερο από 2% σε ε.σ.σ. $\alpha=0.05$. Να υπολογιστεί η p-τιμή του ελέγχου.

(β) Στον προηγούμενο έλεγχο, ποια είναι η πιθανότητα εσφαλμένης αποδοχής της H_0, όταν το ποσοστό ισούται με 3%;

Λύση (α) Ελέγχουμε: $H_0: p=0.02$ έναντι της $H_1: p>0.02$

Για $\alpha=0.05 \Rightarrow z_{1-\alpha}=z_{0.95}=1.645$.

Αν
$$Z_0=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}>z_{1-\alpha}=1.645$$
απορρίπτουμε την H_0 σε ε.σ.σ. $\alpha=0.05$.

Είναι $\hat{p}=\frac{2}{36}=0.056$ (δειγματική αναλογία)

Επειδή
$$Z_0=\frac{0.056-0.02}{\sqrt{\frac{(0.02)(0.98)}{36}}}=1.543<1.645$$
η H_0 δεν απορρίπτεται σε ε.σ.σ. $\alpha=0.05$.

Η p-τιμή του ελέγχου είναι:

$$\hat{\alpha}=p\text{-τιμή}=P(Z_0>1.543)=1-P(Z_0<1.543)$$
$$=1-0.93822=0.06178.$$

Η H_0 απορρίπτεται κάθε φορά που:

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - 0.02}{\sqrt{\frac{(0.02)(0.98)}{36}}} > z_{0.95} = 1.645 \text{ (σε ε.σ.σ. } \alpha = 0.05)$$

ή ισοδύναμα κάθε φορά που:

$$\hat{P} > 0.02 + 1.645 \cdot \sqrt{\frac{(0.02)(0.98)}{36}} = 0.058$$

Επομένως, η πιθανότητα εσφαλμένης αποδοχής της H_0 όταν $p = 0.03$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\beta = P(\text{αποδοχής } H_0 / p = 0.03)$$

$$= P(\hat{P} < 0.058 / p = 0.03)$$

$$= P\left(Z < \frac{0.058 - 0.03}{\sqrt{\frac{(0.03)(0.97)}{36}}} = 1.2\right) = F_Z(1.2)$$

$$= 0.88493$$

(από πίνακες της $N(0,1)$).

όπου $Z = \dfrac{\hat{P} - 0.03}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$

#7 Φαρμακευτική εταιρεία θέλει να δοκιμάσει δύο νέα αναισθητικά για οδοντιατρική χρήση. Σε τ.δ. $n_A = 11$ δοκιμών με το A αναισθητικό, υπολόγισε μέσο χρόνο αναισθησίας $\overline{X}_A = 32$ sec και $S_A^* = 9.2$ sec και σε τυχαίο δείγμα $n_B = 25$ δοκιμών με το B αναισθητικό, υπολόγισε μέσο χρόνο αναισθησίας $\overline{X}_B = 13.7$ και $S_B^* = 8.4$ sec. Να ελεγχθεί η υπόθεση σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$, ότι ο μέσος χρόνος δεν διαφέρει στα δύο αναισθητικά. Δίνεται ότι η κατανομή του χρόνου είναι κανονική και μπορεί να υποτεθεί ότι η διασπορά του χρόνου είναι ίδια για τα δύο αναισθητικά.

<u>Λύση</u> Έστω X_A, X_B ο χρόνος αναισθησίας του A και του B αναισθητικού, αντίστοιχα. Οι τ.μ. X_A, X_B ακολουθούν την κανονική κατανομή με $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$, δηλαδή $X_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$, $X_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$.

Ελέγχουμε: $H_0: \mu_A = \mu_B$ έναντι της $H_1: \mu_A \neq \mu_B$.

Ο έλεγχος θα γίνει με το κριτήριο της κατανομής t. Εκτιμούμε την κοινή διακύμανση σ^2 με την:

$$S_p^{*2} = \frac{(n_A - 1)\, S_A^{*2} + (n_B - 1)\, S_B^{*2}}{n_A + n_B - 2} = \frac{10 \cdot (9.2)^2 + 24 \cdot (8.4)^2}{11 + 25 - 2}$$

$$= 79.27 \text{ και } S_p^* = \sqrt{74.70} = 8.64$$

Η κριτική τιμή της $t_{n_A + n_B - 2; 1 - \alpha/2} = t_{34; 0.975}$ είναι 2.030. Η στατιστική συνάρτηση ελέγχου είναι:

$$T_0 = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{S_p^* \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} = \frac{32 - 13.7}{8.64 \sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{25}}} = 5.85$$

Επειδή $|T_0| > t_{34; 0.975}$ η H_0 <u>δεν</u> απορρίπτεται σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$.

#8 Σε τυχαίο δείγμα από 100 εργάτριες σε βιοτεχνίες ενδυμάτων της Αθήνας βρέθηκαν 25 ανασφάλιστες, ενώ σε ανάλογο δείγμα από 150 εργάτριες της Πάτρας βρέθηκαν 28 ανασφάλιστες. Να ελεγχθεί σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha = 0.05$ η υπόθεση ότι, για τις βιοτεχνίες ενδυμάτων, το ποσοστό ανασφάλιστων στις δύο πόλεις είναι το ίδιο.

Λύση Επειδή τα δύο δείγματα είναι τυχαία και ανεξάρτητα, ο έλεγχος για τη μη-μηδενική διαφορά των αναλογιών p_1, p_2 στις βιοτεχνίες Αθήνας και Πάτρας, αντίστοιχα, θα είναι:

$$H_0: p_1 = p_2 = p \quad \text{έναντι της}$$

$$H_1: p_1 \neq p_2$$

Για $\alpha = 0.05$ έχουμε: $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$

Αν

$$|z_0| = \frac{|\hat{p}_1 - \hat{p}_2|}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} > z_{1-\alpha/2}$$

θα απορρίψουμε την H_0 σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$.

Όμως $\hat{p}_1 = \frac{25}{100} = 0.25$ και $\hat{p}_2 = \frac{28}{150} = 0.187$

Εκτιμούμε την κοινή αναλογία $\hat{p}$ με:

$$\hat{p} = \frac{25+28}{150+100} = 0.212$$

Άρα:

$$|z_0| = \frac{|0.25 - 0.187|}{\sqrt{(0.212)(0.788)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{150}\right)}} = \frac{0.063}{0.053} = 1.19 < 1.96$$

Συνεπώς, η H_0 σε ε.σ.σ. $\alpha=0.05$ δεν απορρίπτεται.

#9 Σύμφωνα με τη δήλωση του παραγωγού, η αναλογία των ελαττωματικών προϊόντων δεν είναι μεγαλύτερη από 0.07. Η δήλωση αυτή ελέγχεται καθημερινά από τον αγοραστή σε τυχαίο δείγμα $n=70$ προϊόντων και σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha=0.05$. Ζητείται:

(a) Να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος τύπου II στον έλεγχο αυτό, όταν η αναλογία ισούται με 0.1.

(β) Αν στο δείγμα μιας μέρας, βρεθούν $X=8$ ελαττωματικά, η δήλωση του παραγωγού θα γίνει δεκτή ή θα απορριφθεί;

Λύση Ελέγχουμε την $H_0: p=0.07$ έναντι της $H_1: p>0.07$.

Η H_0 θα γίνεται δεκτή όταν:
$$\frac{\hat{p}_X-0.07}{\sqrt{\frac{(0.07)(0.93)}{70}}}<z_{1-\alpha}=z_{0.95}=1.645$$

ή όταν:
$$\hat{p}_X<0.07+1.645\cdot\sqrt{\frac{(0.07)(0.93)}{70}}=0.12$$

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα σφάλματος τύπου II υπολογίζεται ως εξής:

$$\beta=P(H_0 \text{ δεκτή} \mid H_1 \text{ σωστή})=P(\hat{p}_X<0.12 / p=0.1)$$
$$=P\left(\frac{\hat{p}_X-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}<\frac{0.12-0.1}{\sqrt{\frac{(0.1)(0.9)}{70}}}\right)=P(Z<0.56)$$
$$=F_Z(0.56)=0.71226$$

όπου Z τ.μ. $\sim N(0,1)$

Για $X=8 \Rightarrow \hat{p}_x = \frac{X}{n} = \frac{8}{70} = 0.11$

και επειδή $Z_0 = \dfrac{\hat{p}_x - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{0.11-0.07}{\sqrt{\dfrac{(0.07)(0.93)}{70}}}$

$= 1.31 < 1.645$

η H_0 <u>δεν</u> απορρίπτεται σε ε.σ.σ. $a=0.05$.

<u>#10</u> Ερώτημα (γ) στην Άσκηση 1, Φροντιστήριο #7.

(γ) Να ελεγχθεί η υπόθεση $\sigma^2=0.1$ έναντι της εναλλακτικής $\sigma^2>0.1$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha=0.05$.

<u>Λύση(γ)</u> Η κατανομή του πληθυσμού είναι κανονική και το δείγμα τυχαίο.

Ελέγχουμε: $H_0: \sigma^2=0.1$ έναντι της $H_1: \sigma^2>0.1$.

Για $\alpha=0.05$ και $n-1=15-1=14$ βαθμούς ελευθερίας βρίσκουμε από τον πίνακα της κατανομής χ^2_{14} το ποσοστιαίο σημείο $\chi^2_{14;1-\alpha} = \chi^2_{14;0.95} = 23.68$.

Η στατιστική συνάρτηση του ελέγχου X_0^2 δίνει:

$$X_0^2 = \frac{(n-1)s^{*2}}{\sigma_0^2} = \frac{14\cdot(0.14)^2}{0.1} = 2.744 < 23.68$$

Επομένως, σε ε.σ.σ. $\alpha=0.05$ δεν υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις απόρριψης της H_0.