

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

#1 Μία βιομηχανία διαθέτει δύο εργοστάσια E_1, E_2 που παράγουν τρία προϊόντα π_1, π_2, π_3 . Η ωριαία δυνατότητα των εργοστασίων, δηλαδή ο αριθμός των μονάδων προϊόντων που παράγουν σε μία ώρα λειτουργίας δίνεται από τον πίνακα:

	π_1	π_2	π_3
E_1	4	2	3
E_2	3	6	5

Το κόστος ωριαίας λειτουργίας για τα E_1, E_2 είναι 20 και 40 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα ενώ η υπερωριακή λειτουργία τους επιβαρύνει τη βιομηχανία με 30 και 60 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα για κάθε πρόσθετη ώρα απασχόλησης. Απαιτούνται τουλάχιστον 30, 70 και 60 μονάδες από τα προϊόντα π_1, π_2 και π_3 , κάθε μέρα. Αν η διάρκεια κανονικής λειτουργίας των εργοστασίων είναι το πολύ 8 ώρες και η υπερωριακή απασχόληση δεν επιτρέπεται να υπερβεί τις 3 ώρες την ημέρα, πόσες ώρες πρέπει να λειτουργεί κάθε εργοστάσιο ώστε το συνολικό κόστος να ελαχιστοποιείται; Να δίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.

Λύση Έστω x_i οι ώρες κανονικής λειτουργίας και y_i οι ώρες υπερωριακής λειτουργίας για το εργοστάσιο E_i , $i=1, 2$ την ημέρα. Τότε οι συνολικές παραχόμενες ποσότητες από κάθε προϊόν είναι:

$$4(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) \text{ για το } \pi_1$$

$$2(x_1 + y_1) + 6(x_2 + y_2) \text{ για το } \pi_2$$

$$3(x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2) \text{ για το } \pi_3$$

Συνεπώς, η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος ως π.γ.π. είναι:

$$\min(20x_1 + 40x_2 + 30y_1 + 60y_2)$$

-2-

$$4(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) \geq 30$$

$$2(x_1 + y_1) + 6(x_2 + y_2) \geq 70$$

$$3(x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2) \geq 60$$

$$0 \leq x_1, x_2 \leq 8$$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 3.$$

#2 Ένας συνεταιρισμός πορτοκαλοπαραγωγών έχει δύο αποθήκες A_1 και A_2 στις οποίες υπάρχουν 200 και 300 τόνοι πορτοκάλια, αντίστοιχα. Τρεις λαχαναγορές $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ θέλουν 250, 160 και 90 τόνους πορτοκάλια. Το κόστος μεταφοράς σε ευρώ ανά τόνο από κάθε αποθήκη σε κάθε λαχαναγορά δίνεται από τον πίνακα:

	Λ_1	Λ_2	Λ_3
A_1	15	18	16
A_2	17	13	20

Ο συνεταιρισμός θέλει να ελαχιστοποιήσει το κόστος μεταφοράς.

- (i) Να γίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.
- (ii) Αν η λαχαναγορά Λ_1 θέλει μόνο 220 τόνους και αναχασθεί ο συνεταιρισμός να καταστρέψει τους υπόλοιπους 30 τόνους με κόστος 50 ευρώ τον τόνο, ποια είναι η αντίστοιχη μαθηματική διατύπωση;
- (iii) Αν η λαχαναγορά Λ_3 χρειάζεται 120 τόνους και για να εκπληρώσει ο συνεταιρισμός τις υποχρεώσεις του αγοράζει πορτοκάλια για την αποθήκη A_2 από τους παραγωγούς με τιμή 8 ευρώ τον τόνο πάνω από την κανονική, ποια είναι η αντίστοιχη μαθηματική διατύπωση;

Λύση (i) Έχουμε ένα πρόβλημα μεταφοράς του οποίου τα δεδομένα συνοψίζονται στον πίνακα:

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Διαθέσιμες ποσότητες
A_1	15	18	16	200
A_2	17	13	20	300
Απαιτούμενες ποσότητες	250	160	90	500

Έστω x_{ij} , $i=1,2$, $j=1,2,3$, η ποσότητα πορτοκαλιών σε τόνους που στέλνεται από την αποθήκη A_i στη λαχαναγορά Λ_j . Η γραμμική διατύπωση του προβλήματος είναι:

$$\begin{aligned} \min & (15x_{11} + 18x_{12} + 16x_{13} + 17x_{21} + 13x_{22} + 20x_{23}) \\ & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200 \quad (A_1) \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300 \quad (A_2) \\ & x_{11} + x_{21} = 250 \quad (\Lambda_1) \\ & x_{12} + x_{22} = 160 \quad (\Lambda_2) \\ & x_{13} + x_{23} = 90 \quad (\Lambda_3) \\ & x_{ij} \geq 0, i=1,2, j=1,2,3. \end{aligned}$$

(ii) Εισάγουμε μία υποθετική λαχαναγορά Λ_4 η οποία απορροφά τους 30 επιπλέον τόνους με κόστος μεταφοράς 50 ευρώ ανά τόνο, ανεξάρτητα από τη συσκευασία. Το αρχικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με ένα πρόβλημα μεταφοράς των οποίων τα δεδομένα του συνοψίζονται στον πίνακα:

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Διαθ. ποσότητες
A_1	15	18	16	50	200
A_2	17	13	20	50	300
Απαιτ. ποσότητες	220	160	90	30	500

Εστω x_{ij} , $i=1,2$, $j=1,2,3,4$ η ποσότητα πορτομα- -4-
 γιών σε τόνους που στέλνονται από την αποθήκη A_i
 στη λαχαναγορά Λ_j . Στην πραγματικότητα x_{i4} , $i=1,2$
 είναι η ποσότητα πορτομαγιών από την αποθήκη
 A_i που καταστρέφεται. Η μαθηματική διατύπωση
 του προβλήματος είναι:

$$\min (15x_{11} + 18x_{12} + 16x_{13} + 50x_{14} + 17x_{21} + 13x_{22} + 20x_{23} + 50x_{24})$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 300$$

$$x_{11} + x_{21} = 220$$

$$x_{12} + x_{22} = 160$$

$$x_{13} + x_{23} = 90$$

$$x_{14} + x_{24} = 30$$

$$x_{ij} \geq 0, i=1,2, j=1,2,3,4.$$

(iii) Ο συνεταιρισμός αγοράζει 30 επιπλέον τόνους για την
 αποθήκη A_2 με τιμή 8 ευρώ τον τόνο πάνω από την
 κανονική. Προφανώς το πρόβλημα δεν αλλάζει αν
 υποθέσουμε ότι οι 30 τόνοι αγοράζονται με την κανο-
 νική τιμή και ενσωματώσουμε τα 8 ευρώ ανά τόνο
 στο κόστος μεταφοράς από την A_2 στις $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$.
 Ισοδύναμα, εισάχουμε μία υποθετική αποθήκη A_3
 που διαθέτει 30 τόνους και το κόστος μεταφοράς
 ανά τόνο στις $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ είναι $17+8=25$, $13+8=21$,
 $20+8=28$, αντίστοιχα. Έτσι το αρχικό πρόβλημα
 είναι ισοδύναμο με ένα πρόβλημα μεταφοράς που τα
 δεδομένα του συνοψίζονται στον πίνακα:

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Διαθ. ποσ.
A_1	15	18	16	200
A_2	17	13	20	300
A_3	25	21	28	30
Απαιτ. ποσότη.	250	160	120	530

Έστω x_{ij} , $i=1,2,3$, $j=1,2,3$, η ποσότητα πορτοκαλιών σε τόνους που στέλνεται από την αποθήκη A_i στη λαχαναγορά Λ_j . Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι:

$$\min (15x_{11} + 18x_{12} + 16x_{13} + 17x_{21} + 13x_{22} + 20x_{23} + 25x_{31} + 21x_{32} + 28x_{33})$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 30$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 250$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 160$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120$$

$$x_{ij} \geq 0, i=1,2,3, j=1,2,3.$$

#3 Δίνεται το π.δ.π.

$$\max (x_1 - x_2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

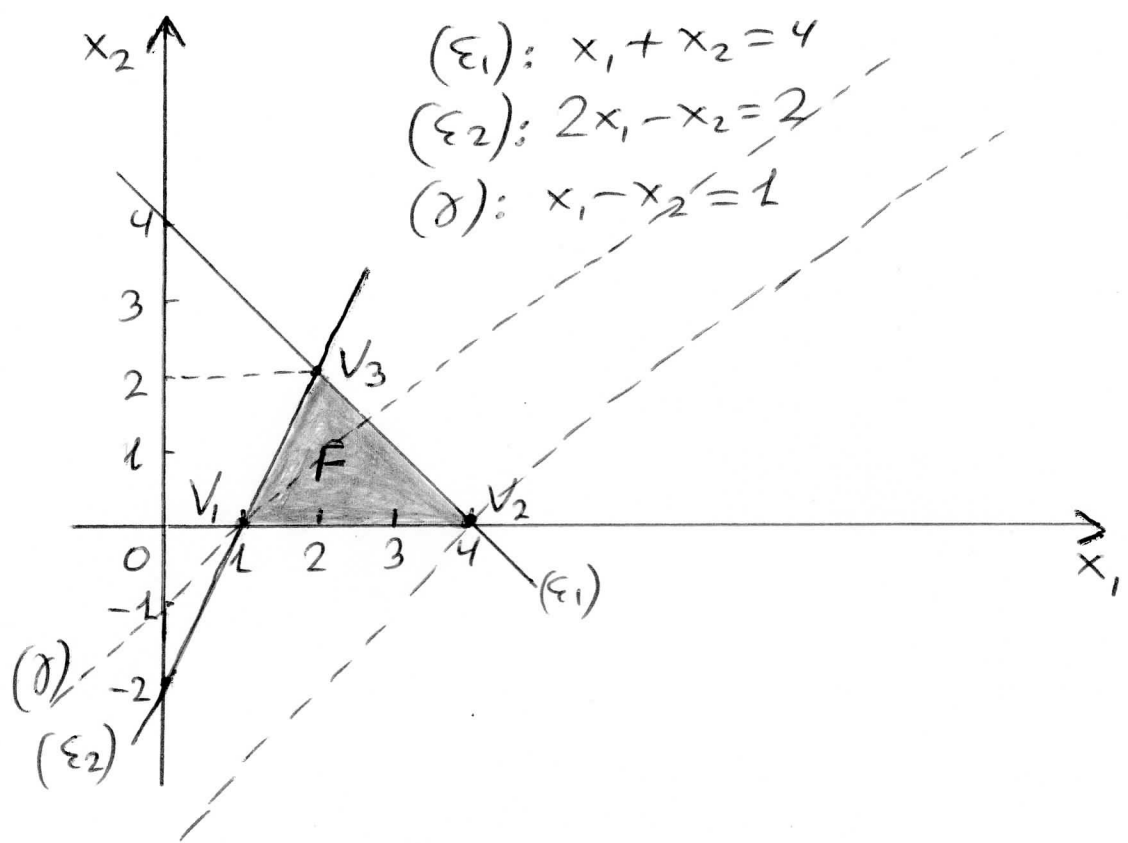
$$2x_1 - x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(i) Να ανθεί γραφικά.

(ii) Να γραφεί στην κανονική μορφή και να βρεθούν οι κορυφές του.

Λύση (i) Η εφικτή περιοχή F είναι το τρίγωνο με κορυφές τις $V_1(1,0)$, $V_2(4,0)$, $V_3(2,2)$. Η άριστη λύση δίνεται από τις συντεταγμένες της V_3 , είναι δηλαδή $x_1=2$, $x_2=2$ με αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z=4$.



(ii) Η κανονική μορφή του π.δ.π. είναι:

$$\max(x_1 - x_2)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 - x_2 - x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

ή ισοδύναμα με μορφή πλινάων:

$$\max \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

όπου $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Εφόσον $r(A)=2$, ένας τρόπος για να βρούμε όλες τις -7-
 κορυφές (βασικές επιμετές λύσεις) είναι να πάρουμε ανά
 δύο όλες τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A και
 να λύσουμε τα αντίστοιχα συστήματα, απορρίπτον-
 ντας τις λύσεις που έχουν ένα τουλάχιστον αρνητικό
 στοιχείο. Όλες οι στήλες του A ανά δύο είναι γραμμικά
 ανεξάρτητες. Επομένως, έχουμε να λύσουμε $\binom{4}{2}=6$ συστή-
 ματα.

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 4 \\ 2x_1 - x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_4 = 6 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x_2 + x_3 = 4 \\ -x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2 \\ x_3 = 6 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_2 = 4 \\ -x_2 - x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 4 \\ x_4 = -6 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x_3 = 4 \\ -x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

Άρα, οι βασικές λύσεις του π.γ.π. είναι:

$$\underline{x}_1 = (2, 2, 0, 0)^T, \quad \underline{x}_2 = (1, 0, 3, 0)^T, \quad \underline{x}_3 = (4, 0, 0, 6)^T \\ \underline{x}_4 = (0, -2, 6, 0)^T, \quad \underline{x}_5 = (0, 4, 0, -6)^T, \quad \underline{x}_6 = (0, 0, 4, -2)^T$$

Από αυτές μόνο οι τρεις πρώτες έχουν όλα τα στοιχεία
 τους μη-αρνητικά, είναι δηλαδή επιμετές λύσεις. Άρα,
 οι ζητούμενες κορυφές είναι η $\underline{x}_1 = (2, 2, 0, 0)^T$,
 $\underline{x}_2 = (1, 0, 3, 0)^T$, $\underline{x}_3 = (4, 0, 0, 6)^T$. Η αντικειμενική συνά-
 ρτηση παίρνει τη μέγιστη τιμή $z=4$ στην $\underline{x}_3$
 που συνεπώς είναι η άριστη λύση.

#4 Να λυθεί το π.γ.π.

$$\max(-x_1 + 2x_2 - 3x_3)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$$

$$2x_2 - x_3 \leq 1$$

$$x_2 + 2x_4 \leq 8, \quad x_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3, 4.$$

Λύση Η ικανονική μορφή του προβλήματος είναι:

-8-

$$\max (-x_1 + 2x_2 - 3x_3)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$$

$$2x_2 - x_3 + x_5 = 1$$

$$x_2 + 2x_4 + x_6 = 8$$

ή ισοδύναμα με μορφή πινάκων $x_i \geq 0, i=1,2,3,4,5,6$

$$\max \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

όπου

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η πρώτη και οι δύο τελευταίες στήλες του πίνακα A σχηματίζουν τον 3x3 μοναδιαίο πίνακα που μας δίνει την αρχική μη-εμφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underline{x}_0 = (10, 0, 0, 0, 1, 8)^T$. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο

Simplex έχουμε τα tableaux:

			-1	2	-3	0	0	0	
B	$\underline{c}_B$	$\underline{b}$	$\underline{p}_1$	$\underline{p}_2$	$\underline{p}_3$	$\underline{p}_4$	$\underline{p}_5$	$\underline{p}_6$	
$\underline{p}_1$	-1	10	1	-1	1	2	0	0	10/2 Γ_1
$\underline{p}_5$	0	1	0	2	-1	0	1	0	- Γ_2
$\underline{p}_6$	0	8	0	1	0	2	0	1	8/2 Γ_3
									Γ_4
	2	-10	0	-1	2	-2	0	0	
$\underline{p}_1$	-1	2	1	-2	1	0	0	-1	$\Gamma_1' = \Gamma_1 - 2\Gamma_3'$
$\underline{p}_5$	0	1	0	2	-1	0	1	0	$\Gamma_2' = \Gamma_2$
$\underline{p}_4$	0	4	0	1/2	0	1	0	1/2	$\Gamma_3' = 1/2 \Gamma_3$
	2	-2	0	0	2	0	0	1	$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 2\Gamma_3'$

Αφού $z_j - c_j \geq 0$ για όλα τα j , βρήκαμε μία άριστη

λύση, $\underline{x}_1 = (2, 0, 0, 4, 1, 0)^T$. Η μέγιστη τιμή της $-g$ -αντιμερικής συνάρτησης είναι $z = -2$. Στο τεταμένο tableau έχουμε $z_2 - c_2 = 0$, ενώ η $\underline{P}_2$ δεν είναι βασική στήλη (βλέπε Παρατήρηση (v), σελ. 66 των Συμπεριώσεων). Συνεπώς, η εισαγωγή της $\underline{P}_2$ στη βάση παράγει μία εναλλακτική βέλτιστη βασική εφικτή λύση. Πράγματι, κάνοντας βασική την $\underline{P}_2$, η στήλη $\underline{P}_5$ φεύγει από τη βάση και καταλήγουμε στο tableau

$$\begin{array}{c|cccccccc|c|l} \underline{P}_1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & r_1'' = r_1' + 2r_2'' \\ \underline{P}_2 & 2 & 1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & r_2'' = 1/2 r_1' \\ \underline{P}_4 & 0 & 15/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1 & -1/4 & 1/2 & r_3'' = r_3' - 1/2 r_2'' \\ \underline{z} & -2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & r_4'' = r_4' \end{array}$$

που δίνει την άριστη λύση, $\underline{x}_2 = (3, 1/2, 0, 15/4, 0, 0)^T$ και $z = -2$. Επομένως, το πρό βλπηρα έχει άπειρο πλήθος βέλτιστων λύσεων $\geq$ της μορφής

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda) \underline{x}_2 \\ &= \lambda (2, 0, 0, 4, 1, 0)^T + (1-\lambda) (3, 1/2, 0, 15/4, 0, 0)^T \\ &= (3-\lambda, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda, 0, \frac{15}{4} + \frac{1}{4}\lambda, \lambda, 0)^T, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

#5 Να λυθεί το π.δ.π.

$$\min (3x_1 - x_2 + 2x_3)$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 9$$

$$5x_2 - x_3 \leq 1$$

$$4x_1 - x_2 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

με τη μέθοδο Μ.

Λύση Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι: -10-

$$-\max(-3x_1 + x_2 - 2x_3)$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 9$$

$$5x_2 - x_3 + x_5 = 1$$

$$4x_1 - x_2 - x_6 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 3$$

$$x_i \geq 0, i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$$

ή ισοδύναμα με μορφή πινάκων

$$-\max \underline{c}^T \underline{x} \quad \text{όπου} \quad \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_7)^T$$

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{c} = (-3, 1, -2, 0, 0, 0, 0)^T$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Παρατηρούμε ότι}$$

ο 4×4 μοναδιαίος πίνακας δεν σχηματίζεται από στήλες του πίνακα A και συγχυερίφεται δεν υπάρχει η τρίτη στήλη του. Επομένως εισάγουμε μία τεχνητή μεταβλητή $x_8, x_8 \geq 0$, στην τρίτη εξίσωση και έχουμε το νέο σύστημα περιορισμών:

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 9$$

$$5x_2 - x_3 + x_5 = 1$$

$$-x_6 + x_8 = 1$$

$$4x_1 - x_2$$

$$+x_7 = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_i \geq 0, i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Ο πίνακας των συντελεστών του νέου συστήματος περιέχει τον 4×4 μοναδιαίο πίνακα που δίνει και την αρχική μη-εμφυσισμένη βασική εφικτή λύση $\underline{x}_0 = (0, 0, 0, 9, 1, 0, 3, 1)^T$.

Θα λύσουμε το πρόβλημα με την Μ-μέθοδο, δηλαδή -11-
Θα λύσουμε το π.θ.π.

$$\max(-3x_1 + x_2 - 2x_3 + Mx_8), \quad M \ll 0$$

κάνω από το νέο σύστημα περιορισμών. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Simplex έχουμε:

			-3	1	-2	0	0	0	0	0	M	
B	$\underline{C_B}$	$\underline{b}$	$\underline{P_1}$	$\underline{P_2}$	$\underline{P_3}$	$\underline{P_4}$	$\underline{P_5}$	$\underline{P_6}$	$\underline{P_7}$	$\underline{P_8}$	$\underline{\theta}$	
$\underline{P_4}$	0	3	3	2	-1	1	0	0	0	0	3	r_1
$\underline{P_5}$	0	1	0	5	-1	0	1	0	0	0	-	r_2
$\underline{P_8}$	M	1	<u>4</u>	-1	0	0	0	-1	0	1	<u>4/4</u>	r_3
$\underline{P_7}$	0	3	1	1	1	0	1	0	1	0	3	r_4
$\underline{z}$	M	<u>4M+3</u>	-M-1	2	0	0	-M	0	0	0		r_5

											$\underline{\theta}$	
$\underline{P_4}$	0	33/4	0	11/4	-1	1	0	3/4	0	33/11		$r'_1 = r_1 - 3r'_3$
$\underline{P_5}$	0	1	0	<u>5</u>	-1	0	1	0	0	<u>1/5</u>		$r'_2 = r_2$
$\underline{P_1}$	-3	1/4	1	-1/4	0	0	0	-1/4	0	-		$r'_3 = 1/4 r_3$
$\underline{P_7}$	0	11/4	0	5/4	1	0	0	1/4	1	11/5		$r'_4 = r_4 - r'_3$
$\underline{z}$	-3	-3/4	0	-1/4	2	0	0	3/4	0			

$\underline{P_4}$	0	77/10										$r''_1 = r'_1 - 11/4 r''_2$
$\underline{P_2}$	1	1/5	0	1	-1/5	0	1/5	0	0			$r''_2 = 1/5 r'_2$
$\underline{P_1}$	-3	3/10										$r''_3 = r'_3 + 1/4 r''_2$
$\underline{P_7}$	0	5/2										$r''_4 = r'_4 - 5/4 r''_2$
$\underline{z}$	-7/10	0	0	39/20	0	1/20	3/4	0				$r''_5 = r'_5 + 1/4 r''_2$

Αφού $z_j - c_j \geq 0$ για όλα τα j βρήκαμε την άριστη
λύση. Η άριστη λύση του αρχικού π.θ.π. είναι η
 $\underline{x} = (3/10, 1/5, 0, 77/10, 0, 0, 5/2)^T$, με αντίστοιχη τιμή

της αντισυμμετρικής συνάρτησης $z = -(-7/10) = 7/10 \cdot -12$

#6 Να λυθεί το π.χ.π. $\min(8x_1 + 5x_2 + 4x_3)$

με περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 \geq 10$$

$$x_2 + x_3 \geq 15$$

$$x_1 + x_3 \geq 12$$

$$20x_1 + 10x_2 + 15x_3 \leq 300$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ με τη μέθοδο δύο φάσεων.

Λύση Η κανονική μορφή του π.χ.π. είναι η:

$$-\max(-8x_1 - 5x_2 - 4x_3)$$

με περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 - x_4 = 10$$

$$x_2 + x_3 - x_5 = 15$$

$$x_1 + x_3 - x_6 = 12$$

$$20x_1 + 10x_2 + 15x_3 + x_7 = 300$$

$$x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, 7.$$

Ο 4×4 μοναδιαίος πίνακας δεν σχηματίζεται από τις στήλες του πίνακα A. Εισάγουμε τρεις τεχνητές μεταβλητές x_8, x_9 και $x_{10}, x_8, x_9, x_{10} \geq 0$ στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη εξίσωση παίρνοντας το νέο σύστημα περιορισμών:

$$x_1 + x_2 - x_4 + x_8 = 10$$

$$x_2 + x_3 - x_5 + x_9 = 15$$

$$x_1 + x_3 - x_6 + x_{10} = 12$$

$$20x_1 + 10x_2 + 15x_3 + x_7 = 300$$

$$x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, 10$$

Στην πρώτη φάση θα λύσουμε το πρόβλημα

$$\min(x_8 + x_9 + x_{10}) \text{ ή ισοδύναμα } -\max(-x_8 - x_9 - x_{10})$$

Μάτω από τις νέες συνθήκες και στη δεύτερη φάση θα λύσουμε το αρχικό πρόβλημα. -13-

ΦΑΣΗ Ι

B	ζ_B	b	$\bar{P}_1$	$\bar{P}_2$	$\bar{P}_3$	$\bar{P}_4$	$\bar{P}_5$	$\bar{P}_6$	$\bar{P}_7$	$\bar{P}_8$	$\bar{P}_9$	$\bar{P}_{10}$	θ
$\bar{P}_8$	-1	10	<u>1</u>	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	$(10/1) r_1$
$\bar{P}_9$	-1	15	0	1	1	0	-1	0	0	0	1	0	$-r_2$
$\bar{P}_{10}$	-1	12	1	0	1	0	0	-1	0	0	0	1	$12/1 r_3$
$\bar{P}_7$	0	300	20	10	15	0	0	0	1	0	0	0	$300/20 r_4$
$\bar{z}$	-37		<u>-2</u>	-2	-2	1	1	1	0	0	0	0	r_5

$\underline{P_1}$	0	10	1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	$r_1' = r_1$
$\underline{P_9}$	-1	15	0	1	1	0	-1	0	0	1	0	$15/1$	$r_2' = r_2$
$\underline{P_{10}}$	-1	2	0	-1	1	1	0	-1	0	0	1	2/1	$r_3' = r_3 - r_1'$
$\underline{P_7}$	0	100	0	-10	15	20	0	0	1	0	0	$100/15$	$r_4' = r_4 - 20r_1'$
$\underline{z}$	-17	0	0	-2	-1	1	1	0	0	0	0		$r_5' = r_5 + 2r_1'$

$\bar{P}_1$	0	10	1	1	0	-1	0	0	0	0	0	$10/1 r_1'' = r_1'$
$\bar{P}_9$	-1	13	0	<u>2</u>	0	-1	-1	1	0	1	0	$(13/2) r_2'' = r_2' - r_3''$
$\bar{P}_3$	0	2	0	-1	1	1	0	-1	0	0	0	$-r_3'' = r_3'$
$\bar{P}_7$	0	70	0	5	0	5	0	15	1	0	0	$70/5 r_4'' = r_4' - 15r_3''$
$\bar{z}$	-13	0	<u>-2</u>	0	1	1	-1	0	0	0	0	$r_5'' = r_5' + 2r_3''$

$\bar{P}_1$	0	3.5	1	0	0	-0.5	0.5	-0.5	0			$r_1''' = r_1'' - 2r_2'''$
$\bar{P}_2$	0	6.5	0	1	0	-0.5	-0.5	0.5	0			$r_2''' = r_2''/2$
$\bar{P}_3$	0	8.5	0	0	1	0.5	-0.5	-0.5	0			$r_3''' = r_3'' + r_2'''$
$\bar{P}_7$	0	37.5	0	0	0	7.5	2.5	12.5	1			$r_4''' = r_4'' - 5r_2'''$
$\bar{z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0			

Στο πρώτο tableau της Φάσης II είναι $z_j - c_j \geq 0$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, 7$ και συνεπώς βρήκαμε τη βέλτιστη

λύση $\underline{x} = (3.5, 6.5, 8.5, 0, 0, 0, 37.5)^T$ με αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $-(-94.5) = 94.5$. -24-

#7 Να λυθεί το π.γ.π.

$$\max (2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4)$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 18$$

$$2x_1 + 12x_2 + x_3 + x_4 \geq 6$$

$$3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 10x_4 \leq -12$$

$$x_i \geq 0, i=1, 2, 3, 4,$$

με το δυοβό αλγόριθμο Simplex.

Λύση Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι:

$$\max (2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4)$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 18$$

$$-2x_1 - 12x_2 - x_3 - x_4 \leq -6$$

$$3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 10x_4 \leq -12$$

$$x_i \geq 0, i=1, 2, 3, 4.$$

Προσθέτοντας από μία περιθώρια μεταβλητή σε κάθε περιορισμό φέρνουμε το πρόβλημα στη σχεδόν κανονική μορφή:

$$\max (2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4)$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 18$$

$$-2x_1 - 12x_2 - 3x_3 - x_4 + x_6 = -6$$

$$3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 10x_4 + x_7 = -12$$

$$x_i \geq 0, i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Οι στήλες των περιθώριων μεταβλητών σχηματίζουν τον 3×3 μοναδιαίο πίνακα που μας δίνει την αρχική βασική αλλά όχι εφικτή λύση $\underline{x}_0 = (0, 0, 0, 0, 18, -6, -12)^T$. Εφαρμόζοντας τον δυοβό αλγόριθμο Simplex έχουμε τα παρακάτω tableaux:

B	$\underline{c}_B$	$\underline{b}$	$\underline{p}_1$	$\underline{p}_2$	$\underline{p}_3$	$\underline{p}_4$	$\underline{p}_5$	$\underline{p}_6$	$\underline{p}_7$	
$\underline{p}_5$	0	18	<u>1</u>	2	2	4	1	0	0	r_1
$\underline{p}_6$	0	-6	-2	-12	-1	-1	0	1	0	r_2
$\underline{p}_7$	0	-12	3	-2	-4	10	0	0	1	r_3
$\underline{z}$	2	0	-2	-1	-3	-4	0	0	0	r_4

$\underline{p}_1$	2	18	1	2	2	4	1	0	0	$r_1' = r_1$
$\underline{p}_6$	0	30	0	-8	3	7	2	1	0	$r_2' = r_2 + 2r_1'$
$\underline{p}_7$	0	-66	0	-8	<u>-10</u>	-2	-3	0	1	$r_3' = r_3 - 3r_1'$
$\underline{z}$	2	36	0	3	1	4	2	0	0	$r_4' = r_4 + 2r_1'$

$\underline{p}_1$	2	$24/5$								$r_1'' = r_1' - 2r_3''$
$\underline{p}_6$	0	$51/5$								$r_2'' = r_2' - 3r_3''$
$\underline{p}_3$	3	$33/5$	0	$4/5$	1	$4/5$	$3/10$	0	$-1/10$	$r_3'' = -1/10 r_3'$
$\underline{z}$	2	$147/5$	0	$14/5$	0	$19/5$	$17/10$	0	$1/10$	$r_4'' = r_4' - r_3''$

Στο πρώτο tableau, υπάρχουν αρνητικές διαφορές $z_j - c_j$ άρα εφαρμόζουμε τη Φάση I του αλγορίθμου. Είναι $z_1 - c_1 = -2 < 0$ και $x_{11} = 1 > 0$ άρα η στήλη $\underline{p}_5$ φεύγει από τη βάση. Αφού δεν υπάρχουν θετικές διαφορές $z_j - c_j$ και $\max\{|-2/1|, |-1/2|, |-3/2|, |-4/4|\} = |-2/1|$ στη βάση μπαίνει η στήλη $\underline{p}_1$. Στο δεύτερο tableau όλες οι διαφορές της τελευταίας γραμμής είναι μη-αρνητικές, άρα εφαρμόζουμε τη Φάση II του αλγορίθμου. Είναι $x_{30} = -66 < 0$ και υπάρχει $x_{3j} < 0$ π.χ. $x_{32} = -8 < 0$, άρα η στήλη $\underline{p}_7$ φεύγει από τη βάση. Αφού $\min\{|3/-8|, |1/-10|, |4/-2|, |2/-3|\} = |1/-10|$, στη βάση

ρπαίνει η στήλη $\underline{b}_3$. Στο τρίτο tableau όλα τα στοι- -16-
 χεία της στήλης $\underline{b}$ είναι μη-αρνητικά. Άρα, η αντί-
 στοιχη βασική λύση είναι εφικτή και επομένως
 βέλτιστη αφού σε όλα τα tableau της Φάσης II οι
 διαφορές $z_j - c_j$ είναι μη-αρνητικές. Άρα, η άριστη
 λύση είναι η $\underline{x} = (24/5, 0, 33/5, 0, 0, 54/5, 0)^T$ και η
 μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι
 $z = 147/5$.

#8 Να βρεθεί το δυτικό των ακόλουθων π.γ.π.

(i) $\max(10x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 6x_4)$

με περιορισμούς: $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 70$

$5x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 60$

$5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 25$

$x_i \geq 0, i=1,2,3,4$

(ii) $\min(2800x_1 + 6000x_2 + 1200x_3)$

με περιορισμούς

$15x_1 + 15x_2 + x_3 \geq 5$

$4x_1 - 8x_2 \geq 5$

$12x_1 + 8x_3 \leq 24$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(iii) $\min(3x_1 + x_2 + 2x_3)$

με περιορισμούς $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$

$4x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$2x_1 + x_3 \leq 7$

$x_1 + 2x_2 \geq 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Άσκηση (i) Από τον ορισμό του διύληού

-27-

$$\min (70w_1 + 60w_2 + 25w_3)$$

$$3w_1 + 5w_2 + 5w_3 \geq 10$$

$$2w_1 + 5w_2 + 6w_3 \geq 9$$

$$4w_1 + w_2 + 3w_3 \geq 4$$

$$2w_1 + 3w_2 + w_3 \geq 6$$

$$w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

$$(ii) \max (5w_1 + 5w_2 + 24w_3)$$

$$15w_1 + 4w_2 + 12w_3 \leq 2800$$

$$15w_1 - 8w_2 \leq 6000$$

$$w_1 + 8w_3 \leq 1200$$

$$w_1, w_2 \geq 0, w_3 \leq 0$$

$$(iii) \max (5w_1 + 4w_2 + 7w_3 + 4w_4)$$

$$2w_1 + 4w_2 + 2w_3 + w_4 \leq 3$$

$$w_1 + w_2 + 2w_4 \leq 1$$

$$3w_1 + w_2 + w_3 \leq 2$$

$$w_1, w_2 \in \mathbb{R}, w_3 \leq 0, w_4 \geq 0.$$

#9 Βρείτε το διύληό του π.δ.π.

$$\max (x_1 + x_2 + x_3)$$

με περιορισμούς:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

και στη συνέχεια βρείτε τις βέλτιστες λύσεις και των δύο, πρωτεύοντος και διύληού.

Λύση Το δυτικό είναι:

-18-

$$\min(2w_1 + 2w_2)$$

$$2w_1 + 4w_2 \geq 1$$

$$w_1 + 2w_2 \geq 1$$

$$2w_1 + w_2 \geq 1$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

Θα λύσουμε το πρωτεύον του οποίου η κανονική μορφή είναι:

$$\text{με: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2$$

$$x_i \geq 0, i=1, 2, 3, 4, 5.$$

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Simplex παίρνουμε τα ακόλουθα tableau:

			1	1	1	0	0	
B	$\underline{C_B}$	$\underline{b}$	$\underline{P_1}$	$\underline{P_2}$	$\underline{P_3}$	$\underline{P_4}$	$\underline{P_5}$	Θ
$\underline{P_4}$	0	2	2	1	2	1	0	$-\frac{2}{2} \quad r_1$
$\underline{P_5}$	0	2	<u>4</u>	2	1	0	1	$\left(\frac{2}{4}\right) \quad r_2$
	2	0	<u>-1</u>	-1	-1	0	0	r_3
$\underline{P_4}$	0	1	0	0	$\left(\frac{3}{2}\right)$	1	$-\frac{2}{4}$	$\left(\frac{2}{3}\right) \quad r_1' = r_1 - 2r_2'$
$\underline{P_1}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$2 \quad r_2' = \frac{r_2}{4}$
	2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{3}{4}\right)$	0	$\frac{1}{4}$	$r_3' = r_3 + r_2'$
$\underline{P_3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$r_1'' = \frac{2}{3} r_1'$
$\underline{P_1}$	1	$\frac{1}{3}$	1	<u>$\frac{1}{2}$</u>	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right) \quad r_2'' = r_2' - \frac{1}{4} r_1''$
	2	1	0	<u>$-\frac{1}{2}$</u>	0	$\frac{1}{2}$	0	$r_3'' = r_3' + \frac{3}{4} r_1''$
$\underline{P_3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$r_1''' = r_1''$
$\underline{P_2}$	1	$\frac{2}{3}$	2	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$r_2''' = 2r_2''$
	2	$\frac{4}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$r_3''' = r_3'' + \frac{1}{2} r_2''$

Αφού $z_j - c_j \geq 0$ για όλα τα j βρέθηκε η βέλτιστη -19- λύση που είναι η $\underline{x} = (0, 2/3, 2/3)^T$ με αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 4/3$. Σύμφωνα με το Πόρισμα, σελ. 83 των Σημειώσεων αφού $\hat{x}_2 > 0$ και $\hat{x}_3 > 0$ ο δεύτερος και τρίτος περιορισμός του δυτικού προβλήματος ως ισότητες θα μας δώσουν τη βέλτιστη λύση $\underline{w}$ του δυτικού.

Είναι
$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 = 1 \\ 2w_1 + w_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow w_1 = w_2 = 1/3$$
 άρα η βέλτιστη λύση του δυτικού είναι: $\underline{w} = (1/3, 1/3)^T$ και η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής είναι $z = 4/3$ (όπως στο πρωτεύον πρόβλημα).

#10 Η βαθμολογία τεσσάρων υποψηφίων A_1, A_2, A_3, A_4 που εξετάσθηκαν για τέσσερις θέσεις B_1, B_2, B_3, B_4 δίνεται από τον επόμενο πίνακα.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	9	8	7	6
A_2	5	4	3	2
A_3	3	4	5	6
A_4	7	8	9	10

Να βρεθεί η καλύτερη τοποθέτηση τους.

Λύση Έστω

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν ο υποψήφιος } A_i \text{ τοποθετείται στη θέση } B_j \\ 0, & \text{αν ο υποψήφιος } A_i \text{ δεν τοποθετείται στη θέση } B_j \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας το πρώτο βήμα του Ουγκρινού αλγορίθμου παίρνουμε τα διαδοχικά tableaux:

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0^* & -1 & -3 \\ 0^* & 0 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & 0^* & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0^* \end{pmatrix} \quad -20-$$

Ο ελάχιστος αριθμός γειθιών με τις οποίες διαγράφουμε όλα τα 0 του τελευταίου tableau είναι 4, δηλαδή ίσος με τον αριθμό m των γραμμών ή στηλών του tableau. Άρα, το tableau αυτό μας δίνει και την άριστη λύση. Υπάρχουν τόσες άριστες λύσεις όσες και οι ομάδες ανεξάρτητων μηδενικών του tableau. Μία τέτοια ομάδα σημειώνεται με αστερίσκους. Έτσι υπάρχουν τέσσερις άριστες λύσεις οι:

$$x_{11} = x_{22} = x_{33} = x_{44} = 1, \quad x_{ij} = 0 \text{ για τα υπόλοιπα } (i,j)$$

$$x_{12} = x_{21} = x_{33} = x_{44} = 1, \quad x_{ij} = 0 \text{ για τα υπόλοιπα } (i,j)$$

$$x_{11} = x_{22} = x_{34} = x_{43} = 1, \quad x_{ij} = 0 \text{ για τα υπόλοιπα } (i,j)$$

$$x_{12} = x_{21} = x_{34} = x_{43} = 1, \quad x_{ij} = 0 \text{ για τα υπόλοιπα } (i,j)$$

Η μέγιστη συνολική απόδοση είναι 28.

