ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σημειώσεις για το μάθημα

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Θεοδόσης Δημητράκος

E-mail: dimitheo@aegean.gr

Σάμος
2010

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming) είναι μία από τις πλέον δημοφιλείς τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας (Operations Research). Η Επιχειρησιακή Έρευνα μπορεί να οριστεί ως η εφαρμογή σύγχρονων μεθόδων λήψης αποφάσεων επιστημονικά θεμελιωμένων οι οποίες σκοπό έχουν την πιο αποτελεσματική χρησιμοποίηση των υπαρχόντων οικονομικών πόρων σε τεχνολογία, κεφαλαιακό εξοπλισμό και ανθρώπινο δυναμικό με βάση αντικειμενικά προκαθορισμένους στόχους.

Η αρχική ώθηση για την ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας δόθηκε κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου. Τότε δημιουργήθηκαν στις συμμαχικές χώρες, επιστημονικές ομάδες που ασχολήθηκαν με έρευνα, σχετικά με κυρίως μαθηματικές τεχνικές για την επίτευξη του βέλτιστου δυνατού αποτελέσματος σε στρατιωτικές επιχειρήσεις. Με το τέλος του πολέμου, διαπιστώθηκε ότι αυτές οι τεχνικές μπορούσαν να εφαρμοσθούν επιτυχώς και στην οικονομική δραστηριότητα σχετικά με προβλήματα μεγιστοποίησης κέρδους ή ελαχιστοποίησης κόστους. Η ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών διευκόλυνε και διεύρυνε τις εφαρμογές αυτών των τεχνικών.

Έτσι, στις μέρες μας, η Επιχειρησιακή Έρευνα βρίσκει πολλές εφαρμογές στην παραγωγή, στις μεταφορές, στο Μαρκετινγκ, στην Υγεία, στην Εκπαίδευση, στην Προστασία του Περιβάλλοντος, στην Οικονομία και αλλού. Αποτελεί αυτοτελή κλάδο των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών με μεγάλο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον.

Οι τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας έχουν αναπτυχθεί για να βοηθήσουν τα διευθυντικά στελέχη των επιχειρήσεων και οργανισμών στη λήψη των αποφάσεών τους. Ειδικότερα, ο γραμμικός προγραμματισμός ασχολείται κυρίως με το πρόβλημα της βέλτιστης (άριστης) κατανομής των περιορισμένων (οικονομικών) πόρων μεταξύ ανταγωνιζόμενων δραστηριοτήτων. Δηλαδή, ο γραμμικός προγραμματισμός επικεντρώνεται στον εντοπισμό του βέλτιστου (άριστου) προγράμματος, με το οποίο κατανέμονται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο οι περιορισμένοι διαθέσιμοι πόροι μίας οικονομικής μονάδας στις ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες της, ώστε να ικανοποιηθούν οι προκαθορισμένοι της στόχοι. Οι στόχοι ενός οργανισμού ή μίας επιχείρησης επιτυγχάνονται κάτω από συνθήκες οι οποίες υπαγορεύονται από περιορισμούς που πρέπει να ικανοποιούνται. Ορισμένοι από τους περιορισμούς αφορούν στους περιορισμένους διαθέσιμους πόρους της επιχείρησης, όπως είναι η εργασία, οι πρώτες ύλες, η δυναμικότητα του εξοπλισμού, τα διαθέσιμα κεφάλαια και άλλα. Υπάρχουν όμως περιορισμοί που προκύπτουν από άλλες αιτίες, όπως η ζήτηση των προϊόντων, οι προδιαγραφές τους, η πολιτική της επιχείρησης, η μέθοδος χρηματοδότησης των δραστηριοτήτων της, οι κανονισμοί λειτουργίας, η νομοθεσία και άλλοι. Όσον αφορά στον όρο ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες, οι δραστηριότητες μίας επιχείρησης δε σημαίνει ότι είναι οπωσδήποτε ανταγωνιστικές στην αγορά, αλλά ότι ανταγωνίζονται μεταξύ τους για την κατανάλωση των περιορισμένων διαθέσιμων πόρων της.

Για παράδειγμα, εάν μία επιχείρηση παράγει πόρτες και παράθυρα, τα δύο αυτά προϊόντα, ενώ δεν είναι ανταγωνιστικά στην αγορά, ανταγωνίζονται μεταξύ τους για την κατανάλωση των διαθέσιμων πόρων της επιχείρησης, όπως τις πρώτες ύλες, την εργασία, την ενέργεια και την παραγωγική δυναμικότητα.

Η βέλτιστη απόφαση στην οποία οδηγεί ο Γραμμικός Προγραμματισμός αποσκοπεί στη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση ενός κριτηρίου απόδοσης που μπορεί, για παράδειγμα, να είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους από τις πωλήσεις των προϊόντων, η μεγιστοποίηση του μεριδίου αγοράς, η ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής των προϊόντων μίας βιομηχανικής επιχείρησης, η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς ενός προϊόντος σε διάφορα κέντρα κατανάλωσης.

Η συστηματική μελέτη και η ανάπτυξη της μεθοδολογίας που διερευνά και επιλύει τα προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού οφείλεται κυρίως στον G. Dantzig κατά την περίοδο που ήταν επικεφαλής του Air Force Statistical Control's Combat Analysis Branch στις ΗΠΑ. Το έργο στο οποίο απασχολούνταν με την ομάδα του είχε την ονομασία Scientific Computation of Optimum Programs και στόχευε στην εγκαθίδρυση βέλτιστων μηχανισμών εκπαίδευσης, ανάπτυξης και συντήρησης στρατιωτικού υλικού και προσωπικού. Αυτά τα σχέδια τα αποκαλούσαν προγράμματα και μπορούσαν να εκφραστούν μαθηματικά με τη βοήθεια συστημάτων γραμμικών σχέσεων. Έτσι, είχαμε την ονόμασία Γραμμικός Προγραμματισμός η οποία δεν έχει καμία σχέση με αυτό που ονομάζουμε προγραμματισμό ηλεκτρονικών υπολογιστών. Για πολλά χρόνια ο Γραμμικός Προγραμματισμός αποτελεί μία από τις πλέον γνωστές και ευρέως χρησιμοποιούμενες τεχνικές μοντελοποίησης και συνδράμει σημαντικά στη λήψη των αποφάσεων. Η επίλυση των προβλημάτων γίνεται συνήθως με τη μέθοδο Simplex η οποία θεωρείται μία από τις σημαντικότερες μαθηματικές μεθοδολογίες του 20ου αιώνα. Η μέθοδος Simplex σε συνδυασμό με τη ραγδαία εξέλιξη των ΗΥ σε επίπεδο υλικού και λογισμικού έδωσε λύσεις σε θεμελιώδη προβλήματα μεγάλου μεγέθους για ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών.

Στόχος του μαθήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού, είναι να παρουσιάσουμε, όσον το δυνατόν πιο απλά, τις μεθοδολογίες και τις υπολογιστικές τεχνικές του Γ.Π. σε διάφορες εφαρμογές που σχετίζονται με διάφορα επιστημονικά πεδία. Εκτός από τις παρούσες Σημειώσεις, ως βιβλία για περαιτέρω μελέτη, προτείνοντας μεταξύ άλλων, τα ακόλουθα:

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1]. Οικονόμου Γ. και Γεωργίου Α. Ποσοτική Ανάλυση για τη Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων, Τόμοι Α' και Β', Εκδόσεις Ε. Μπένου, Αθήνα, 2006 και 2000.

[2]. Λουκάκη Μ. Επιχειρησιακή Έρευνα, Τόμος Α', Γ' Έκδοση, Θεσσαλονίκη, Εκδοτικό Κέντρο Βόρειας Ελλάδας ΕΠΕ, 1994.

[3]. Βασιλείου Π.-Χ., Τσακλίδης Γ. και Τσάντας Ν. Δ. Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000.

[4]. Φακίνου Δ. και Οικονόμου Α. Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Θεωρία και Ασκήσεις, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2003.

[5]. Κουνιά Σ. και Φακίνου Δ. Γραμμικός Προγραμματισμός, Θεωρία και Ασκήσεις, Β' Έκδοση, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1993.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1]. Anderson D.R., Sweeney D.J. and Williams T.A., Linear Programming for Decision Making, St. Paul, Minn., West, 1974.

[2]. Kolman B. and Beck R.E., Elementary Linear Programming with Applications, 2nd Edition, Academic Press, San Diego, 1995.

[3]. Salkin H.M. and Saha J., Studies in Linear Programming, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.

[4]. Taha H.A., Operations Research: An Introduction, 5th Edition, MacMillan, New York, 1992.

[5]. Winston, W.L., Operations Research: Applications and Algorithms, 3rd Edition, Duxbury Press, Belmont, California, 1994.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

1.1 Εισαγωγή

Μία μεγάλη κατηγορία προβλημάτων Επιχειρησιακής Έρευνας είναι τα προβλήματα βελτιστοποίησης (optimization problems). Αυτά αναφέρονται στην μεγιστοποίηση (maximization) ή ελαχιστοποίηση (minimization) μίας ή περισσότερων συναρτήσεων ενός αριθμού μεταβλητών οι τιμές των οποίων ικανοποιούν ένα σύνολο περιορισμών (constraints). Τα προβλήματα βελτιστοποίησης διακρίνονται σε προβλήματα κλασσικής βελτιστοποίησης (classical optimization) και προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού (mathematical programming). Η βασική διαφορά που διακρίνει τα προβλήματα κλασσικής βελτιστοποίησης από τα προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού αναφέρεται στο είδος και τη φύση των περιορισμών. Στα προβλήματα κλασσικής βελτιστοποίησης το σύνολο των περιορισμών αποτελείται μόνο από εξισώσεις και οι μέθοδοι επίλυσής τους χρησιμοποιούν εργαλεία της κλασσικής Μαθηματικής Ανάλυσης, δηλαδή του Διαφορικού και του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Αντίθετα, στα προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού το σύνολο των περιορισμών περιλαμβάνει εκτός των εξισώσεων και ανισότητες.

Τα τελευταία 35-50 χρόνια παρουσιάστηκαν πολλά καινούργια και ενδιαφέροντα πρακτικά προβλήματα οικονομικής κυρίως βελτιστοποίησης. Αυτά τα προβλήματα χαρακτηρίστηκαν προβλήματα Μαθηματικού προγραμματισμού και η επίλυσή τους δεν μπορούσε να γίνει με τις τεχνικές των κλασσικών μεθόδων βελτιστοποίησης.

1.2 Βασικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων Μαθηματικού Προγραμματισμού

Μαθηματικός Προγραμματισμός είναι το σύνολο των μεθόδων και υπολογιστικών τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μίας κατηγορίας προβλημάτων βελτιστοποίησης. Τα προβλήματα αυτά περιγράφονται με τη βοήθεια ενός μαθηματικού μοντέλου που αποτελείται από μία πραγματική συνάρτηση της οποίας ζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο και από μία ομάδα συνθηκών (περιορισμών) που πρέπει να ικανοποιούν οι μεταβλητές της συνάρτησης. Όταν αυτές εκφράζονται από γραμμικές σχέσεις, έχουμε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.). Ως μοντέλο (model) θα θεωρήσουμε μία αναπαράσταση ή απεικόνιση των πλέον σημαντικών χαρακτηριστικών ενός συστήματος, με την οποία μπορούμε με ευχέρεια να το αναλύσουμε. Η μακέτα ενός κτιρίου, το διάγραμμα διαδρομών ενός μεταφορικού μέσου ή ακόμα ένα σύστημα εξισώσεων που περιγράφει τη λειτουργία μίας επιχείρησης αποτελούν διαφορετικές περιπτώσεις μοντέλων.

Τα κύρια χαρακτηριστικά στοιχεία κάθε μοντέλου μαθηματικού προγραμματισμού είναι:

(α) Υπάρχει ένα σύνολο δραστηριοτήτων έστω $J=\{1,2,\dots,n\}$ που μπορεί να είναι παραγωγή προϊόντων, παροχή διαφόρων ειδών υπηρεσιών κτλ. Σε κάθε δραστηριότητα $j\in J$ αντιστοιχεί μία μεταβλητή έστω x_j και μας δείχνει το ύψος παραγωγής της δραστηριότητας j. Αυτές οι μεταβλητές καλούνται και μεταβλητές αποφάσεων (decision variables) ή μεταβλητές πολιτικής (policy variables).

(β) Έχουμε ένα σύνολο οικονομικών πόρων ή μέσων $I=\{0,\dots,m\}$ που διατίθενται σε περιορισμένες ποσότητες για την εκτέλεση των δραστηριοτήτων. Αυτοί οι πόροι μπορεί να είναι πρώτες ύλες, διάφορα βοηθητικά υλικά, μηχανολογικός εξοπλισμός, αποθηκευτικοί χώροι, εργατοώρες και γενικά οποιοσδήποτε συντελεστής παραγωγής ο οποίος είναι απαραίτητος για την εκτέλεση του συνόλου των δραστηριοτήτων J.

(γ) Υπάρχει ένα σύνολο αντικειμενικών συναρτήσεων (objective functions), η βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση-ελαχιστοποίηση) των οποίων επιδιώκεται από την επίλυση του προβλήματος του μαθηματικού προγραμματισμού.

Ανάλογα με το αν έχουμε μία ή περισσότερες της μίας αντικειμενικές συναρτήσεις έχουμε τις περιπτώσεις του μονοκριτηριακού μαθηματικού προγραμματισμού (single objective mathematical programming) ή πολυκριτηριακού μαθηματικού προγραμματισμού (multi-objective mathematical programming). Η έννοια του προγραμματισμού είναι ταυτόσημη με την έννοια της επιλογής. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον δραστηριότητες που θα λειτουργούν σε συνθήκες ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης και το σύνολο των περιορισμών δεν θα πρέπει να περιέχει αλληλοαποκλειόμενους περιορισμούς.

Το γενικό πρόβλημα του μαθηματικού προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Δίνεται μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών $f: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}: \underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto f(\underset{\sim}{x})$ και ένα σύνολο $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Επιθυμούμε να βρεθεί (αν υπάρχει) $\underset{\sim}{x}^* \in F$: $f(\underset{\sim}{x}^*) = \max\{f(\underset{\sim}{x}) / \underset{\sim}{x} \in F\}$

ή $f(\underset{\sim}{x}^*) = \min\{f(\underset{\sim}{x}) / \underset{\sim}{x} \in F\}$

Λόγω της ταυτότητας $\min f(\underset{\sim}{x}) = -\max(-f(\underset{\sim}{x}))$, κάθε πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μεγιστοποίησης. Η $f(\underset{\sim}{x})$ καλείται αντικειμενική συνάρτηση, το σύνολο F καλείται εφικτή περιοχή και τα σημεία του F λέγονται εφικτές λύσεις του προβλήματος. Άριστη ή βέλτιστη λύση $\underset{\sim}{x}^*$ καλείται κάθε εφικτή λύση $\underset{\sim}{x}^*$ που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί την $f(\underset{\sim}{x})$. Αν η αντικειμενική συνάρτηση $f(\underset{\sim}{x})$ είναι γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και η εφικτή περιοχή F εκφράζεται από γραμμικούς περιορισμούς (εξισώσεις ή ανισώσεις) ως προς τις μεταβλητές, τότε έχουμε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.). Έτσι το γενικό π.γ.π. έχει την εξής μαθηματική διατύπωση:

Να βρεθεί η: $z = \underset{(\min)}{\max}(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n)$

όταν
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq, =, \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq, =, \geq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq, =, \geq b_m \end{aligned}$$

όπου $c_j, b_i, a_{ij}, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ πραγματικές σταθερές. Συνήθως, υποθέτουμε ότι: $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. Οι συντελεστές c_j, $j=1,\ldots,n$ αναφέρονται ως συντελεστές κέρδους (ή κόστους) ενώ η τελευταία συνθήκη αναφέρεται ως συνθήκη μη-αρνητικότητας των μεταβλητών. Ανάλογα με τις διάφορες μορφές της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιοριστικών συναρτήσεων ο μαθηματικός προγραμματισμός ταξινομείται στις εξής κατηγορίες:

(α) Γραμμικός Προγραμματισμός (linear programming) όπου η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιοριστικές συναρτήσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις.

(β) Μη-γραμμικός Προγραμματισμός (non-linear programming) όπου από τις περιοριστικές συναρτήσεις και την αντικειμενική συνάρτηση τουλάχιστον μία συνάρτηση είναι μη-γραμμική.

(γ) Ακέραιος Προγραμματισμός (Integer Programming) όπου όλες οι μεταβλητές του προβλήματος παίρνουν ακέραιες μόνο τιμές. Προφανώς ο ακέραιος προγραμματισμός μπορεί να είναι γραμμικός ή μη-γραμμικός.

(δ) Μικτός ακέραιος Προγραμματισμός (Mixed Integer Programming) όπου κάποιες μεταβλητές παίρνουν ακέραιες τιμές και οι υπόλοιπες μεταβλητές είναι συνεχείς. Προφανώς μπορεί να έχουμε Μικτό ακέραιο γραμμικό προγραμματισμό ή Μικτό ακέραιο μη γραμμικό προγραμματισμό.

Αν όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις ή ανισώσεις της ίδιας φοράς, το π.γ.π. μπορεί, πιο συνοπτικά, με μορφή πινάκων να γραφεί, ως εξής:

$$z = \underset{(min)}{max}\ \underset{\sim}{c}^T \underset{\sim}{x}$$

$$A\underset{\sim}{x} \le, =, \ge \underset{\sim}{b}$$

$$\underset{\sim}{x} \ge 0$$

με $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}$

$\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}$

όπου $c^T = (c_1\ c_2 \cdots c_n)$ και $M_{m\times n}$ είναι το σύνολο των $m\times n$ πινάκων.

1.3 Βασικές Υποθέσεις ενός μοντέλου Γραμμικού Προγραμματισμού

Για να διαπιστώσουμε κατά πόσο ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού εφαρμόζεται ικανοποιητικά στο υπό εξέταση πρόβλημα, θα αναφερθούμε στις υποθέσεις που διέπουν τα μοντέλα του γραμμικού προγραμματισμού, μέσω ενός παραδείγματος.

Παράδειγμα 1 (Άριστη επιλογή προϊόντων)

Έστω ότι παράγουμε τα προϊόντα Π_1, Π_2 και Π_3 το κέρδος κάθε πωλούμενης μονάδας των οποίων είναι ίσο με 5, 11 και 8 νομισματικές μονάδες, αντίστοιχα. Η τιμή πώλησης της μονάδας των Π_1, Π_2 και Π_3 είναι 23, 18 και 25 νομισματικές μονάδες, αντίστοιχα. Χρησιμοποιούνται οι διαδικασίες της κοπής, της συναρμολόγησης και της βαφής των προϊόντων. Η παραγωγή κάθε μονάδας από τα προϊόντα Π_1, Π_2 και Π_3 απαιτεί ορισμένες εργατοώρες από τις διαδικασίες αυτές οι οποίες συνοψίζονται στον πίνακα:

Εργασίες	Π_1	Π_2	Π_3	Διαθέσιμες Εργατοώρες
Κοπή	15	28	5	5500
Συναρμολόγηση	3	4	11	13100
Βαφή	19	22	6	3600

Η παραγωγή της μονάδας των Π_1, Π_2 και Π_3 χρησιμοποιεί τις πρώτες ύλες ΠY_1, ΠY_2, ΠY_3 και ΠY_4 σε ποσότητες που δίνονται στον πίνακα:

	Π_1	Π_2	Π_3	Διαθέσιμες ποσότητες
ΠY_1	2	5	3	125
ΠY_2	1	2	5	212
ΠY_3	4	3	1	167
ΠY_4	7	1	10	265

Έρευνα αγοράς έδειξε ότι τα ανώτατα όρια στην προηγούμενη ποσότητα των Π_1, Π_2 και Π_3 είναι 95, 110 και 80 μονάδες, αντίστοιχα. Επιθυμητά κατώτατα όρια στις πωλήσεις των Π_1, Π_2, Π_3 είναι 40, 60, 35 μονάδες, αντίστοιχα. Ζητείται να προσδιοριστούν οι παραγόμενες ποσότητες των Π_1, Π_2 και Π_3 ώστε να μην παραβιάζονται οι περιορισμοί του προβλήματος, να επιτυγχάνεται ένα ελάχιστο κέρδος 50 νομισματικών μονάδων και να μεγιστοποιούνται τα συνολικά έσοδα.

Κατασκευάζουμε το σύνολο των μεταβλητών του προβλήματος. Ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός των επιπέδων παραγωγής των προϊόντων Π_1, Π_2 και Π_3 συνεπώς εισάγουμε τις εξής μεταβλητές:

x_1 = Ποσότητα προϊόντος Π_1 που θα παραχθεί

x_2 = —״— —״— Π_2 —״— —״—

x_3 = —״— —״— Π_3 —״— —״—

Σε κάθε μεταβλητή αντιστοιχεί μία δραστηριότητα.

Στο παράδειγμα, οι τρεις δραστηριότητες που συνοδεύουν τις μεταβλητές x_1, x_2, x_3 είναι:

Δραστηριότητα 1: Παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος Π_1
Δραστηριότητα 2: —ıı— —ıı— —ıı— —ıı— Π_2
Δραστηριότητα 3: —ıı— —ıı— —ıı— —ıı— Π_3

Η τιμή της μεταβλητής $x_j, j=1,2,3$ παριστάνει το επίπεδο εκτέλεσης της δραστηριότητας j, $j=1,2,3$.

Για τη μορφοποίηση ενός προβλήματος σε πρόβλημα Γ.Π. γίνονται οι εξής υποθέσεις:

1. Υπόθεση της αναλογικότητας (proportionality assumption). Με την υπόθεση αυτή, αν απαιτούνται 2 μονάδες πρώτης ύλης για την παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος Π_1, τότε $2x_1$ μονάδες πρώτης ύλης απαιτούνται για την παραγωγή x_1 μονάδων προϊόντος Π_1 για κάθε $x_1 \geq 0$. Γενικά, η υπόθεση της αναλογικότητας εξασφαλίζει ότι αν a_{ij} μονάδες του πόρου i καταναλώνονται ($a_{ij}>0$) ή παράγονται ($a_{ij}<0$) για την εκτέλεση της δραστηριότητας j σε επίπεδο μονάδας, τότε $a_{ij}x_j$ μονάδες καταναλώνονται ή παράγονται για την εκτέλεση της δραστηριότητας j σε επίπεδο x_j για κάθε $x_j \geq 0$. Ομοίως, αν c_j είναι το κέρδος μονάδας της δραστηριότητας j τότε $c_j x_j$ είναι η συμβολή της δραστηριότητας j στο ολικό κέρδος για κάθε $x_j \geq 0$.

2. Υπόθεση της Προσθετικότητας (additivity assumption). Με την υπόθεση αυτή, αν απαιτούνται $2x_1$ μονάδες πρώτης ύλης ΠΥ$_1$ για την παραγωγή x_1 μονάδων

προϊόντος Π_1, $5x_2$ μονάδες πρώτης ύλης ΠY_1 για την παραγωγή x_2 μονάδων προϊόντος Π_2 και $3x_3$ μονάδες πρώτης ύλης ΠY_1 για την παραγωγή x_3 μονάδων προϊόντος Π_3 τότε $2x_1 + 5x_2 + 3x_3$ μονάδες πρώτης ύλης ΠY_1 απαιτούνται για την παραγωγή x_1 μονάδων προϊόντος Π_1, x_2 μονάδων προϊόντος Π_2 και x_3 μονάδων προϊόντος Π_3 για κάθε $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$. Η υπόθεση της προσθετικότητας συνεπάγεται ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι διαχωρίσιμη ως προς τις μεταβλητές (separable in the variables). Δηλαδή, η αντικειμενική συνάρτηση $z(\underline{x}) = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα n συναρτήσεων κάθε μία από τις οποίες περιλαμβάνει μία μεταβλητή. Είναι δηλαδή

$$z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z_1(x_1) + \ldots + z_n(x_n)$$

Η υπόθεση της αναλογικότητας μαζί με την υπόθεση της προσθετικότητας είναι γνωστή ως υπόθεση της γραμμικότητας (linearity assumption).

3. Υπόθεση της συνέχειας στις τιμές των μεταβλητών (continuity of variation assumption). Κάθε μεταβλητή του προβλήματος μπορεί να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές στο διάστημα μεταβολής της. Δηλαδή το πεδίο ορισμού κάθε μεταβλητής ενός προβλήματος Γ.Π. είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών. Αυτή η υπόθεση εναλλακτικά καλείται υπόθεση της διαιρετότητας (divisibility assumption).

4. Υπόθεση της προσδιοριστικότητας (certainty assumption).

Το πρόβλημα είναι προσδιοριστικό (deterministic) όταν γνωρίζουμε με <u>βεβαιότητα</u> τις τιμές των παραμέτρων, δηλαδή των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης, των συντελεστών των περιορισμών και τα δεξιά μέλη των περιορισμών. Αυτό σημαίνει ότι αυτές οι τιμές δεν καθορίζονται από κάποιες πιθανοθεωρητικές κατανομές. Στη πραγματικότητα, είναι πρακτικά αδύνατο να ισχύει η προσδιοριστικότητα από τη φύση του προβλήματος. Οι τιμές των παραμέτρων μπορούν πράγματι να είναι γνωστές σταθερές, π.χ. ακριβώς ένα λίτρο γάλα χρησιμοποιείται στη σύνταξη ενός παγωτού. Ακόμα και στην περίπτωση αυτή όμως το ένα λίτρο υπόκειται σε κάποια ίσως αμελητέα αλλά όχι μηδενική διακύμανση. Επομένως, το ένα λίτρο είναι μία μέση τιμή πιθανότατα με μικρή διακύμανση. Αυτό που τελικά γίνεται στα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού, είναι να χρησιμοποιούμε τις εκτιμήσεις ή τις προβλέψεις των τιμών των παραμέτρων ως γνωστές σταθερές και επομένως να ισχύει η προσδιοριστικότητα. Για αυτό το λόγο μετά την επίλυση ενός προβλήματος είναι πολύ σημαντική η ανάλυση ευαισθησίας (sensitivity analysis) που ακολουθεί, μέσω της οποίας διερευνάται η ευαισθησία των παραμέτρων, δηλαδή κατά πόσο μικρές ή μεγαλύτερες μεταβολές στις τιμές τους επηρεάζουν σημαντικά τη βέλτιστη λύση.

Στη συνέχεια της μορφοποίησης του προβλήματος ως ένα πρόβλημα Γ. Π. κατασκευάζουμε το σύνολο των

περιορισμών του προβλήματος. Οι πιο συχνά χρησι-
μοποιούμενοι περιορισμοί είναι:

(α) Περιορισμοί μη-αρνητικότητας (non-negativity constraints). Π.χ. δεν νοείται η παραγωγή αρνητικών ποσοτήτων ενός προϊόντος. Στο παράδειγμά μας, έχουμε $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

(β) Περιορισμοί παραγωγικής δυναμικότητας (productive capacity constraints). Προέρχονται από τα ανώτατα όρια των πόρων που διατίθενται στην εκτέλεση των διάφορων παραγωγικών διαδικασιών. Τέτοιοι πόροι μπορεί να είναι μηχανολογικός εξοπλισμός, αποθηκευτικοί χώροι, διάφορα είδη ανθρώπινου δυναμικού κλπ. Π.χ. οι περιορισμοί που αντιστοιχούν στις διαδικασίες της κοπής, της συναρμολόγησης και της βαφής έχουν ως εξής: οι εργατοώρες που χρησιμοποιούνται για την κοπή, συναρμολόγηση και βαφή για να παραχθούν x_1 μονάδες προϊόντος Π_1, x_2 μονάδες προϊόντος Π_2 και x_3 μονάδες προϊόντος Π_3 είναι:

$$15x_1 + 28x_2 + 5x_3 ,\ 3x_1 + 4x_2 + 11x_3 ,\ 19x_1 + 22x_2 + 6x_3$$

αντίστοιχα. Οι ποσότητες αυτές δεν μπορεί να υπερβαίνουν τις διαθέσιμες εργατοώρες των 5500, 13100 και 3600 για κοπή, συναρμολόγηση και βαφή, αντίστοιχα. Προκύπτουν έτσι οι περιορισμοί:

$$15x_1 + 28x_2 + 5x_3 \leq 5500$$
$$3x_1 + 4x_2 + 11x_3 \leq 13100$$
$$19x_1 + 22x_2 + 6x_3 \leq 3600$$

(γ) Περιορισμοί υλικών και πρώτων υλών παραγωγής (raw materials constraints). Οι περιορισμοί αυτοί προέρχονται από τα ανώτατα όρια στις διαθέσιμες ποσότητες πρώτων και βοηθητικών υλών παραγωγής. Στο παράδειγμά μας οι περιορισμοί αυτοί είναι:

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 125, \quad x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 212$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 167, \quad 7x_1 + x_2 + 10x_3 \leq 265$$

Οι περιορισμοί παραγωγικής δυναμικότητας και οι περιορισμοί πρώτων και βοηθητικών υλών προέρχονται από τις περιορισμένες ποσότητες των διαθέσιμων πόρων και γι'αυτό αποτελούν συχνά την ίδια κατηγορία περιορισμών και αναφέρονται ως τεχνολογικοί περιορισμοί (technological constraints). Σε κάθε πόρο μπορεί να τεθεί είτε μία απαίτηση είτε ένα όριο ή και τα δύο στη διαθεσιμότητά του. Δηλαδή κάθε διαθέσιμος πόρος μπορεί να περιοριστεί είτε με ένα ανώτατο όριο ή με ένα κατώτατο όριο ή και με τα δύο.

(δ) Περιορισμοί αγοράς (market constraints). Οι περιορισμοί αυτοί εκφράζουν συνήθως τις διάφορες συνθήκες που επικρατούν στην αγορά των προϊόντων που παράγει η επιχείρηση. Π.χ. στο παράδειγμά μας, οι περιορισμοί αυτοί είναι τα ανώτατα όρια στην πωλούμενη ποσότητα των προϊόντων Π_1, Π_2 και Π_3. Έχουμε δηλαδή τους περιορισμούς $x_1 \leq 95$, $x_2 \leq 110$, $x_3 \leq 80$.

(ε) Περιορισμοί πολιτικής (policy constraints). Οι περιορισμοί αυτοί εκφράζουν διάφορους επιθυμητούς στόχους οι οποίοι συνήθως αναφέρονται στις λειτουργίες της παραγωγής ή της αγοράς. Π.χ. η εξασφάλιση του κατώτατου ορίου των 50 νομισματικών μονάδων κερδών εκφράζεται με την ανισότητα $5x_1+11x_2+8x_3 \geq 50$. Τα επιθυμητά κατώτατα όρια των 40, 65 και 35 μονάδων στις πωλήσεις των προϊόντων Π_1, Π_2 και Π_3 αντίστοιχα ενσωματώνονται στους περιορισμούς $x_1 \geq 40$, $x_2 \geq 65$, $x_3 \geq 35$.

Οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες αντικειμενικές συναρτήσεις που εμφανίζονται σε προβλήματα βελτιστοποίησης της λειτουργίας μίας επιχείρησης ή ενός οργανισμού είναι: (α) Μεγιστοποίηση κέρδους (profit maximization), (β) Ελαχιστοποίηση κόστους (cost minimization) και (γ) Μεγιστοποίηση χρησιμότητας (utility maximization). Η εκτέλεση κάθε δραστηριότητας $j \in J$ σε επίπεδο μονάδας επιφέρει ένα αποτέλεσμα που συμβολίζουμε με c_j. Το τι παριστάνει το c_j καθώς και η μονάδα μέτρησής του εξαρτώνται προφανώς από το είδος της αντικειμενικής συνάρτησης που βελτιστοποιείται. Π.χ. στο παράδειγμά μας, στο οποίο ζητείται η μεγιστοποίηση των εσόδων από πωλήσεις, έχουμε:
$c_1=23$, $c_2=18$, $c_3=25$ νομισματικές μονάδες. Το πρόβλημα βέλτιστης επιλογής των προϊόντων μορφοποιείται ως ένα πρόβλημα Γ. Π. ως εξής:

Μέγιστο της $z(x_1,x_2,x_3)=23x_1+18x_2+25x_3$

με περιορισμούς:
$$\left.\begin{aligned} 15x_1+28x_2+5x_3 &\leq 5500\\ 3x_1+4x_2+11x_3 &\leq 13100\\ 19x_1+22x_2+6x_3 &\leq 3600 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+5x_2+3x_3 &\le 125\\ x_1+2x_2+5x_3 &\le 212\\ 4x_1+3x_2+x_3 &\le 167\\ 7x_1+x_2+10x_3 &\le 265 \end{aligned}\right\}\ \text{Τεχνολογικοί περιορισμοί}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\le 95\\ x_2 &\le 110\\ x_3 &\le 80 \end{aligned}\right\}\ \text{Περιορισμοί αγοράς}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\ge 40\\ x_2 &\ge 60\\ x_3 &\ge 35\\ 5x_1+11x_2+8x_3 &\ge 50 \end{aligned}\right\}\ \text{Περιορισμοί πολιτικής}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0 \quad \text{Περιορισμός μη-αρνητικότητας.}\ \boxtimes$$

1.4 Εφαρμογές Μορφοποίησης προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Σ'αυτό το εδάφιο θα παρουσιάσουμε μερικά παραδείγματα τα οποία θα διαμορφώσουμε ως προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, για να δείξουμε το ευρύ πεδίο εφαρμογών του γραμμικού προγραμματισμού αλλά και τον τρόπο μοντελοποίησης του αντίστοιχου μοντέλου.

Παράδειγμα 2 (Πρόβλημα Δίαιτας – Diet problem). Στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε τη βέλτιστη κατανομή των τροφίμων ώστε να εντοπίσουμε εκείνο το διαιτολόγιο που τηρεί συγκεκριμένες διατροφικές προδιαγραφές με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Αποτελεί σημαντικό πρόβλημα για ιδρύματα στα οποία σιτίζεται μεγάλο πλήθος ατόμων, όπως π.χ. νοσοκομεία, εκπαιδευτικές μονάδες, φυλακές, στρατώνες και άλλα.

Μία επιχείρηση τροφίμων παράγει μία μεγάλη ποικιλία ζωοτροφών και πρόκειται να εισάγει στην αγορά μία νέα ζωοτροφή. Το νέο προϊόν πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένες διατροφικές προδιαγραφές σε βιταμίνες, πρωτεΐνες και θερμίδες. Ειδικότερα, μία μονάδα ζωοτροφής (π.χ. μία κονσέρβα ενός κιλού) πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 80 μονάδες βιταμίνης Α, 100 μονάδες βιταμίνης Γ, 60 μονάδες βιταμίνης Ε, 260 μονάδες πρωτεϊνών και το πολύ 2.300 θερμίδες. Η παρασκευή της ζωοτροφής μπορεί να γίνει με ανάμειξη τεσσάρων το πολύ βασικών συστατικών καθένα από τα οποία περιέχει έναν αριθμό διατροφικών στοιχείων τα οποία δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Στον πίνακα δίνεται επίσης και το κόστος κάθε μονάδας βασικού συστατικού. Στόχος του προβλήματος είναι ο προσδιορισμός των ποσοτήτων που πρέπει να αναμειχθούν από κάθε συστατικό, ώστε να παρουσιαστεί με το μικρότερο δυνατό κόστος η νέα ζωοτροφή που ικανοποιεί τις συγκεκριμένες διατροφικές προδιαγραφές.

Απαιτούμενο διατροφικό στοιχείο	Αριθμός διατροφικών στοιχείων ανά μονάδα συστατικού — Συστατικό 1	2	3	4	Διατροφική απαίτηση ανά μονάδα ζωοτροφής
Βιταμίνη Α	80	115	100	90	≥80
Βιταμίνη Γ	110	90	85	100	≥100
Βιταμίνη Ε	50	70	105	80	≥60
Πρωτεΐνες	250	300	210	240	≥260
Θερμίδες	480	510	470	530	≤2300
Κόστος ανά μονάδα συστατικού (σε νομ. μονάδες)	180	160	145	200	

Για να διαμορφώσουμε το πρόβλημα ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού, έστω x_j, $j=1,2,3,4$ η ποσότητα του συστατικού j που αναμειγνύεται για την παρασκευή μίας μονάδας ζωοτροφής (κονσέρβα ενός κιλού).
Η αντικειμενική συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το κόστος παραγωγής ενός κιλού ζωοτροφής είναι:

$$\text{Min } Z = 180x_1 + 160x_2 + 145x_3 + 200x_4$$

Ο περιορισμός σχετικά με τη διατροφική απαίτηση της ζωοτροφής σε βιταμίνη Α είναι:

$$80x_1 + 115x_2 + 100x_3 + 90x_4 \geq 80 \text{ (Βιταμίνη Α)}$$

Οι αντίστοιχοι περιορισμοί για τη βιταμίνη Γ, τη βιταμίνη Ε, τις πρωτεΐνες και τις θερμίδες δίνονται από τις ανισώσεις:

$$110x_1 + 90x_2 + 85x_3 + 100x_4 \geq 100 \text{ (βιταμίνη Γ)}$$

$$50x_1 + 70x_2 + 105x_3 + 80x_4 \geq 60 \text{ (βιταμίνη Ε)}$$

$$250x_1 + 300x_2 + 210x_3 + 240x_4 \geq 260 \text{ (πρωτεΐνες)}$$

$$480x_1 + 510x_2 + 470x_3 + 530x_4 \leq 2300 \text{ (Θερμίδες)}$$

Τέλος, υπάρχει ο περιορισμός σύμφωνα με τον οποίον το άθροισμα των ποσοτήτων των τεσσάρων συστατικών είναι ίσο με το ένα κιλό ζωοτροφής που παράγεται, δηλαδή, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Συνεπώς, το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού, που ελαχιστοποιεί το κόστος παραγωγής της ζωοτροφής λαμβάνοντας υπόψη τις διατροφικές απαιτήσεις του προϊόντος και την επεξεργασία των συστατικών, είναι:

$$Min\, z = 180x_1 + 160x_2 + 145x_3 + 200x_4$$

με περιορισμούς:

$$80x_1 + 115x_2 + 100x_3 + 90x_4 \geq 80$$
$$110x_1 + 90x_2 + 85x_3 + 100x_4 \geq 100$$
$$50x_1 + 70x_2 + 105x_3 + 80x_4 \geq 60$$
$$250x_1 + 300x_2 + 210x_3 + 240x_4 \geq 260$$
$$480x_1 + 510x_2 + 470x_3 + 530x_4 \leq 2300$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Η βέλτιστη λύση είναι: $x_1 = 0.537$, $x_2 = 0.317$, $x_3 = 0.146$ και $x_4 = 0$. Για την παρασκευή ενός κιλού ζωοτροφής θα χρησιμοποιηθούν 537 γραμμάρια του συστατικού 1, 317 γραμμάρια του συστατικού 2, 146 γραμμάρια του συστατικού 3 και καθόλου από το συστατικό 4. Το ελάχιστο κόστος παραγωγής ενός κιλού ζωοτροφής είναι: 168.55 νομισματικές μονάδες. ⊠

Παράδειγμα 3 (Πρόβλημα Μείξης - blending problem).
Το πρόβλημα αυτό έχει τις ρίζες του στη βιομηχανία διύλισης και αναφέρεται στον προσδιορισμό του βέλτιστου προγράμματος μείξης διαφορετικών πρώτων υλών για την παραγωγή καυσίμων με συγκεκριμένες ιδιότητες. Το πρόβλημα αφορά τον εντοπισμό εκείνης της συνταγής σύμφωνα με την οποία αναμειγνύονται διαφορετικά προϊόντα πετρελαίου προκειμένου να δώσουν ένα βελτιωμένο μείγμα με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Παρόμοιες εφαρμογές υπάρχουν στις χημικές βιομηχανίες, στη βιομηχανία τροφίμων, στη μεταλλουργία και αλλού.

Ένα διυλιστήριο παράγει μεταξύ άλλων προϊόντων και τρία είδη βενζίνης, τη super, την αμόλυβδη και τη super αμόλυβδη. Αυτά τα προϊόντα παράγονται από τη μείξη τριών το πολύ κύριων συστατικών Α, Β και Γ. Για κάθε κύριο συστατικό, ο αριθμός των οκτανίων, το κόστος του τόνου, καθώς και η μέγιστη ημερήσια ποσότητα σε τόνους που μπορεί να έχει στη διάθεσή του το διυλιστήριο δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Δεδομένα προσφοράς

Κύριο Συστατικό	Αριθμός οκτανίων	Κόστος ανά τόνο	Μέγιστη ημερήσια διαθέσιμη ποσότητα (τόνοι)
Α	120	38	1000
Β	90	42	1200
Γ	130	105	700

Κάθε είδος βενζίνης πρέπει να ικανοποιεί έναν ελάχιστο αριθμό οκτανίων. Για κάθε προϊόν, ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός οκτανίων, η τιμή πώλησης της βενζίνης, καθώς και η ελάχιστη ημερήσια ζήτηση σε τόνους δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Δεδομένα ζήτησης

Βενζίνη	Ελάχιστος αριθμός οκτανίων	Τιμή ανά τόνο	Ημερήσια ζήτηση (τόνοι)
Super	94	85	800
Αμόλυβδη	92	80	1100
Super αμόλυβδη	96	88	500

Η διοίκηση του διυλιστηρίου ενδιαφέρεται να προσδιορίσει τις ποσότητες από το κάθε συστατικό για την παραγωγή των τριών προϊόντων ώστε να μεγιστοποιήσει τη συνολική ημερήσια συνεισφορά στο κέρδος λαμβάνοντας υπόψη τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό οκτανίων κάθε προϊόντος, τις διαθέσιμες ποσότητες των κυρίων συστατικών και τις ελάχιστες ζητούμενες ποσότητες των τριών ειδών βενζίνης.

Υποθέτουμε ότι η περίοδος προγραμματισμού είναι η μία ημέρα και ότι όλες οι ποσότητες της βενζίνης που παράγονται κατά τη διάρκεια της ημέρας από τη μείξη των τριών συστατικών πωλούνται την ίδια ημέρα.

Για να διαμορφώσουμε το πρόβλημα ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες μεταβλητές απόφασης:

X_{ij} := ποσότητα συστατικού i που αναμειγνύεται για την παραγωγή του προϊόντος j

$i = A, B, \Gamma \qquad j = 1, 2, 3$

και $j = 1$ - βενζίνη super, $j = 2$ - βενζίνη αμόλυβδη

$j = 3$ - βενζίνη super αμόλυβδη

Είναι $X_{A1} + X_{A2} + X_{A3}$:= ημερησία χρησιμοποιούμενη ποσότητα συστατικού A

$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3}$:= ημερησία χρησιμοποιούμενη ποσότητα συστατικού B

$X_{\Gamma 1} + X_{\Gamma 2} + X_{\Gamma 3}$:= ημερησία χρησιμοποιούμενη ποσότητα συστατικού Γ

και

$X_{A1} + X_{B1} + X_{\Gamma 1}$:= ημερήσια παραγόμενη ποσότητα βενζίνης super

$X_{A2} + X_{B2} + X_{\Gamma 2}$:= ημερήσια παραγόμενη ποσότητα αμόλυβδης βενζίνης

$X_{A3} + X_{B3} + X_{\Gamma 3}$:= ημερήσια παραγόμενη ποσότητα super αμόλυβδης

Τα ημερήσια έσοδα από την παραγωγή και πώληση των τριών ειδών βενζίνης είναι:

$$\text{Ημερήσια Έσοδα} = 85(X_{A1} + X_{B1} + X_{\Gamma 1}) + 80(X_{A2} + X_{B2} + X_{\Gamma 2}) + 88(X_{A3} + X_{B3} + X_{\Gamma 3})$$

Το ημερήσιο συνολικό κόστος των χρησιμοποιούμενων ποσοτήτων των τριών κύριων συστατικών για την παραγωγή των προϊόντων είναι:

$$\text{Ημερήσιο συνολικό κόστος} := 38(X_{A1}+X_{A2}+X_{A3}) + 42(X_{B1}+X_{B2}+X_{B3}) + 105(X_{\Gamma1}+X_{\Gamma2}+X_{\Gamma3})$$

Συνεπώς, η ημερήσια συνολική συνεισφορά στο κέρδος είναι:

$$z=(85-38)X_{A1}+(80-38)X_{A2}+(88-38)X_{A3} +(85-42)X_{B1}+(80-42)X_{B2}+(88-42)X_{B3} +(85-105)X_{\Gamma1}+(80-105)X_{\Gamma2}+(88-105)X_{\Gamma3}$$

και η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος που μεγιστοποιεί τη συνολική συνεισφορά στο κέρδος είναι:

$$\text{Max } z = 47X_{A1}+42X_{A2}+50X_{A3}+43X_{B1} +38X_{B2}+46X_{B3}-20X_{\Gamma1}-25X_{\Gamma2}-17X_{\Gamma3}$$

Ο ελάχιστος αριθμός οκτανίων της βενζίνης super είναι 94 οκτάνια, θα πρέπει:

$$\frac{120X_{A1}+90X_{B1}+130X_{\Gamma1}}{X_{A1}+X_{B1}+X_{\Gamma1}} \geq 94$$

Ομοίως, για την αμόλυβδη βενζίνη και την super αμόλυβδη, αντίστοιχα, θα πρέπει:

$$\frac{120X_{A2}+90X_{B2}+130X_{\Gamma2}}{X_{A2}+X_{B2}+X_{\Gamma2}} \geq 92$$

$$\frac{120X_{A3}+90X_{B3}+130X_{\Gamma3}}{X_{A3}+X_{B3}+X_{\Gamma3}} \geq 96$$

Προκύπτουν οι ανισώσεις:

$$26X_{A1}-4X_{B1}+36X_{\Gamma1}\geq 0$$
$$28X_{A2}-2X_{B2}+38X_{\Gamma2}\geq 0$$
$$24X_{A3}-6X_{B3}+34X_{\Gamma3}\geq 0$$

Η ημερήσια χρησιμοποιούμενη ποσότητα κάθε συστατικού δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διαθέσιμη ποσότητα του συστατικού. Συνεπώς, για τα συστατικά A, B, Γ θα πρέπει:

$$X_{A1}+X_{A2}+X_{A3}\leq 1000$$
$$X_{B1}+X_{B2}+X_{B3}\leq 1200$$
$$X_{\Gamma1}+X_{\Gamma2}+X_{\Gamma3}\leq 700$$

Η ποσότητα που παράγεται από κάθε είδος βενζίνης πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με την ημερήσια ζήτηση, δηλαδή θα πρέπει:

$$X_{A1}+X_{B1}+X_{\Gamma1}\geq 800$$
$$X_{A2}+X_{B2}+X_{\Gamma2}\geq 1100$$
$$X_{A3}+X_{B3}+X_{\Gamma3}\geq 500$$

Το μοντέλο Γ.Π. που μεγιστοποιεί την ημερήσια συνεισφορά στο κέρδος και συγχρόνως ικανοποιεί τον ελάχιστο αριθμό οκτανίων των βενζινών, τους περιορισμούς της ημερήσιας ποσότητας των συστατικών και την ημερήσια ζήτηση των τριών προϊόντων είναι:

$$Max\ z = 47X_{A1}+42X_{A2}+50X_{A3}+43X_{B1}+38X_{B2}$$

$$+46x_{B3}-20x_{\Gamma1}-25x_{\Gamma2}-17x_{\Gamma3}$$

με περιορισμούς:

$$\left.\begin{array}{l} 26x_{A1}-4x_{B1}+36x_{\Gamma1}\geq 0 \\ 28x_{A2}-2x_{B2}+38x_{\Gamma2}\geq 0 \\ 24x_{A3}-6x_{B3}+34x_{\Gamma3}\geq 0 \end{array}\right\}\text{ περιορισμοί ελάχιστου αριθμού οκτανίων}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}\leq 1000 \\ x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}\leq 1200 \\ x_{\Gamma1}+x_{\Gamma2}+x_{\Gamma3}\leq 700 \end{array}\right\}\text{ περιορισμοί προσφοράς συστατικών}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{A1}+x_{B1}+x_{\Gamma1}\geq 800 \\ x_{A2}+x_{B2}+x_{\Gamma2}\geq 1100 \\ x_{A3}+x_{B3}+x_{\Gamma3}\geq 500 \end{array}\right\}\text{ περιορισμοί ζήτησης προϊόντων}$$

$$x_{ij}\geq 0,\ i=A,B,\Gamma,\ j=1,2,3.$$

Η βέλτιστη λύση είναι: $x_{A1}=0$, $x_{A2}=500$, $x_{A3}=500$, $x_{B1}=720$, $x_{B2}=480$, $x_{B3}=0$, $x_{\Gamma1}=80$, $x_{\Gamma2}=120$, $x_{\Gamma3}=0$. Για να μεγιστοποιήσει το διυλιστήριο την ημερήσια συνεισφορά στο κέρδος, θα πρέπει να χρησιμοποιήσει 720 τόνους συστατικού Β και 80 τόνους συστατικού Γ για να παράγει 800 τόνους βενζίνης super, 500 τόνους συστατικού Α με 480 τόνους συστατικού Β και 120 τόνους συστατικού Γ για να παράγει 1100 τόνους αμόλυβδης βενζίνης και τέλος 500 τόνους συστατικού Α για να παράγει 500 τόνους super αμόλυβδης βενζίνης. Η μέγιστη συνολική ημερήσια συνεισφορά στο κέρδος που αντιστοιχεί στο βέλτιστο πρόγραμμα μείξης είναι 90.600.000 νομισματικές μονάδες. ⊠

Παράδειγμα 4 (Επιλογή διαφημιστικών Μέσων)

Αυτό το πρόβλημα το αντιμετωπίζουν τόσο οι επιχειρήσεις και οι οργανισμοί όσο και οι διαφημιστικές εταιρείες προκειμένου να αναπτύξουν την κατάλληλη διαφημιστική εκστρατεία. Το πρόβλημα αφορά στον προσδιορισμό του αριθμού των προβολών/καταχωρήσεων που πρέπει να γίνουν στα διάφορα διαφημιστικά μέσα π.χ. τηλεόραση, ραδιόφωνο, περιοδικά, εφημερίδες και άλλα ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική ακροαματικότητα της διαφημιστικής εκστρατείας. Η διαφήμιση στα διάφορα μέσα πρέπει να λαμβάνει υπόψη έναν αριθμό περιορισμών, όπως π.χ. ο προϋπολογισμός της διαφημιστικής εκστρατείας, ο μέγιστος ή ο ελάχιστος αριθμός προβολών/καταχωρήσεων στα διαφημιστικά μέσα, τα χαρακτηριστικά των ακροατών, η πολιτική της επιχείρησης ή του οργανισμού και άλλοι. Συνεπώς, το πρόβλημα της επιλογής των διαφημιστικών μέσων είναι ένα πρόβλημα κατανομής περιορισμένων πόρων σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες (τα διαφημιστικά μέσα) το οποίο μπορεί να διαμορφωθεί ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Μία βιομηχανική επιχείρηση πρόκειται να εισάγει στην αγορά ένα νέο προϊόν. Οι υπεύθυνοι του τμήματος διαφήμισης αποφάσισαν να κάνουν μία δοκιμαστική διαφήμιση στην τηλεόραση ένα συγκεκριμένο τριήμερο Παρασκευής-Σαββάτου-Κυριακής. Το κόστος μίας προβολής και η ακροαματικότητα της μίας προβολής του επιλεγμένου καναλιού διαφέρουν ανάλογα με την ημέρα και την ώρα και δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Διαφημιστικό μέσο	Κόστος μίας προβολής (σε χιλιάδες ευρώ)	Μονάδες αναμενόμενης ακροαματικότητας μίας προβολής
Παρ-Ημέρα	400	5000
Σάββ-Ημέρα	450	5500
Κυριακή-Ημέρα	450	5700
Παρ-Νύχτα	500	7500
Σάββ-Νύχτα	550	8200
Κυριακή-Νύχτα	550	8400

Το πρόβλημα είναι πρόβλημα επιλογής διαφημιστικών μέσων λόγω των διαφορετικών στοιχείων κόστους και ακροαματικότητας αν και το κανάλι της τηλεόρασης είναι μόνο ένα. Στόχος των υπεύθυνων της διαφήμισης είναι η μεγιστοποίηση της συνολικής ακροαματικότητας, λαμβάνοντας υπόψη τους ακόλουθους περιορισμούς: (α) Το συνολικό ποσό που θα δοθεί για όλες τις προβολές του τριμήνου να μην υπερβαίνει τα 45 εκατομμύρια ευρώ. (β) Το ποσό που θα δοθεί για τις προβολές της Παρασκευής να μην είναι μεγαλύτερο από 11 εκατομμύρια ευρώ, ενώ για τις προβολές του Σαββάτου να μην είναι μεγαλύτερο από 14.4 εκατομμύρια ευρώ. (γ) Ο συνολικός αριθμός των προβολών που θα γίνουν κατά τη διάρκεια της ημέρας να είναι τουλάχιστον 20, ενώ ο συνολικός αριθμός των προβολών που θα γίνουν κατά τη διάρκεια της νύχτας να είναι τουλάχιστον το 50% του συνολικού αριθμού των προβολών. (δ) Ο μέγιστος αριθμός προβολών που θα γίνουν κατά την διάρκεια μίας ημέρας πρέπει να είναι το πολύ 12 και κάθε νύχτα το πολύ 18.

Για να διαμορφώσουμε το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα Γ.Π. θα χρησιμοποιήσουμε τις μεταβλητές αποφάσεων:

$x_1 = \#$ προβολών ημέρας Παρασκευής
$x_2 = \#$ —"— —"— Σαββάτου
$x_3 = \#$ —"— —"— Κυριακής
$x_4 = \#$ —"— νύχτας Παρασκευής
$x_5 = \#$ —"— —"— Σαββάτου
$x_6 = \#$ —"— —"— Κυριακής

Η αντικειμενική συνάρτηση που μεγιστοποιεί το συνολικό αριθμό των μονάδων ακροαματικότητας κατά τη διάρκεια του τριμήνου είναι:

$$\text{Max } z = 5000x_1 + 5500x_2 + 5700x_3 + 7500x_4 + 8200x_5 + 8400x_6$$

Ο περιορισμός που εκφράζει τον προϋπολογισμό της δοκιμαστικής διαφήμισης (σε χιλιάδες ευρώ) είναι:

$$400x_1 + 450x_2 + 450x_3 + 500x_4 + 550x_5 + 550x_6 \leq 45000$$

Ο περιορισμός σχετικά με το ποσό που θα δοθεί στις προβολές που θα γίνουν την Παρασκευή (σε χιλιάδες ευρώ) είναι: $400x_1 + 500x_4 \leq 11000$, ενώ ο αντίστοιχος περιορισμός που σχετίζεται με το ποσό που θα δοθεί για τις προβολές του Σαββάτου (σε χιλιάδες ευρώ) είναι: $450x_2 + 550x_2 \leq 14400$. Ο περιορισμός που αφορά το συνολικό αριθμό των προβολών της ημέρας είναι: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 20$ και ο περιορισμός του συνολικού αριθμού των προβολών της νύχτας είναι:

$$x_4 + x_5 + x_6 \geq 0.5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$

$$\Rightarrow -0.5x_1 - 0.5x_2 - 0.5x_3 + 0.5x_4 + 0.5x_5 + 0.5x_6 \geq 0$$

Υπάρχουν, τέλος, έξι περιορισμοί σχετικά με το μέγιστο αριθμό επιτρεπόμενων προβολών κάθε ημέρα και νύχτα καθώς και ο περιορισμός της μη-αρνητικότητας. Το μοντέλο του Γ. Π. που μεγιστοποιεί τη συνολική ακροαματικότητα λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς του προβλήματος, είναι:

$$\text{Max } z = 5000x_1 + 5500x_2 + 5700x_3 + 7500x_4 + 8200x_5 + 8400x_6), \text{ με}$$

περιορισμούς:

$$400x_1 + 450x_2 + 450x_3 + 500x_4 + 550x_5 + 550x_6 \leq 45000$$

$$400x_1 + 500x_4 \leq 11000$$

$$450x_2 + 550x_5 \leq 14400$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 20$$

$$-0.5x_1 - 0.5x_2 - 0.5x_3 + 0.5x_4 + 0.5x_5 + 0.5x_6 \geq 0$$

$$x_1 \leq 12, \quad x_4 \leq 18$$

$$x_2 \leq 12, \quad x_5 \leq 18, \quad x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, 6$$

$$x_3 \leq 12, \quad x_6 \leq 18$$

Η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι: $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 12$ και $x_4 = x_5 = x_6 = 18$, δηλαδή η επιχείρηση θα πρέπει να κάνει 5 προβολές το πρωί της Παρασκευής, 10 προβολές το πρωί του Σαββάτου, 12 προβολές το πρωί της Κυριακής και από 18 προβολές κάθε βράδυ του τριημέρου. Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 582,2 μονάδες ακροαματικότητας. $\boxtimes$

Παράδειγμα 5 (Πρόβλημα μεταφοράς - Transportation problem). Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται στον οικονομικότερο τρόπο μεταφοράς ενός προϊόντος από διαφορετικές πηγές - προελεύσεις (παραγωγικές μονάδες, αποθήκες, κέντρα διανομής και άλλα) σε διάφορους προορισμούς-κέντρα κατανάλωσης (σημεία πώλησης, αποθήκες, σταθμούς, λιμάνια και άλλα). Αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που αντιμετωπίστηκαν με Γ.Π. με πολλές εφαρμογές σε προβλήματα κατανομής περιορισμένων πόρων σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες που δε σχετίζονται απαραίτητα με μεταφορά προϊόντων. Ο βέλτιστος τρόπος μεταφοράς των προϊόντων καλείται βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς (optimal transportation plan) και προκύπτει με κριτήριο το συνολικό κόστος μεταφοράς των αγαθών από τις διάφορες πηγές στους διάφορους προορισμούς. Η προσφορά-δυναμικότητα (supply, capacity) κάθε πηγής είναι συνήθως περιορισμένη και η ζήτηση κάθε προορισμού προσδιορισμένη.

Μία εταιρεία αναψυκτικών παράγει και διανέμει ένα αναψυκτικό ευρείας κατανάλωσης. Το προϊόν παράγεται σε τρία εργοστάσια της Βόρειας Ελλάδας και η εταιρεία ικανοποιεί την τοπική ζήτηση. Η εταιρεία αποστέλλει ποσότητες του προϊόντος σε τέσσερις βαλκανικές πόλεις. Η μεταφορά του προϊόντος από τα τρία εργοστάσια στις τέσσερις πόλεις πραγματοποιείται με τα οχήματα της εταιρείας. Το κόστος μεταφοράς ενός κιβωτίου από κάθε εργοστάσιο σε κάθε πόλη ποικίλει ανάλογα με την απόσταση, το χρόνο και το κόστος των καυσίμων και δίνεται σε χρηματικές μονάδες στον παρακάτω πίνακα.

Από \ Προς	Πόλη 1	Πόλη 2	Πόλη 3	Πόλη 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	8	10	7	9	250
Εργοστάσιο 2	9	11	9	7	400
Εργοστάσιο 3	7	5	4	6	350
Ζήτηση	350	150	300	200	1000

Στον ίδιο πίνακα δίνεται η εβδομαδιαία ποσότητα που μπορεί να αποστείλει κάθε εργοστάσιο (Στήλη: Προσφορά) καθώς και η εβδομαδιαία ζήτηση κάθε πόλης (Σειρά: Ζήτηση).

Η συνολική εβδομαδιαία ζήτηση είναι 1000 κιβώτια αναψυκτικού όση είναι και η συνολική εβδομαδιαία προσφορά των τριών εργοστασίων. Όταν η συνολική προσφορά είναι ίση με τη συνολική ζήτηση, το πρόβλημα καλείται ισορροπημένο (balanced).

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει η διοίκηση της εταιρείας είναι να εντοπίσει το πλήθος των κιβωτίων που πρέπει να αποστείλει εβδομαδιαίως κάθε εργοστάσιο σε κάθε πόλη ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς. Είναι δυνατόν να παραστήσουμε το πρόβλημα με τη μορφή ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού. Μπορούμε να θεωρήσουμε ως μεταβλητές απόφασης το πλήθος των κιβωτίων που αποστέλλονται από κάθε προέλευση σε κάθε προορισμό. Έστω

x_{ij} = πλήθος κιβωτίων που αποστέλλονται από το εργοστάσιο i στην πόλη j.

Ο δείκτης i παίρνει τιμές από 1 μέχρι 3 και ο j από 1 μέχρι 4. Το κόστος μεταφοράς από κάθε προέλευση σε κάθε προορισμό είναι το γινόμενο της αντίστοιχης μεταβλητής με το μοναδιαίο κόστος. Πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η ακόλουθη αντικειμενική συνάρτηση:

$$z = 8x_{11} + 10x_{12} + 7x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 7x_{24} + 7x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 6x_{34}$$

Η συνολική προσφορά κάθε εργοστασίου στις τέσσερις πόλεις δεν θα πρέπει να ξεπερνάει τη δυναμικότητα του αντίστοιχου εργοστασίου. Επίσης, θα πρέπει να ικανοποιείται ακριβώς η ζήτηση κάθε πόλης για το προϊόν.

Υπάρχουν δύο ομάδες περιορισμών, η πρώτη αναφέρεται στην προσφορά και η δεύτερη στη ζήτηση. Για κάθε προέλευση (εργοστάσιο) έχουμε ένα περιορισμό προσφοράς και για κάθε προορισμό (πόλη) ένα περιορισμό ζήτησης.

Για το εργοστάσιο 1, η συνολική ποσότητα που αποστέλλει δεν πρέπει να ξεπερνάει τη δυναμικότητά του, δηλαδή τη συνολική του προσφορά η οποία είναι 250 κιβώτια την εβδομάδα. Άρα, $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \leq 250$.

Ομοίως, για το εργοστάσιο 2, $x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} \leq 400$ και για το εργοστάσιο 3, $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} \leq 350$.

Επειδή το πρόβλημα είναι ισορροπημένο (δηλαδή η συνολική προσφορά είναι ίση με τη συνολική ζήτηση) οι παραπάνω περιορισμοί μπορούν να πάρουν τη μορφή ισότητας. Άρα, $x_{12}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=250$, $x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=400$ και $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=350$.

Κάθε πόλη έχει μία εβδομαδιαία απαίτηση η οποία πρέπει να ικανοποιείται. Η ζήτηση της πόλης 1 ανέρχεται σε 350 κιβώτια την εβδομάδα και είναι δυνατόν να ικανοποιείται με μεταφορά κάποιας ποσότητας από κάθε μία από τις προελεύσεις, ώστε να προκύπτει συνολικά η ζητούμενη ποσότητα. Άρα, θα πρέπει να ισχύει: $x_{11}+x_{21}+x_{31}=350$. Ομοίως, για την πόλη 2, $x_{12}+x_{22}+x_{32}=150$ και για τις πόλεις 3 και 4, $x_{13}+x_{23}+x_{33}=300$, $x_{14}+x_{24}+x_{34}=200$

Το γραμμικό μοντέλο του προβλήματος είναι:

$$Min\ z = 8x_{11} + 10x_{12} + 7x_{13} + 9x_{14}$$
$$+ 9x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 7x_{24}$$
$$+ 7x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 6x_{34}$$

με περιορισμούς:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 250$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 400$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 350$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 350$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 150$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 300$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 200$$
$$x_{ij} \geq 0, \text{ για } i = 1,2,3 \text{ και } j = 1,2,3,4.$$

Η βέλτιστη λύση είναι: $x_{11} = 150$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 100$, $x_{14} = 0$, $x_{21} = 200$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 0$, $x_{24} = 200$, $x_{31} = 0$, $x_{32} = 150$, $x_{33} = 200$, $x_{34} = 0$. Το ελάχιστο συνολικό κόστος μεταφοράς είναι ίσο με 6650 χρηματικές μονάδες. Το εργοστάσιο 1 στέλνει 150 κιβώτια στην πόλη 1 και 100 στην πόλη 3 (συνολική προσφορά 250 κιβωτίων), το εργοστάσιο 2 στέλνει 200 κιβώτια στην πόλη 1 και 200 στην πόλη 4 (συνολική προσφορά 400 κιβώτια) και το εργοστάσιο 3 στέλνει 150 κιβώτια στην πόλη 2 και 200 στην πόλη 3 (συνολική προσφορά 350 κιβώτια). Η ζήτηση των 350 κιβωτίων της πόλης 1 καλύπτεται κατά 150 κιβώτια από το εργοστάσιο 1 και κατά 200 κιβώτια από το εργοστάσιο 2. Η εβδομαδιαία ζήτηση της πόλης 2, που είναι 150 μονάδες, καλύπτεται από το εργοστάσιο 3. Η πόλη 3 χρειάζεται 300 κιβώτια που καλύπτονται κατά 100 κιβώτια από το εργοστάσιο 1 και κατά 200 από το εργοστάσιο 3. Τέλος, η ζήτηση των 200 κιβωτίων της πόλης 4 καλύπτεται εξολοκλήρου από το εργοστάσιο 2. ⊠

Στα βιβλία [1], Κεφ. 3, [2], σελ. 23-35, [4], σελ. 13-17, παρουσιάζονται διάφορες εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού όπως π.χ. η επιλογή χαρτοφυλακίου (portfolio selection), η έρευνα marketing, ο προγραμματισμός ανθρώπινου δυναμικού, η επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων, προβλήματα χρηματοοικονομικού προγραμματισμού και άλλα.