ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ Γ.Π. - ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

2.1 Γραφική Επίλυση ενός μοντέλου γ.π.

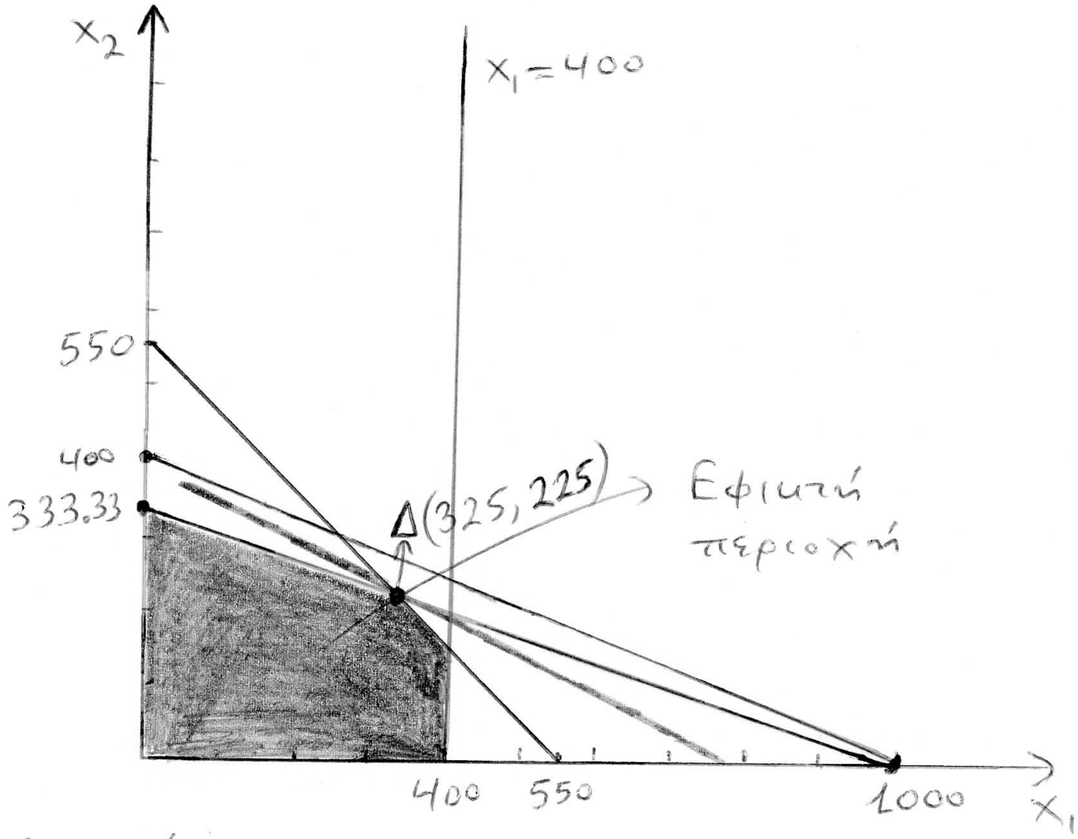
Όταν στη μαθηματική διατύπωση ενός π.γ.π. υπάρχουν δύο μόνο μεταβλητές, τότε εκτός της γενικής αναλυτικής μεθόδου επίλυσης που θα παρουσιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και μία γραφική μέθοδος. Έστω το μοντέλο Γ.Π. τέτοιο ώστε:

$$\text{Max } z = 150x_1 + 200x_2$$

με περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 \leq 550 \quad (1)$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 1000 \quad (2)$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 2000 \quad (3)$$
$$x_1 \leq 400 \quad (4)$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (5)$$

Όταν το πρόβλημα έχει δύο μεταβλητές απόφασης, μπορούμε να παραστήσουμε στο επίπεδο τους περιορισμούς και την αντικειμενική συνάρτηση. Σχεδόν κανένα πραγματικό πρόβλημα δεν έχει μόνο δύο μεταβλητές απόφασης. Ένα μετρίου μεγέθους πραγματικό πρόβλημα πιθανόν να έχει μερικές εκατοντάδες ή χιλιάδες μεταβλητές απόφασης και έναν αρκετά μεγάλο αριθμό περιορισμών. Κατασκευάζουμε ένα σύστημα αξόνων στο οποίο ο οριζόντιος άξονας έχει τις τιμές της μεταβλητής x_1 και ο κάθετος τις τιμές της μεταβλητής x_2. Χρησιμοποιούμε μόνο το πρώτο τεταρτημόριο επειδή οι μεταβλητές παίρνουν τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός. Κάθε πιθανή λύση του προβλήματος παριστάνεται από ένα σημείο πάνω στο σύστημα των θετικών ημιαξόνων. Για τη γραφική επίλυση του προβλήματος πρέπει να χαράξουμε τους περιορισμούς ώστε να καθορίσουμε την <u>εφικτή</u> <u>περιοχή</u> εντός της οποίας ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί. Χειριζόμαστε κάθε ανίσωση-περιορισμό σαν να ήταν εξίσωση και σχεδιάζουμε την εξίσωση της ευθείας που αντιστοιχεί σε κάθε περιορισμό. Αυτή την ευθεία την ονομάζουμε περιοριστική ευθεία. Η εξίσωση ευθείας που αντιστοιχεί στον περιορισμό (1) είναι $x_2 = -x_1 + 550$, στον (2) $x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1000}{3}$, στον (3) $x_2 = -\frac{2}{5}x_1 + 400$, στον (4) $x_1 = 400$. Στο παρακάτω σχήμα εμφανίζεται η εφικτή περιοχή, δηλαδή εκείνη που περιέχει όλες τις εφικτές λύσεις του προβλήματος δηλαδή τις λύσεις που ικανοποιούν τους τέσσερις περιορισμούς και τον περιορισμό της μη-αρνητικότητας. Όλα τα σημεία που περιέχονται στην περιοχή αυτή ή βρίσκονται στο σύνορό της είναι οι εφικτές λύσεις του προβλήματος.



Η διαδικασία για τον εντοπισμό της εφικτής περιοχής απαιτεί την επανάληψη κάποιων βημάτων για κάθε περιορισμό:

(α) Εργαζόμαστε στο πρώτο τεταρτημόριο του συστήματος αξόνων.

(β) Αντικαθιστούμε την ανίσωση του κάθε περιορισμού με την αντίστοιχη εξίσωση.

(γ) Χαράσσουμε την ευθεία που αντιστοιχεί στην εξίσωση (περιοριστική ευθεία).

(δ) Σκιάζουμε την κοινή περιοχή στην οποία ισχύουν οι μέχρι τώρα εξετασθέντες περιορισμοί.

(ε) Αν έχουμε τελειώσει με όλους τους περιορισμούς, τότε έχουμε βρει την εφικτή περιοχή, διαφορετικά επαναλαμβάνουμε τα βήματα (β) – (δ) για κάθε περιορισμό.

Κορυφή ή ακραίο σημείο (vertex, extreme point) της εφικτής περιοχής είναι ένα σημείο στο οποίο τέμνονται δύο περιοριστικές ευθείες. Το επόμενο βήμα είναι ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης, δηλαδή της εφικτής λύσης που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση $z = 150x_1 + 200x_2$. Για την εύρεση της άριστης λύσης σχεδιάζουμε την ευθεία που αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση για αυθαίρετες τιμές του z. Η αντικειμενική συνάρτηση ως εξίσωση ευθείας έχει την εξής μορφή:

$$x_2 = -\frac{150}{200}x_1 + \frac{1}{200}z \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{200}z}$$

Καθώς το z μεταβάλλεται, η τελευταία εξίσωση ορίζει μία οικογένεια παράλληλων ευθειών με ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οι οποίες μετακινούνται επί της εφικτής περιοχής. Για $z = 93,75$ η ευθεία τέμνει την εφικτή περιοχή σ' ένα μόνο σημείο. Οι ευθείες αυτές καλούνται και ευθείες ίσου κέρδους (isoprofit lines) και σε προβλήματα ελαχιστοποίησης καλούνται ευθείες ίσου **κόστους** (isocost lines). Για οποιαδήποτε τιμή του z μεγαλύτερη από 93,75 η αντίστοιχη ευθεία θα μετακινηθεί πιο πάνω και θα βρεθεί στην περιοχή των μη εφικτών λύσεων, επειδή δεν θα έχει κανένα κοινό σημείο με την περιοχή των εφικτών λύ-

σεων. Άρα, όσο απομακρυνόμαστε από την αρχή των αξόνων τόσο αυξάνεται το z και αυτή είναι η κατεύθυνση αύξησης.
Η μέγιστη τιμή του z (το μέγιστο κέρδος) λαμβάνεται εκεί που μία ευθεία από την οικογένεια των παράλληλων ευθειών $z = 150x_1 + 200x_2$ είναι όσο γίνεται "πιο μακριά" από την αρχή των αξόνων αλλά ταυτόχρονα έχει ένα κοινό σημείο με την περιοχή των εφικτών λύσεων. Το σημείο αυτό είναι το Δ. Η βέλτιστη λύση είναι το σημείο Δ με συντεταγμένες $x_1 = 325$ και $x_2 = 225$. Η συνολική συνεισφορά στο κέρδος θα είναι 93,75 νομισματικές μονάδες.

Η βέλτιστη λύση είναι μία κορυφή της εφικτής περιοχής. Ο εντοπισμός της γίνεται με παράλληλη μετακίνηση της ευθείας που αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση. Αυτή η μετακίνηση αυξάνει το z όσο η ευθεία κινείται προς την κατεύθυνση αύξησης. Όπως θα δούμε και στις ιδιότητες των λύσεων, η βέλτιστη λύση σ' ένα πρόβλημα Γ.Π. είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής.

Συνοψίζοντας, για να εντοπίσουμε τη βέλτιστη λύση με τη γραφική μέθοδο σ' ένα διδιάστατο πρόβλημα Γ.Π. θα πρέπει:

1. Να σχεδιάσουμε στο πρώτο τεταρτημόριο τις περιοριστικές ευθείες για όλους τους περιορισμούς.
2. Να εντοπίσουμε την εφικτή περιοχή, δηλαδή την περιοχή στην οποία ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί.
3. Να φέρουμε μία ευθεία για την αντικειμενική συνάρτηση για αυθαίρετη τιμή του z.
4. Να μετακινηθούμε παράλληλα προς την κατεύθυνση αύξησης (μείωσης αν είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης) της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης.
5. Να εντοπίσουμε το ακραίο σημείο (κορυφή), από

το οποίο διέρχεται η αντικειμενική συνάρτηση πριν απομακρυνθεί από την εφικτή περιοχή.

6. Με τη βοήθεια των δύο περιοριστικών ευθειών που καθορίζουν την κορυφή αυτή να βρούμε τις συντεταγμένες της που είναι και οι βέλτιστες τιμές για τις δύο μεταβλητές απόφασης.

7. Να αντικαταστήσουμε τις βέλτιστες τιμές των δύο μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση και να υπολογίσουμε τη βέλτιστη τιμή για το **Z**.

Το γεγονός ότι η βέλτιστη λύση είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής είναι σημαντικό διότι περιορίζεται δραστικά το πλήθος των εφικτών λύσεων που πρέπει να διερευνήσουμε για τον εντοπισμό της βέλτιστης. Η διερεύνηση γίνεται μόνο ανάμεσα στις κορυφές της εφικτής περιοχής οι οποίες είναι πεπερασμένου πλήθους.

2.2 Ειδικές περιπτώσεις

Στη γραφική επίλυση που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, υπήρχε η δυνατότητα να βρούμε τη μοναδική εφικτή λύση που δίνει τη βέλτιστη τιμή στο Z. Τη βέλτιστη λύση την εντοπίσαμε σε μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής. Τα πράγματα όμως δεν είναι πάντα έτσι! Υπάρχουν προβλήματα στα οποία παρουσιάζονται οι ακόλουθες τρεις ειδικές περιπτώσεις: (α) Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις, (β) Προβλήματα χωρίς εφικτές λύσεις και (γ) Μη φραγμένα προβλήματα, δηλαδή περιπτώσεις όπου η τιμή του Z μπορεί να είναι οποιαδήποτε μικρή ή μεγάλη σε αντίστοιχα προβλήματα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης. Οι ειδικές αυτές περιπτώσεις δεν παρουσιάζονται συχνά σε ένα πραγματικό πρόβλημα.

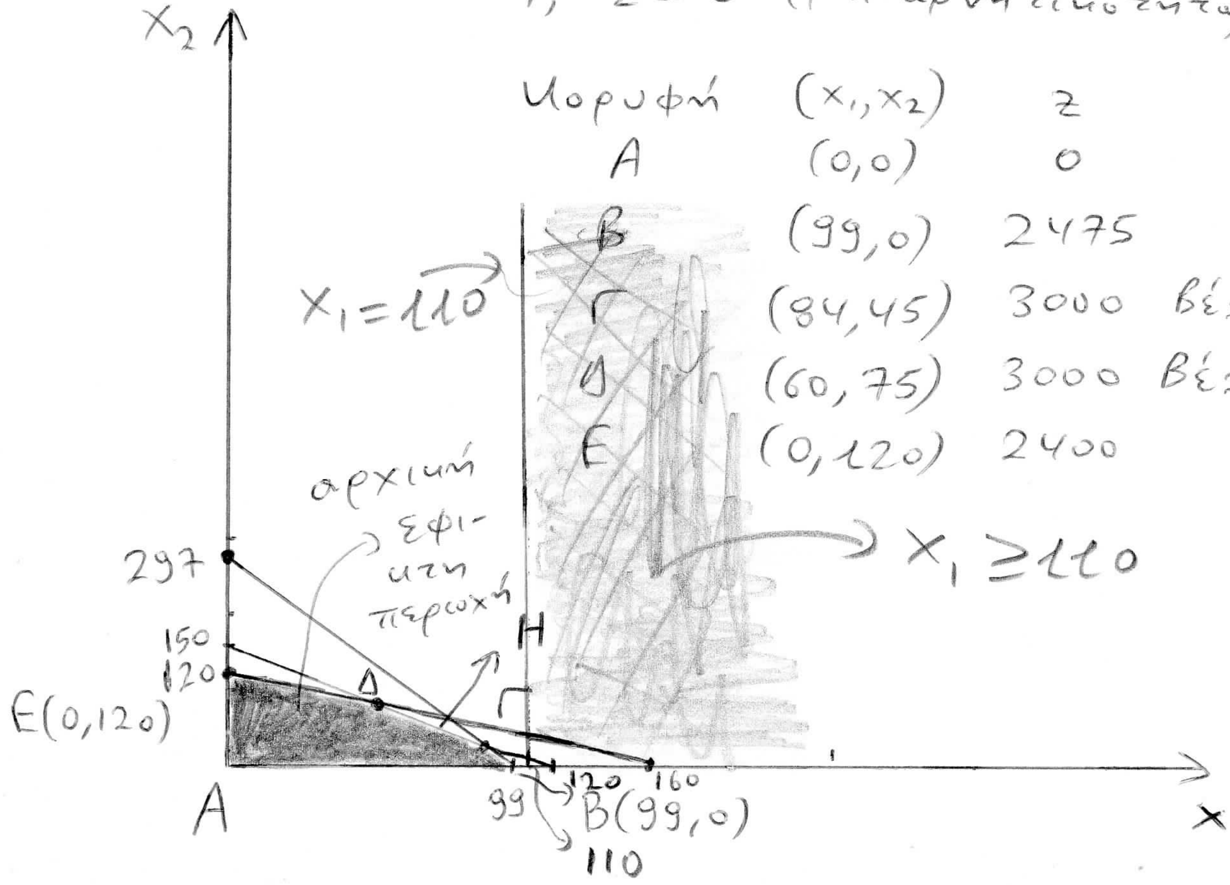
(α) Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Μία μικρή επιχείρηση δερμάτινων ενδυμάτων παράγει δύο προϊόντα A = γυναικείο παλτό, B = ανδρικό σακάκι και επιθυμεί να μεγιστοποιήσει το συνολικό κέρδος της σε σχέση με τα τεμάχια προϊόντων που παράγει. Έστω x_1 = μονάδες προϊόντος A, x_2 = μονάδες προϊόντος B. Οι περιορισμοί του προβλήματος είναι τρεις, ο πρώτος αναφέρεται στις φόδρες, ο δεύτερος στο δέρμα ως πρώτη ύλη και ο τρίτος στην εργασία. Η διαμόρφωση του προβλήματος ως μοντέλο Γ. Π. είναι:

$$\text{Max } z = 25x_1 + 20x_2 \quad \text{(νομισματικές μονάδες)}$$

με περιορισμούς:

$$3x_1 + x_2 \leq 297 \quad \text{(φόδρα)}$$
$$5x_1 + 4x_2 \leq 600 \quad \text{(δέρμα)}$$
$$6x_1 + 8x_2 \leq 960 \quad \text{(εργασία)}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{(μη-αρνητικότητα)}$$



Κορυφή	(x_1, x_2)	z	
A	(0,0)	0	
B	(99,0)	2475	
Γ	(84,45)	3000	βέλτιστη
Δ	(60,75)	3000	βέλτιστη
E	(0,120)	2400	

Η γραφική επίλυση παρουσιάζεται στο σχήμα στο οποίο δίνονται όλες οι κορυφές με τις αντίστοιχες τιμές του z. Για να βρούμε τη βέλτιστη λύση θα πρέπει είτε να χρησιμοποιήσουμε τις ευθείες ίσου κέρδους για διάφορες τιμές του z (παράλληλη μετακίνηση) μέχρι να εντοπίσουμε τη βέλτιστη κορυφή ή να επιλύσουμε την αντικειμενική συνάρτηση για όλες τις κορυφές και να επιλέξουμε αυτή που δίνει το μέγιστο z. Η εξίσωση ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $x_2 = -\frac{5}{4}x_1 + \frac{1}{20}z$

Η περιοριστική ευθεία που αντιστοιχεί στο δεύτερο περιορισμό είναι $x_2 = -\frac{5}{4}x_1 + 150$. Άρα, οι δύο ευθείες είναι παράλληλες. Καθώς μετακινείται η αντικειμενική συνάρτηση για να εντοπίσει τη βέλτιστη κορυφή οι δύο ευθείες συμπίπτουν, δηλαδή η ευθεία που αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση πριν εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή εφάπτεται όχι απλώς σε μία κορυφή, αλλά συμπίπτει με το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ. Οι δύο κορυφές που είναι τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ δίνουν ίδια τιμή για το z που είναι 3000. Δεν είναι όμως μόνο οι δύο αυτές κορυφές βέλτιστες, αλλά όλα τα σημεία του ΓΔ, επειδή δίνουν την ίδια τιμή. Άρα, η επιχείρηση έχει να επιλέξει ανάμεσα σε άπειρες βέλτιστες λύσεις που δίνουν ίδια τιμή στο z και οι οποίες είναι όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ περιλαμβανομένων και των δύο κορυφών. Κάθε λύση που προκύπτει ως κυρτός συνδυασμός των κορυφών Γ και Δ, δηλαδή:

$H = \alpha(84, 45) + (1-\alpha)(60, 75)$, με $0 \leq \alpha \leq 1$, δίνει ένα σημείο που βρίσκεται πάνω στο ΓΔ το οποίο είναι επίσης βέλτιστη λύση δίνοντας άριστη λύση για το z πάντα 3000. Όταν ο α πάρει τιμή μηδέν ή μονάδα, προφανώς έχουμε τις δύο κορυφές. Η επιλογή μίας βέλτιστης λύσης **σε ένα πρόβλημα**, στο οποίο υπάρχουν άπειρες εναλλακτικές, μπορεί να γίνει με τη χρησιμοποίηση ενός ακόμη κριτηρίου επιλογής. Π.χ. μπορεί η επιχείρηση να επιλέξει τη λύση του σημείου Γ αν θέλει να παράγονται όσο είναι δυνατόν περισσότερα γυναικεία δερμάτινα ενδύματα από ανδρικά. Μπορεί ακόμη να επιλέξει τη λύση Η, δηλαδή τον κυρτό συνδυασμό των δύο άκρων επειδή δίνει σχεδόν ισόποση παραγωγή ανάμεσα στα δύο προϊόντα.

(β) Καμία εφικτή λύση: Έστω ότι η επιχείρηση δέχεται μία παραγγελία για τουλάχιστον 110 μονάδες προϊόντος Α. Προσθέτουμε έναν τέταρτο περιορισμό, $x_1 \geq 110$, οπότε το μοντέλο παίρνει τη μορφή:

$$\text{Max } z = 25x_1 + 20x_2 \quad (\text{νομισματικές μονάδες})$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 297 \quad (\text{φόδρα}) \\ 5x_1 + 4x_2 &\leq 600 \quad (\text{δέρμα}) \\ 6x_1 + 8x_2 &\leq 960 \quad (\text{εργασία}) \\ x_1 &\geq 110 \quad (\text{παραγγελία}) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \quad (\text{μη-αρνητικότητα}) \end{aligned}$$

Στο σχήμα της Σελ. 42, βλέπουμε την αρχική εφικτή περιοχή και την περιοχή στην οποία είναι αληθής ο νέος περιορισμός. Δεν υπάρχουν σημεία που να ικανοποιούν ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς. Συνέπεια αυτού είναι η εφικτή περιοχή για το νέο πρόβλημα, να είναι το κενό σύνολο. Η επιχείρηση έχει εκτιμήσει εσφαλμένα τη διαθέσιμη ποσότητα των πόρων και δεν μπορεί να καλύψει την παραγγελία. Αντικαθιστώντας, την ελάχιστη απαίτηση για το προϊόν Α στον πρώτο περιορισμό, θα έχουμε:

$3(110)+x_2=330+x_2 \leq 297$, δηλαδή για να ικανοποιηθεί η απαίτηση παραγωγής 110 τουλάχιστον μονάδων προϊόντος Α χρειάζονται τουλάχιστον 330 μέτρα φόδρας και επιπλέον ο,τιδήποτε χρησιμοποιηθεί για το προϊόν Β. Η επιχείρηση όμως έχει συνολικά μόνο 297 μέτρα φόδρας. Άρα, η ανεπάρκεια της πρώτης ύλης φόδρα είναι ουσιαστικά, αυτή που προκαλεί την ανυπαρξία εφικτής περιοχής για το πρόβλημα. Η επιπλέον προμήθεια 33 μέτρων φόδρας, ώστε να φτάσει τα 330 μέτρα, θα καλύψει την ελάχιστη ζήτηση των 110 μονάδων προϊόντος Α, χωρίς όμως δυνατότητα παραγωγής του προϊόντος Β. Γενικά, η ανυπαρξία εφικτών λύσεων δεν οφείλεται στην αντικειμενική συνάρτηση αλλά στους περιορισμούς. Η διερεύνηση αυτής της ειδικής περίπτωσης όταν εμφανίζεται σ' ένα πρόβλημα, πρέπει να επικεντρώνεται στους περιορισμούς και στις παραμέτρους αυτών (τεχνολογικούς συντελεστές, σταθερές δεξιών μελών).

(γ) Μη φραγμένο πρόβλημα: Η ύπαρξη μη φραγμένης εφικτής περιοχής σ' ένα πρόβλημα Γ.Π. μεγιστοποίησης (ή ελαχιστοποίησης) ενδέχεται να οδηγήσει σε απεριόριστη αύξηση (ή μείωση) της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Τότε το πρόβλημα καλείται μη φραγμένο (unbounded problem). Ένα μη-φραγμένο πρόβλημα είναι συνήθως περίπτωση σφάλματος μοντελοποίησης.

Μία εταιρεία κατασκευάζει χαρτάετους μεγάλου και μικρού μεγέθους και θέλει να μεγιστοποιήσει το συνολικό κέρδος από την παραγωγή και την πώληση x_1 και x_2 μονάδων χαρταετών μεγάλου και μικρού μεγέθους, αντίστοιχα. Το πρόβλημα Γ.Π. είναι:

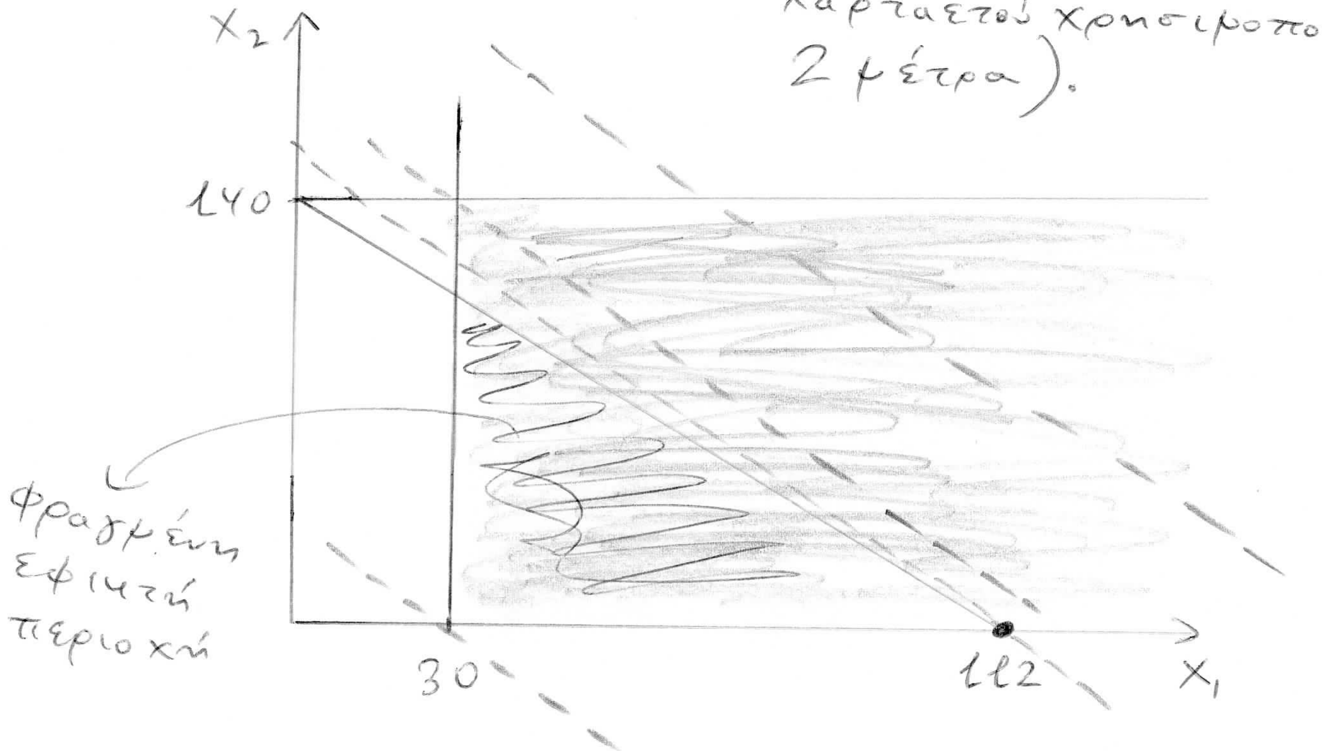
$$\text{Max } z = 600x_1 + 400x_2$$

με περιορισμούς:

$x_1 \geq 30$ (Ελάχιστη ζήτηση αριθμού μεγάλων χαρταετών)

$2x_2 \leq 280$ (Η εταιρεία διαθέτει 280 μέτρα νάιλον και για την κατασκευή ενός μικρού χαρταετού χρησιμοποιεί 2 μέτρα).

$x_1, x_2 \geq 0$



Η εφικτή περιοχή του μοντέλου είναι μη-φραγμένη και εκτείνεται στο άπειρο. Η αντικειμενική συνάρτηση περνάει αρχικά από την κορυφή (30, 0) και στη συνέχεια από την κορυφή (30, 140). Συνεχίζοντας προς την κατεύθυνση αύξησης διέρχεται πάντα μέσα από αυτήν. Ανεξάρτητα από ποια τιμή παίρνει το z όσο μεγάλη και αν είναι υπάρχει πάντα μία εφικτή λύση. Η διαμόρφωση του μοντέλου είναι ελλιπής. Κάποιος από τους περιορισμούς είναι λανθασμένος ή λείπει κάποιος περιορισμός ώστε να γίνει το πρόβλημα φραγμένο. Στο δεύτερο περιορισμό, δεν λάβαμε υπόψη μας τη διαθέσιμη ποσότητα νάιλον για την κατασκευή του μεγάλου χαρταετού. Έστω ότι κάθε μεγάλος χαρταετός χρειάζεται 2.5 μέτρα νάιλον από τη διαθέσιμη ποσότητα των 280 μέτρων, τότε ο δεύτερος περιορισμός, γίνεται: $2.5x_1+2x_2\leq 280$, οπότε το μοντέλο γίνεται:

$$\text{Max } z=600x_1+400x_2$$

με περιορισμούς

$$x_1\geq 30$$

$$2.5x_1+2x_2\leq 280$$

$$x_1, x_2\geq 0$$

Στο σχήμα της Σελίδας 46, φαίνεται η φραγμένη εφικτή περιοχή του προβλήματος από την οποία προκύπτει ότι η βέλτιστη λύση είναι $x_1=112$ και $x_2=0$, δηλαδή προτείνεται η κατασκευή 112 χαρταετών μεγάλου μεγέθους και κανενός μικρού. Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση είναι: $z=67200$ νομισματικές μονάδες. Συμπερασματικά, ένα μη φραγμένο πρόβλημα συνήθως προκύπτει από εσφαλμένη μοντελοποίηση και μπορεί να γίνει επιλύσιμο με την αντικατάσταση κάποιου εσφαλμένου περιορισμού καθώς και με την προσθήκη κάποιου απαραίτητου περιορισμού που αρχικά δεν έχει ληφθεί υπόψη. Πρέπει να βρεθεί το λογικό σφάλμα που προκαλεί την αδυναμία εντοπισμού μη πεπερασμένης τιμής για το z. ☒

2.3 Κανονική μορφή

Ένα γενικό πρόβλημα Γ.Π. εμφανίζεται κάτω από μία ποικιλία διαφορετικών μορφών όπως μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, εξισώσεις ή ανισώσεις για τους περιορισμούς. Αυτές όλες οι μορφές μπορούν να αναχθούν σε μία κοινή μορφή την κανονική ή τυπική μορφή η οποία, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, επιτρέπει την εφαρμογή μίας γενικής μεθόδου (μέθοδος simplex) για την επίλυση του συγκεκριμένου κάθε φορά προβλήματος.

Ορισμός: Ένα πρόβλημα Γ.Π. είναι σε κανονική (ή τυπική) μορφή, αν έχει τη μορφή:

$$(\pm)\max\,(c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n&=b_m\\ x_1,\dots,x_n&\geq 0,\end{aligned}$$

όπου c_j, b_i, a_{ij}, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ πραγματικές σταθερές και επιπλέον $b_i\geq 0$, $i=1,\dots,m$. Ισοδύναμα, με τη μορφή πινάκων:

$$(\pm)\max\ \underset{\sim}{c}^T\underset{\sim}{x}$$

$$A\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{b}$$

$$\underset{\sim}{x}\geq 0$$

όπου $\underset{\sim}{c},\underset{\sim}{x}\in M_{n\times 1}$, $\underset{\sim}{b}\in M_{m\times 1}$, $A\in M_{m\times n}$ και $\underset{\sim}{b}\geq\underset{\sim}{0}$. ☒

Κάθε πρόβλημα Γ. Π. μπορεί να τεθεί σε κανονική μορφή με τη χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών. Πράγματι, έχουμε τις περιπτώσεις:

(i) Πρόβλημα ελαχιστοποίησης: Όταν ζητείται ο προσδιορισμός του ελαχίστου της $f(\underset{\sim}{x})=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$ αντί του μεγίστου της, θέτουμε:

$$g(\underset{\sim}{x})=-f(\underset{\sim}{x})=-c_1x_1-c_2x_2-\dots-c_nx_n$$

και μεγιστοποιούμε τη συνάρτηση $g(\underset{\sim}{x})$. Το ελάχιστο της $f(\underset{\sim}{x})$ προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\min f(\underset{\sim}{x})=-\max g(\underset{\sim}{x}).$$

(ii) Αρνητικοί σταθεροί όροι σε περιορισμούς: Μετατρέπουμε τους όρους σε θετικούς πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη των αντίστοιχων περιορισμών με (-1).

(iii) Περιορισμοί που εκφράζονται από ανισώσεις. Αυτοί μπορούν να αναχθούν σε εξισώσεις με την εισαγωγή νέων μη-αρνητικών μεταβλητών που λέγονται περιθώριες μεταβλητές. Οι αρχικοί περιορισμοί:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \ge b_j$$

είναι ισοδύναμοι με τους περιορισμούς:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_r = b_i, \quad x_r \ge 0$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n - x_s = b_j, \quad x_s \ge 0$$

(iv) Μεταβλητές χωρίς περιορισμό στο πρόσημο ή μη-θετικές. Αν η μεταβλητή x_i δεν υπόκειται στον περιορισμό $x_i \ge 0$ αλλά είναι $x_i \in \mathbb{R}$, θέτουμε $x_i = x_i' - x_i''$, όπου $x_i', x_i'' \ge 0$, διότι κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο μη-αρνητικών αριθμών, **δηλαδή** μπορούμε να γράψουμε: $x = \max(0,x) - \max(0,-x)$. Αν η μεταβλητή x_j είναι μη-θετική θέτουμε $x_j = -x_j'$, όπου $x_j' \ge 0$.

Παράδειγμα: Να τεθεί σε κανονική μορφή το πρόβλημα Γ.Π.

$$\min(x_1 + 2x_2 + x_3)$$

$$x_1 + 2x_2 \le 40$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1 - 3x_2 - 2x_3 \ge -50$$

$$x_2 + x_3 \ge 25$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Λύση Πολλαπλασιάζουμε τον τρίτο περιορισμό επί (−1), αλλάζοντας συγχρόνως τη φορά της ανίσωσης, για να γίνει ο σταθερός όρος θετικός. Μετά εισάγουμε περιθώριες μεταβλητές για να μετατρέψουμε τις ανισώσεις σε εξισώσεις. Συγκεκριμένα, στα πρώτα μέλη των δύο ανισώσεων της μορφής $\leq$ προσθέτουμε τις περιθώριες μεταβλητές x_4, x_5 αντίστοιχα ενώ από το πρώτο μέλος της τελευταίας ανίσωσης αφαιρούμε την περιθώρια μεταβλητή x_6, όπου $x_4, x_5, x_6 \geq 0$. Αφού η μεταβλητή x_3 δεν έχει περιορισμό στο πρόσημο, θέτουμε $x_3 = x_3' - x_3''$ με την απαίτηση $x_3', x_3'' \geq 0$. Επίσης, μετατρέπουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης σε πρόβλημα μεγιστοποίησης, αλλάζοντας τα πρόσημα των συντελεστών στην αντικειμενική συνάρτηση. Έτσι, καταλήγουμε στην κανονική μορφή του προβλήματος που είναι:

$$-\max(-x_1 - 2x_2 - x_3' + x_3'')$$

με περιορισμούς:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40 \\
x_1 - x_2 + x_3' - x_3'' &= 30 \\
-x_1 + 3x_2 + 2x_3' - 2x_3'' + x_5 &= 50 \\
x_2 + x_3' - x_3'' - x_6 &= 25 \\
x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \quad \boxtimes
\end{aligned}
$$

2.4 Οι λύσεις του προβλήματος Γ. Π.

Αρχικά, υπενθυμίζουμε βασικούς ορισμούς και έννοιες από τη Γραμμική Άλγεβρα που είναι απαραίτητοι για τα επόμενα.

Ορισμοί: Έστω $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, \underset{\sim}{a}_k$ διανύσματα του $\mathbb{R}^m$. Κάθε διάνυσμα $\underset{\sim}{a} \in \mathbb{R}^m$ που μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\underset{\sim}{a} = \lambda_1 \underset{\sim}{a_1} + \lambda_2 \underset{\sim}{a_2} + \dots + \lambda_k \underset{\sim}{a_k}, \; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

καλείται γραμμικός συνδυασμός των $\underset{\sim}{a_1}, \underset{\sim}{a_2}, \dots, \underset{\sim}{a_k}$. Τα διανύσματα $\underset{\sim}{a_1}, \underset{\sim}{a_2}, \dots, \underset{\sim}{a_k}$, $k \leq m$ λέγονται <u>γραμμικά</u> ανεξά-<u>ρτητα</u> αν η σχέση: $\lambda_1 \underset{\sim}{a_1} + \lambda_2 \underset{\sim}{a_2} + \dots + \lambda_k \underset{\sim}{a_k} = \underset{\sim}{0}$ ισχύει μόνο όταν $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. Διαφορετικά, καλούνται γραμμικά εξαρτημένα. Αν τα $\underset{\sim}{a_1}, \underset{\sim}{a_2}, \dots, \underset{\sim}{a_k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $k=m$ τότε αυτά αποτελούν μία <u>βάση</u> του χώρου $\mathbb{R}^m$ (διανυσματικός χώρος), δηλαδή κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\underset{\sim}{a_1}, \underset{\sim}{a_2}, \dots, \underset{\sim}{a_m}$.

Έστω $A \in M_{m \times n}$ ένας $m \times n$ πίνακας με πραγματικά στοιχεία. Ορίζουμε ως βαθμό (ή τάξη) $r(A)$ του πίνακα A, το μέγιστο αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του. Αποδεικνύεται ότι ο μέγιστος αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ενός πίνακα είναι ίσος με τον μέγιστο αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του. Δηλαδή ισχύει ότι $r(A) = r(A') \leq \min\{m, n\}$. Σε ό,τι δήποτε ακολουθεί υποθέτουμε ότι $r(A) = m < n$ που είναι η μόνη ενδιαφέρουσα περίπτωση. Τότε το σύστημα των περιορισμών έχει άπειρες λύσεις και η βέλτιστη λύση θα αναζητηθεί στις μη-αρνητικές από αυτές. Ένα πρόβλημα Γ.Π. όπως θα δούμε και παρακάτω μπορεί να έχει μία καμία ή άπειρες βέλτιστες λύσεις. Κάτι τέτοιο άλλωστε το είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο στην γραφική επίλυση ενός προβλήματος Γ.Π. και στις ειδικές περιπτώσεις.

Ερώτημα: Πότε ένα πρόβλημα Γ.Π. έχει άριστη λύση;

Μία μερική απάντηση σ' αυτό το ερώτημα, δίνεται από τη Μαθηματική Ανάλυση και το Θεώρημα Weierstrass. Πριν όμως παρουσιάσουμε το Θεώρημα, ας δούμε κάποιους σημαντικούς ορισμούς.

Συμβολισμός: Συμβολίζουμε με $\underset{\sim}{P}_1\ \underset{\sim}{P}_2, \dots, \underset{\sim}{P}_n$ τις στήλες του πίνακα A δηλαδή $\underset{\sim}{P}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j=1,\dots,$ και

τότε $A = \left(\underset{\sim}{P}_1\ \underset{\sim}{P}_2 \ \cdots\ \underset{\sim}{P}_n\right)$

όπου $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}$. Αφού $r(A)=m<n$, υπάρχουν πάντοτε m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα A. Με τον παραπάνω συμβολισμό, το σύστημα των περιορισμών παίρνει τη μορφή:

$$\underset{\sim}{P}_1 x_1 + \underset{\sim}{P}_2 x_2 + \dots + \underset{\sim}{P}_n x_n = \underset{\sim}{b}$$

δηλαδή υπάρχει "1-1" αντιστοιχία μεταξύ των μεταβλητών και των στηλών του πίνακα A.

Ορισμοί: Έστω το πρόβλημα Γ. Π. σε κανονική μορφή:

$$\begin{aligned} &\max \underset{\sim}{c}' \underset{\sim}{x} \\ &A \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \\ &\underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0} \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} &\max (c_1 x_1 + \dots + c_n x_n) \\ &\underset{\sim}{P}_1 x_1 + \underset{\sim}{P}_2 x_2 + \dots + \underset{\sim}{P}_n x_n = \underset{\sim}{b} \\ &x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

όπου $\underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{x} \in M_{n\times 1}$, $\underset{\sim}{b} \in M_{m\times 1}$, $\underset{\sim}{b} \geq \underset{\sim}{0}$, $A = (\underset{\sim}{P}_1 \cdots \underset{\sim}{P}_n) \in M_{m\times n}$ $r(A) = m < n$.

(i) Λύση του προβλήματος Γ. Π. λέγεται κάθε λύση $\underset{\sim}{x} = (x_1, \dots, x_n)'$ του συστήματος των περιορισμών $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$.

(ii) Βασική λύση καλείται κάθε λύση $\underset{\sim}{x}$ που οι μη-μηδενικές συντεταγμένες της αντιστοιχούν σε γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A. Αφού $r(A)=m$ κάθε βασική λύση έχει το πολύ m μη-μηδενικές συντεταγμένες.

(iii) Εφικτή λύση λέγεται κάθε λύση $\underset{\sim}{x}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη μη-αρνητικότητας των μεταβλητών δηλαδή κάθε λύση που έχει μη αρνητικές συντεταγμένες.

(iv) Βασική εφικτή λύση καλείται κάθε λύση $\underset{\sim}{x}$ που είναι συγχρόνως βασική και εφικτή.

(v) Μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση καλείται κάθε βασική εφικτή λύση που έχει ακριβώς m θετικές συντεταγμένες. Διαφορετικά, καλείται εκφυλισμένη.

(vi) Άριστη ή βέλτιστη λύση καλείται κάθε εφικτή λύση που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

(vii) Εφικτή περιοχή F καλείται το σύνολο των εφικτών λύσεων.

(viii) Το πρόβλημα Γ.Π. καλείται φραγμένο, αν $\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}<\infty$. Αν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο, τότε και το πρόβλημα Γ.Π. θα είναι φραγμένο. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Αν $\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}=\infty$ τότε λέμε ότι το πρόβλημα Γ.Π. δεν έχει πεπερασμένη άριστη λύση.

Θεώρημα 2.1 (Θεώρημα Weierstrass). Αν το F είναι ένα μη-κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και η συνάρτηση $f: F \longmapsto \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε υπάρχει $\underset{\sim}{x}^* \in F: f(\underset{\sim}{x}^*) \geq f(\underset{\sim}{x}) \ \forall \underset{\sim}{x} \in F$ δηλαδή η f πετυχαίνει το μέγιστό της (και επομένως και το ελάχιστό της) σε σημεία του F.

Σαν πόρισμα του Θεωρήματος Weierstrass ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.2 Έστω το πρόβλημα Γ.Π. $\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$, $A\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{x}\geq \underset{\sim}{0}$ με εφικτή περιοχή $F\neq\emptyset$. Αν το F είναι φραγμένο σύνολο τότε το πρόβλημα Γ.Π. έχει βέλτιστη λύση.

Απόδειξη Η αντικειμενική συνάρτηση $f(\underset{\sim}{x})=\underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$ ως γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$. Η εφικτή περιοχή F είναι κλειστό σύνολο δηλαδή περιέχει τα οριακά της σημεία. Πράγματι, αν $\{\underset{\sim}{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία σημείων του F με $\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{x}_n=\underset{\sim}{x}$, αφού $\underset{\sim}{x}_n\in F, n\in\mathbb{N}$ είναι (i) $\underset{\sim}{x}_n\geq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{x}_n\geq \underset{\sim}{0}\Rightarrow \underset{\sim}{x}\geq\underset{\sim}{0}$
(ii) $A\underset{\sim}{x}_n=\underset{\sim}{b}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}A\underset{\sim}{x}_n=\underset{\sim}{b}\Rightarrow A\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{b}$. Από (i) και (ii) έπεται ότι $\underset{\sim}{x}\in F$, δηλαδή το F είναι κλειστό. Αλλά το F είναι επίσης φραγμένο άρα συμπαγές. Από το Θεώρημα 2.1, υπάρχει $\underset{\sim}{x}^*\in F$: $\underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}^*\geq \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{x}\in F$ δηλαδή το πρόβλημα Γ.Π. έχει άριστη λύση. ⊠

Παρατήρηση: Η απαίτηση το F να είναι φραγμένο είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη **άριστης λύσης** όπως **είδαμε** και στις ειδικές περιπτώσεις στην γραφική επίλυση του προβλήματος Γ.Π. στο προηγούμενο κεφάλαιο.

2.5 Ιδιότητες των λύσεων

Αρχικά, θα δώσουμε μερικούς ορισμούς που είναι απαραίτητοι για τη μελέτη των ιδιοτήτων των λύσεων ενός προβλήματος Γ.Π.

Ορισμοί: (i) Κυρτός συνδυασμός των σημείων $\underset{\sim}{x}_1,\dots,\underset{\sim}{x}_k\in\mathbb{R}^n$ είναι κάθε σημείο $\underset{\sim}{x}$ της μορφής: $\underset{\sim}{x}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\underset{\sim}{x}_i$ με $\lambda_i\geq 0$ $i=1,\dots,k$ και $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$

(ii) Ένα σύνολο $K\subset\mathbb{R}^n$ καλείται κυρτό αν για κάθε $\underset{\sim}{x}_1,\underset{\sim}{x}_2\in K$ και λ: $0<\lambda<1$, ισχύει:

$\lambda \underset{\sim}{x}_1 + (1-\lambda)\underset{\sim}{x}_2 \in K$, δηλαδή κάθε κυρτός συνδυασμός δύο σημείων του K είναι επίσης σημείο του K.

(iii) Ακρότατο σημείο ενός κυρτού συνόλου K είναι κάθε σημείο $\underset{\sim}{x} \in K$ τέτοιο ώστε <u>δεν</u> υπάρχουν $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2 \in K$ και $\lambda: 0<\lambda<1$ με $\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x}_1 + (1-\lambda)\underset{\sim}{x}_2$, δηλαδή <u>κάθε</u> σημείο του K που δεν μπορεί να εκφρασθεί ως κυρτός συνδυασμός δύο διαφορετικών σημείων του K.

(iv) Κυρτό πολύεδρο P είναι το σύνολο των κυρτών συνδυασμών ενός πεπερασμένου πλήθους σημείων $\underset{\sim}{x}_1, \dots, \underset{\sim}{x}_K$ δηλαδή $P = \{\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n / \underset{\sim}{x} = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \underset{\sim}{x}_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1\}$

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των ακροτάτων του P είναι υποσύνολο του συνόλου $\{\underset{\sim}{x}_1, \dots, \underset{\sim}{x}_K\}$ των σημείων που το ορίζουν. Επιπλέον κάθε σημείο του P μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός ακροτάτων του.

(v) Τα ακρότατα σημεία ενός κυρτού πολυέδρου (ή γενικότερα ενός κυρτού συνόλου όταν είναι πεπερασμένα σε πλήθος) καλούνται <u>κορυφές</u>.

(vi) Υπερεπίπεδο στο χώρο $\mathbb{R}^n$ καλείται το σύνολο των σημείων $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$, όπου $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ σταθερές. ⊠

Θα αναφερθούμε στη συνέχεια σε μερικά βασικά θεωρήματα που αφορούν την εφικτή περιοχή και τις λύσεις ενός προβλήματος Γ.Π.

Θεώρημα 2.3 (i) Η εφικτή περιοχή F είναι κυρτό σύνολο.
(ii) Αν η F είναι φραγμένο σύνολο, τότε είναι κυρτό πολύεδρο.

Απόδειξη. (i) Έστω $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2 \in F$ και $\lambda \in \mathbb{R}: 0<\lambda<1$. Αρκεί να δείξουμε ότι: $\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x}_1 + (1-\lambda)\underset{\sim}{x}_2 \in F$. Αφού $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2$

είναι εφικτές λύσεις $A\underset{\sim}{x}_1 = A\underset{\sim}{x}_2 = \underset{\sim}{b}$ και $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2 \geq \underset{\sim}{0}$.
Επομένως, $A\underset{\sim}{x} = A[\lambda \underset{\sim}{x}_1 + (1-\lambda)\underset{\sim}{x}_2] = \lambda A\underset{\sim}{x}_1 + (1-\lambda)A\underset{\sim}{x}_2$
$= \lambda \underset{\sim}{b} + (1-\lambda)\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b}$ και $\underset{\sim}{x} = \lambda\underset{\sim}{x}_1 + (1-\lambda)\underset{\sim}{x}_2 \geq \underset{\sim}{0}$. Άρα
η $\underset{\sim}{x}$ είναι εφικτή λύση δηλαδή $\underset{\sim}{x} \in F$.
(ii) Παραλείπεται. ⊠

Θεώρημα 2.4 (i) Αν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο τότε η βέλτιστη λύση επιτυγχάνεται σε μία κορυφή (ακρότατο σημείο) της F.
(ii) Αν δύο ή περισσότερες κορυφές είναι βέλτιστες λύσεις, τότε και κάθε κυρτός συνδυασμός τους είναι επίσης άριστη λύση.

Απόδειξη (i) Έχουμε δείξει ότι αν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο τότε υπάρχει άριστη λύση $\underset{\sim}{x}^*$ του προβλήματος Γ.Π. Επίσης η F αποτελεί ένα κύρτο πολύεδρο που ορίζεται από τις τομές του πεπερασμένου πλήθους υπερεπιπέδων που ορίζουν οι γραμμικοί περιορισμοί και η σύνθηκη μη-αρνητικότητας των μεταβλητών. Συνεπώς, η F έχει ένα πεπερασμένο πλήθος κορυφών $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots, \underset{\sim}{x}_K$ και $\underset{\sim}{x}^* = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \underset{\sim}{x}_i$ για κάποια $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1$. Άρα, $f(\underset{\sim}{x}^*) = \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}^* = \underset{\sim}{c}' \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \underset{\sim}{x}_i$

$$= \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}_i = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i f(\underset{\sim}{x}_i) \leq \sum_{i=1}^{K} \lambda_i f(\underset{\sim}{x}_p) = f(\underset{\sim}{x}_p) \qquad (1)$$

όπου $f(\underset{\sim}{x}_p) = \max\{f(\underset{\sim}{x}_i) \mid i = 1, 2, \ldots, K\}$. Επίσης $f(\underset{\sim}{x}^*) \geq f(\underset{\sim}{x}_p)$, αφού η $\underset{\sim}{x}^*$ είναι άριστη λύση.
Από τη σχέση (1) και την τελευταία σχέση, έπεται ότι: $f(\underset{\sim}{x}^*) = f(\underset{\sim}{x}_p)$, δηλαδή υπάρχει κορυφή $\underset{\sim}{x}_p$ της F: $f(\underset{\sim}{x}_p) = \max\{f(\underset{\sim}{x}) \mid \underset{\sim}{x} \in F\}$.

(ii) Έστω ότι υπάρχουν r κορυφές της F, οι $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots, \underset{\sim}{x}_r$ ώστε $z = \max f(\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x}_i)$, $i = 1, \ldots, r$. Τότε για κάθε κυρτό συνδυασμό τους $\underset{\sim}{x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underset{\sim}{x}_i$ με $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$ έχουμε: $f(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{c}' \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underset{\sim}{x}_i$

$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underset{\sim}{c}' \underset{\sim}{x}_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(\underset{\sim}{x}_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i z = z$, δηλαδή η $\underset{\sim}{x}$ είναι επίσης βέλτιστη λύση. $\boxtimes$

Από το Θεώρημα 2.4, προκύπτει ότι για να βρούμε τη άριστη λύση ενός προβλήματος Γ.Π. αρκεί να βρούμε τις κορυφές της φραγμένης εφικτής περιοχής F και να επιλέξουμε εκείνη που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

Για την εύρεση μίας βασικής λύσης ενός προβλήματος Γ.Π. ισχύουν τα ακόλουθα Θεωρήματα 2.5 και 2.6 τα οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη. Για τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 2.5 και 2.6 παραπέμπουμε στο Βιβλίο [4], Σελ. 30-32.

Θεώρημα 2.5 Αν η $\underset{\sim}{x}$ είναι βασική εφικτή λύση, τότε η $\underset{\sim}{x}$ είναι κορυφή της F.

Θεώρημα 2.6 Αν η $\underset{\sim}{x}$ είναι κορυφή της F, τότε η $\underset{\sim}{x}$ είναι βασική εφικτή λύση.

Συμπερασματικά, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα Γ.Π. για το οποίο η εφικτή περιοχή είναι <u>φραγμένο σύνολο</u>.

Παράδειγμα Να λυθεί το πρόβλημα Γ.Π.

$$\max(3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4)$$

$$\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$x_i \geq 0, \; i=1,2,3,4.$$

Λύση. Είναι $E_3 = 2E_1 + E_2$ δηλαδή η τρίτη εξίσωση είναι περιττή αφού δεν μας δίνει καμία επιπλέον πληροφορία για τις μεταβλητές. Οι δύο πρώτες γραμμές του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες και επομένως ο βαθμός του είναι 2. Έχουμε το ισοδύναμο πρόβλημα Γ.Π. σε κανονική μορφή: $\max(3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4)$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$
$$x_i \geq 0, \; i=1,2,3,4$$

ή ισοδύναμα,

$$\max(3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4)$$
$$\underset{\sim}{P}_1 x_1 + \underset{\sim}{P}_2 x_2 + \underset{\sim}{P}_3 x_3 + \underset{\sim}{P}_4 x_4 = \underset{\sim}{b}$$
$$x_i \geq 0, \; i=1,2,3,4$$

όπου

$$\underset{\sim}{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \underset{\sim}{P}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \underset{\sim}{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \underset{\sim}{P}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Θα εξετάσουμε αν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο που είναι ικανή συνθήκη για να έχει το πρόβλημα βέλτιστη λύση. Από το δεύτερο περιορισμό και τη συνθήκη μη-αρνητικότητας των μεταβλητών προκύπτει ότι:

$$0 \leq x_1 \leq 1/2, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad 0 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τους περιορισμούς και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη μη-αρνητικότητας, προκύπτει ότι: $0 \leq x_4 \leq 6$. Άρα $0 \leq x_i \leq 6$, $i=1,2,3,4$, δηλαδή η F είναι φραγμένο σύνολο. Μας μένει να βρούμε τις κορυφές της F δηλαδή τις βασικές εφικτές λύσεις.

Αυτό επιτυγχάνεται κάθε φορά παίρνοντας δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες από τις $\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2, \underset{\sim}{P}_3, \underset{\sim}{P}_4$ και λύνοντας το αντίστοιχο σύστημα απορρίπτοντας τις λύσεις με αρνητικά στοιχεία.

(i) Οι $\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -3 < 0 \text{ απορρίπτεται.}$$

(ii) Οι $\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένες.

(iii) Οι $\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_4 = 5 \\ 2x_1 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_1 = 1/2,\ x_4 = 9/2, \text{ δεκτή.}$$

(iv) Οι $\underset{\sim}{P}_2, \underset{\sim}{P}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$$\left.\begin{array}{l} -x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_2 = -3 < 0,\ x_3 = 2, \text{ απορρίπτεται.}$$

(v) Οι $\underset{\sim}{P}_2, \underset{\sim}{P}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

$$\left.\begin{array}{l} -x_2 + x_4 = 5 \\ x_2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_2 = 1,\ x_4 = 6, \text{ δεκτή.}$$

(vi) Οι $\underset{\sim}{P}_3, \underset{\sim}{P}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

$$\left.\begin{array}{l} x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_3 = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = \frac{9}{2}, \text{ δεκτή.}$$

Άρα, υπάρχουν τρεις βασικές εφικτές λύσεις (κορυφές της F) και μάλιστα μη-εκφυλισμένες:

$$\underset{\sim}{x}_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{9}{2}\right)',\ \underset{\sim}{x}_2 = (0, 1, 0, 6)',\ \underset{\sim}{x}_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)'$$

Βάσει του Θεωρήματος 2.4, η άριστη λύση είναι μία τουλάχιστον από αυτές. Οι αντίστοιχες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

$$f(\underset{\sim}{x}_1) = 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 6$$

$$f(\underset{\sim}{x}_2) = 5 \cdot 1 + 6 = 11$$

$$f(\underset{\sim}{x}_3) = -2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 3.5$$

Η λύση που δίνει τη μέγιστη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση είναι η $\underset{\sim}{x}_2$, άρα αυτή είναι και η άριστη λύση. Στο αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης, η άριστη λύση είναι η $\underset{\sim}{x}_3$. ☒