ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

3.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος Simplex είναι η απλούστερη και ευκολότερη μέθοδος για την εύρεση της άριστης λύσης ενός προβλήματος Γ.Π. Σύμφωνα με αυτή, από μία κορυφή $\underset{\sim}{x}_1$ πηγαίνουμε σε μία καλύτερη κορυφή $\underset{\sim}{x}_2$ που δίνει μεγαλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση, δηλαδή $\underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}_2 > \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}_1$. Έτσι, αφού εξετάζουμε μόνο κορυφές, ή ισοδύναμα βασικές εφικτές λύσεις και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης βελτιώνεται σε κάθε βήμα της μεθόδου, φθάνουμε τελικά, μετά από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων στην άριστη λύση του προβλήματος. Για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex πρέπει:

(i) Το πρόβλημα Γ.Π. να είναι σε κανονική μορφή.

(ii) Να είναι γνωστή μία αρχική μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση.

Ξεκινώντας από τη λύση $\underset{\sim}{x}_0$ ελέγχουμε αν είναι άριστη και σε αντίθετη περίπτωση βρίσκουμε μία καλύτερη βασική εφικτή λύση $\underset{\sim}{x}_1$, αν υπάρχει. Χρειαζόμαστε ένα κριτήριο για να αποφασίζουμε κάθε φορά αν η βασική εφικτή λύση είναι άριστη ή όχι. Το κριτήριο αυτό στηρίζεται στις διαφορές $z_j - c_j$ και ορίζεται από τα επόμενα δύο θεωρήματα, τα οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη. Για τις αποδείξεις, παραπέμπουμε στο βιβλίο [4], Σελ. 36-38.

Θεώρημα 3.1 Αν $z_j - c_j \geq 0$, για κάθε $j=1,\dots,n$, τότε η μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underset{\sim}{x}_0$ είναι βέλτιστη.

Θεώρημα 3.2 Αν $z_j - c_j < 0$, για ένα τουλάχιστον j, $j=1,\dots,n$, τότε η μη-εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underset{\sim}{x}_0$ <u>δεν</u> είναι άριστη.

Αν η F είναι φραγμένο σύνολο, τότε προκύπτει το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 3.3 Αν $z_j - c_j < 0$ για ένα τουλάχιστον j, $j=1,\dots,n$ και η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο, τότε υπάρχει βασική εφικτή λύση $\underset{\sim}{x}_1$ καλύτερη από την $\underset{\sim}{x}_0$.

Απόδειξη. Σελ. 38, Βιβλίο [4].

3.2 Ο αλγόριθμος Simplex

Τα διαδοχικά βήματα της μεθόδου Simplex μπορούν να εκτελεσθούν με τη βοήθεια μίας σειράς πινάκων που είναι γνωστοί ως tableaux Simplex. Ο αλγόριθμος Simplex θα αναπτυχθεί κάνοντας την υπόθεση ότι ο πίνακας A περιέχει τον $m \times m$ μοναδιαίο πίνακα I, ο οποίος μας δίνει μία πρώτη αρχική βασική λύση. Η αρχική βασική εφικτή λύση δίνεται από το διάνυσμα $\underset{\sim}{b}$ των σταθερών όρων. Αν όλα τα στοιχεία του $\underset{\sim}{b}$ είναι μη-μηδενικά, άρα θετικά (διότι το πρόβλημα Γ. Π. είναι σε κανονική μορφή) η λύση αυτή είναι μη εκφυλισμένη και έτσι έχουμε όλες τις προϋποθέσεις για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex. Σε επόμενα εδάφια θα δούμε τι γίνεται όταν ο πίνακας A <u>δεν</u> περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα.

Ο αλγόριθμος

1. Σχηματίζουμε ένα $(m+1)\times(n+4)$ πίνακα (tableau), στην πρώτη στήλη του οποίου αναγράφονται οι βασικές στήλες στη δεύτερη οι τιμές των συντελεστών κόστους στην τρίτη η αρχική βασική εφικτή λύση, στις επόμενες m τα στοιχεία των στηλών του A, ενώ η τελευταία στήλη του tableau μένει προσωρινά κενή. Στη τελευταία γραμμή γράφεται η τιμή z_0 της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στην αρχική λύση $\underset{\sim}{x}_0$ και οι τιμές των διαφορών $z_k - c_k$, $k=1,2,\dots,n$. Για ευκολία στους υπολογισμούς προσθέτουμε δύο ακόμα γραμμές, κοινές για όλα τα tableaux όπου στην πρώτη γράφουμε τις τιμές όλων των c_k και στη δεύτερη τα ονόματα των στηλών του tableau. Υποθέτοντας ότι ο μοναδιαίος πίνακας σχηματίζεται από τις πρώτες m στήλες του A, το αρχικό tableau έχει την παρακάτω μορφή:

			c_1	c_2	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	$\cdots$	c_n	
B	$\underset{\sim}{c}_B$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{P}_1$	$\underset{\sim}{P}_2$	$\cdots$	$\underset{\sim}{P}_m$	$\underset{\sim}{P}_{m+1}$	$\underset{\sim}{P}_{m+2}$	$\cdots$	$\underset{\sim}{P}_n$	θ.
$\underset{\sim}{P}_1$	c_1	x_{10}	1	0	$\cdots$	0	x_{1m+1}	x_{1m+2}	$\cdots$	x_{1n}	
$\underset{\sim}{P}_2$	c_2	x_{20}	0	1	$\cdots$	0	x_{2m+1}	x_{2m+2}	$\cdots$	x_{2n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\underset{\sim}{P}_m$	c_m	x_{m0}	0	0	$\cdots$	1	x_{mm+1}	x_{mm+2}	$\cdots$	x_{mn}	
		z_0	0	0	$\cdots$	0	$z_{m+1}-c_{m+1}$	$z_{m+2}-c_{m+2}$	$\cdots$	z_n-c_n	

2. Ελέγχουμε αν η λύση $\underset{\sim}{x}_0$ είναι άριστη, εξετάζοντας τις διαφορές $z_k - c_k$

(2a) Αν $z_k - c_k \geq 0$ για όλα τα k, η λύση $\underset{\sim}{x}_0$ είναι άριστη.

(2β) Αν $z_j - c_j < 0$ και $x_{ij} \le 0 \ \forall i = 1,2,\dots,m$ για κάποιο j, τότε το πρόβλημα Γ.Π. είναι μη-φραγμένο.

(2γ) Αν οι (2α), (2β) δεν ισχύουν τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον j: $z_j - c_j < 0$ και $x_{ij} > 0$ για ένα τουλάχιστον i και αυτό για κάθε τέτοιο j. Πάμε στο επόμενο βήμα.

3. Η στήλη $\underline{P}_j$ που γίνεται βασική ορίζεται από τη σχέση

$$\underline{P}_j : |z_j - c_j| = \max_k \{ |z_k - c_k| : z_k - c_k < 0 \}$$

4. Γράφουμε στην τελευταία στήλη τους λόγους $\frac{x_{s0}}{x_{sj}}$ για $x_{sj} > 0$ δηλαδή τους λόγους των στοιχείων της στήλης $\underset{\sim}{b}$ με τα αντίστοιχα θετικά στοιχεία της στήλης $\underset{\sim}{P}_j$. Η στήλη $\underset{\sim}{P}_i$ που "φεύγει" από τη βάση ορίζεται από τη σχέση:
$$\underline{P}_i : \frac{x_{i0}}{x_{ij}} = \min_s \left\{ \frac{x_{s0}}{x_{sj}} : x_{sj} > 0 \right\}$$

5. Το στοιχείο x_{ij} το οποίο σημειώνουμε με ένα τετράγωνο λέγεται πιλότος. Τα στοιχεία x'_{sk} του επόμενου tableau ορίζονται από τις σχέσεις:

$$x'_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_{ij}}, \ k = 0,1,\dots,n \qquad (5.1)$$

$$x'_{sk} = x_{sk} - \frac{x_{ik}}{x_{ij}} x_{sj}, \ s = 1,2,\dots,m,m+1, \ s \ne i, \quad k = 0,1,\dots,n \qquad (5.2)$$

όπου $x_{m+1\,0} = z_0$, $x_{m+1\,k} = z_k - c_k$, $k = 1,2,\dots,n$.
Δηλαδή η i γραμμή του νέου tableau (Γ_i') προκύπτει από την i γραμμή του προηγούμενου tableau (Γ_i) όταν αυτή διαιρεθεί με τον πιλότο $\left(\Gamma_i' = \frac{1}{x_{ij}} \Gamma_i\right)$, ενώ η

5, $s \neq i$ γραμμή του νέου tableau (Γ_s') προκύπτει από την s γραμμή (Γ_s) του προηγούμενου tableau όταν από αυτή αφαιρεθεί η γραμμή Γ_i' πολλαπλασιασμένη με το s στοιχείο x_{sj} της στήλης του πιλότου ($\Gamma_s' = \Gamma_s - x_{sj}\Gamma_i'$).

6. Πηγαίνουμε στο Βήμα 2. ⊠

Σχηματικά τα δύο διαδοχικά tableaux έχουν την παρακάτω μορφή:

			$c_1 \cdots$	$c_i \cdots$	c_m	$c_{m+1} \cdots$	$c_j \cdots$	c_n		
B	c_B	b	$P_1 \cdots$	$P_i \cdots$	P_m	$P_{m+1} \cdots$	P_j	P_n	Θ	
P_1	c_1	x_{10}	1	0	0	$x_{1m+1} \cdots$	$x_{1j} \cdots$	x_{1n}	$\frac{x_{10}}{x_{1j}}$	Γ_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	
P_i	c_i	x_{i0}	0	1	0	$x_{im+1} \cdots$	$\boxed{x_{ij}} \cdots$	x_{in}	$\frac{x_{i0}}{x_{ij}}$	Γ_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	
P_m	c_m	x_{m0}	0	0	1	$x_{mm+1} \cdots$	$x_{mj} \cdots$	x_{mn}		Γ_m
		z_0	0	0	0	$z_{m+1}-c_{m+1}$	$z_j-c_j \cdots$	z_n-c_n		Γ_{m+1}

P_1	c_1	x'_{10}	$1 \cdots$	$x'_{1i} \cdots$	0	$x'_{1m+1} \cdots$	$0 \cdots$	x'_{1n}	$\Gamma_1' = \Gamma_1 - x_{1j}\Gamma_i'$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						$\vdots$	
P_j	c_j	x'_{i0}	$0 \cdots$	$x'_{ii} -$	0	$x'_{im+1} \cdots$	1	x'_{in}	$\Gamma_i' = \frac{1}{x_{ij}}\Gamma_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						$\vdots$	
P_m	c_m	x'_{m0}	$0 \cdots$	$x'_{mi} \cdots$	0	$x'_{mm+1} -$	0	x'_{mn}	$\Gamma_m' = \Gamma_m - x_{mj}\Gamma_i'$
		z'_0	0	$z'_i - c_i$	0	$z'_{m+1} - c_{m+1}$	0	$z'_n - c_n$	$\Gamma'_{m+1} = \Gamma_{m+1} - (z_j - c_j)\Gamma_i'$

Παρατηρήσεις:

(i) Οι στήλες κάθε tableau που αντιστοιχούν κάθε φορά στις βασικές στήλες του πίνακα A έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα με μηδέν εκτός του στοιχείου της αντίστοιχης γραμμής που είναι ίσο με 1.

(ii) Εφόσον η βέλτιστη λύση βρίσκεται, όταν $z_k - c_k \geq 0$

για όλα τα κ, συμφέρει σε κάθε tableau να υπολογίσουμε, μετά την γραμμή του πιλότου, πρώτα την γραμμή των διαφορών $z_k - c_k$ και μετά τα υπόλοιπα στοιχεία του tableau αν αυτό είναι απαραίτητο δηλαδή αν δεν έχει βρεθεί ακόμη η βέλτιστη λύση.

(iii) Στα βήματα (3) και (4) αν υπάρχουν από ένα j ή i που πληρούν τα αντίστοιχα κριτήρια διαλέγουμε ένα από αυτά αυθαίρετα.

(iv) Το κριτήριο του βήματος (3) μπορεί να αντικατασταθεί από το: $\underline{P}_j : \frac{x_{io}}{x_{ij}} |z_j - c_j| = \max_{k,s} \left\{ \frac{x_{so}}{x_{sk}} |z_k - c_k| \right.$ ώστε $\left. z_k - c_k < 0,\ x_{sk} > 0 \right\}$. Λόγω της πολυπλοκότητάς του αυτό το κριτήριο δεν χρησιμοποιείται στην πράξη εκτός από την περίπτωση όπου υπάρχουν δύο ή περισσότερα j με την ίδια μέγιστη κατά απόλυτη τιμή αρνητική διαφορά $z_j - c_j$.

(v) Για τις βασικές στήλες κάθε tableau οι αντίστοιχες διαφορές $z_k - c_k$ είναι όλες ίσες με μηδέν. Μερικές φορές όμως συμβαίνει $z_k - c_k = 0$ για κάποια στήλη $\underline{P}_k$ που δεν είναι βασική. Τότε εισάγοντας την $\underline{P}_k$ στη βάση καταλήγουμε σε μία άλλη λύση που δίνει την ίδια προηγούμενη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Έτσι, αν στο tableau που δίνει την άριστη λύση είναι $z_k - c_k = 0$ για κάποια στήλη $\underline{P}_k$ που δεν είναι βασική αυτό σημαίνει ότι υπάρχει εναλλακτική άριστη βασική εφικτή λύση και επομένως το πρόβλημα Γ.Π. έχει άπειρο πλήθος άριστων λύσεων σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.

Παράδειγμα: Να λυθεί με τον αλγόριθμο Simplex το πρόβλημα Γ.Π. $\max(5x_1-4x_2)$ με τους περιορισμούς:

$$-x_1+x_2\geq -6$$
$$3x_1-2x_2\leq 24$$
$$-2x_1+3x_2\leq 9$$
$$x_1,x_2\geq 0$$

Λύση: Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι:

$$\max(5x_1-4x_2)$$
$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3 \qquad\qquad &= 6\\ 3x_1-2x_2 \qquad +x_4 \qquad &= 24\\ -2x_1+3x_2 \qquad\qquad +x_5 &= 9 \end{aligned}$$
$$x_i\geq 0,\ i=1,2,3,4,5,$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$$
$$A\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{b}$$
$$\underset{\sim}{x}\geq \underset{\sim}{0}$$

όπου

$$\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix},\ \underset{\sim}{c}=\begin{pmatrix}5\\-4\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \underset{\sim}{b}=\begin{pmatrix}6\\24\\9\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1&-1&1&0&0\\3&-2&0&1&0\\-2&3&0&0&1\end{pmatrix}$$

Ο πίνακας A περιέχει τον 3×3 μοναδιαίο πίνακα, ο οποίος μας δίνει την πρώτη βάση $B=(\underset{\sim}{P}_3,\underset{\sim}{P}_4,\underset{\sim}{P}_5)$. Επομένως, έχουμε την προφανή αρχική βασική εφικτή λύση $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=6,\ x_4=24,\ x_5=9$ ή $\underset{\sim}{x}_0=(0,0,6,24,9)'$ η οποία είναι μη-εκφυλισμένη διότι $r(A)=3$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο Simplex.

1º tableau: $z_1-c_1=-5<0$, άρα η στήλη $\underset{\sim}{P}_1$ μπαίνει στη βάση. Τότε $\min\left\{\frac{6}{1},\frac{24}{3}\right\}=\frac{6}{1}$, άρα η στήλη

$\underline{P}_3$ φεύγει από τη βάση. Πιλότος είναι το $x_{11}=1$.
Πάμε στο 2ο tableau με τους τύπους (5.1), (5.2) του βήματος 5.
2ο tableau: $z_2-c_2=-1<0$, άρα η στήλη $\underline{P}_2$ μπαίνει στη βάση. Τότε $\min\left\{\frac{6}{1},\frac{21}{1}\right\}=\frac{6}{1}$, άρα η στήλη $\underline{P}_4$ βγαίνει από τη βάση. Πιλότος είναι το στοιχείο $x'_{22}=1$. Πάμε στο 3ο tableau με τους τύπους (5.1), (5.2) του βήματος 5.
3ο tableau: $z_k-c_k\geq 0$, $k=1,2,3,4,5$, άρα βρέθηκε η άριστη λύση που είναι: $x_1=12$, $x_2=6$, $x_5=15$ ή $\underline{x}=(12,6,0,0,15)'$. Η αντίστοιχη άριστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι: $z=36$.

			5	-4	0	0	0		
B	c_B	$\underline{b}$	$\underline{P}_1$	$\underline{P}_2$	$\underline{P}_3$	$\underline{P}_4$	$\underline{P}_5$	θ	
$\underline{P}_3$	0	6	$\boxed{1}$	-1	1	0	0	6/1	r_1
$\underline{P}_4$	0	24	3	-2	0	1	0	24/3	r_2
$\underline{P}_5$	0	9	-2	3	0	0	1	–	r_3
	z	0	-5	4	0	0	0		r_4
$\underline{P}_1$	5	6	1	-1	1	0	0	–	$r_1'=r_1/1$
$\underline{P}_4$	0	6	0	$\boxed{1}$	-3	1	0	6/1	$r_2'=r_2-3r_1'$
$\underline{P}_5$	0	21	0	1	2	0	1	21/1	$r_3'=r_3-(-2)r_1'$
	z	30	0	-1	5	0	0		$r_4'=r_4-(-5)r_1'$
$\underline{P}_1$	5	12							
$\underline{P}_2$	-4	6	0	1	-3	1	0		$r_2''=r_2'/1$
$\underline{P}_5$	0	15							
	z	36	0	0	2	1	0		$r_4''=r_4'-(-1)r_2''$

3.3 Τεχνητές Μεταβλητές: Η μέθοδος Μ

Η εφαρμογή του αλγορίθμου Simplex προϋποθέτει αφενός μεν ότι το πρόβλημα Γ.Π. είναι σε κανονική μορφή και αφετέρου ότι ο αντίστοιχος πίνακας A περιέχει τον $m \times m$ μοναδιαίο πίνακα I, ο οποίος μας δίνει και την πρώτη βασική εφικτή λύση. Ενώ κάθε πρόβλημα Γ.Π. μπορεί να τεθεί σε κανονική μορφή με τη χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών, ο μοναδιαίος πίνακας δεν σχηματίζεται πάντοτε από στήλες του A. Σε μία τέτοια περίπτωση θα πρέπει να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα Γ.Π. σε ένα ισοδύναμο που να περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα και φυσικά να είναι σε κανονική μορφή. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο των τεχνητών μεταβλητών. Βρίσκουμε την άριστη λύση, με τη μέθοδο αυτή, εφαρμόζοντας τη μέθοδο Simplex πρώτα σε ένα διαφορετικό πρόβλημα Γ.Π. που είναι σε κανονική μορφή και περιέχει το μοναδιαίο πίνακα. Οι περιορισμοί του νέου αυτού προβλήματος Γ.Π. σχηματίζονται από τους περιορισμούς του αρχικού όπου έχουμε προσθέσει σε όσες εξισώσεις χρειάζεται από μία μη-αρνητική μεταβλητή (τεχνητή μεταβλητή) ώστε να δημιουργείται ο μοναδιαίος πίνακας. Η αντικειμενική συνάρτηση του νέου προβλήματος Γ.Π. ορίζεται έτσι ώστε η άριστη λύση του να μην περιέχει τεχνητές μεταβλητές ως βασικές. Έτσι, αφού οι θετικές συντεταγμένες της άριστης λύσης του αντιστοιχούν όλες σε κανονικές μεταβλητές έχουμε αμέσως μία βασική εφικτή και ίσως άριστη λύση του αρχικού προβλήματος. Έστω $\underset{\sim}{y} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k})'$, όπου $k \leq m$, το διάνυσμα των τεχνητών μεταβλητών και $\tilde{A} \in M_{m \times (n+k)}$

ο επαυξημένος με τις μοναδιαίες στήλες των τεχνητών μεταβλητών πίνακας του A. Ο $\tilde{A}$ περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα. Σύμφωνα με τη μέθοδο M ορίζουμε τους συντελεστές $\tilde{c}_i = c_i$, $i=1,\dots,n$, $\tilde{c}_i = M$, $i=n+1,\dots,n+k$. όπου M αυθαίρετα μικρός αρνητικός αριθμός ($M<<0$) στον οποίο δεν χρειάζεται να δώσουμε συγκεκριμένη τιμή. Ορίζουμε ως αντικειμενική συνάρτηση του νέου προβλήματος Γ.Π. τη συνάρτηση:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \dots + Mx_{n+k}$$

ή πιο συνοπτικά: $\underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{M}'\underset{\sim}{y}$, όπου $\underset{\sim}{M} = (M, M, \dots, M)'$ και $M<<0$. Έχουμε να λύσουμε το νέο πρόβλημα Γ.Π. $\max(\underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{M}'\underset{\sim}{y})$ με περιορισμούς:

$$\tilde{A}\begin{pmatrix}\underset{\sim}{x}\\ \underset{\sim}{y}\end{pmatrix} = \underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0},\ \underset{\sim}{y} \geq \underset{\sim}{0}.$$

Αν το αρχικό πρόβλημα Γ.Π. έχει εφικτή λύση, έστω $\underset{\sim}{x}_0$ τότε η $\begin{pmatrix}\underset{\sim}{x}_0\\ \underset{\sim}{0}\end{pmatrix}$ είναι εφικτή **λύση** του νέου προβλήματος Γ.Π. και καλύτερη από κάθε άλλη εφικτή λύση που έχει μία τουλάχιστον **τεχνητή** μεταβλητή με θετική τιμή εφόσον $M<<0$. Άρα, σ' αυτή την περίπτωση η άριστη λύση του νέου προβλήματος Γ.Π. θα έχει όλες τις τεχνικές μεταβλητές ίσες με μηδέν, θα είναι δηλαδή της μορφής $\begin{pmatrix}\hat{\underset{\sim}{x}}\\ \underset{\sim}{0}\end{pmatrix}$. Τότε προφανώς η $\hat{\underset{\sim}{x}}$ είναι άριστη λύση του αρχικού προβλήματος Γ.Π. Φυσικά, αν στην άριστη λύση του νέου προβλήματος Γ.Π. υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές με θετική τιμή, αυτό σημαίνει ότι το αρχικό πρόβλημα Γ.Π. δεν έχει εφικτές λύσεις. Κατά την εφαρμογή του **αλγορίθμου** Simplex, κάθε τεχνητή **στήλη** που φεύγει από τη βάση μπορεί να διαγράφεται, εφόσον δεν πρόκειται να ξαναγίνει βασική σε επόμενα tableaux.

Παράδειγμα: Να λυθεί με τη Μ-μέθοδο το πρόβλημα Γ.Π.

$$\max(2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4)$$

με περιορισμούς:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$2x_3 - 3x_4 = 3$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Λύση: Το πρόβλημα Γ.Π. είναι σε κανονική μορφή. Με μορφή πινάκων γράφεται:

$$\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$$

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

$$\underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0},$$

$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\ \underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας A περιέχει μόνο την πρώτη στήλη του 3×3 μοναδιαίου πίνακα και έτσι δεν υπάρχει προφανής βασική εφικτή λύση. Εισάγοντας από μία τεχνητή μεταβλητή στη δεύτερη και τρίτη εξίσωση, παίρνουμε το νέο σύστημα περιορισμών

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$$

$$2x_3 - 3x_4 + x_6 = 3$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

ή ισοδύναμα με μορφή πινάκων

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} \underset{\sim}{x} \\ \underset{\sim}{y} \end{pmatrix} = \underset{\sim}{b},\ \text{όπου}\ \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$. Στο νέο σύστημα, ο πίνακας A έχει επεκταθεί στον πίνακα $\tilde{A}$ που περιέχει όλες τις στήλες του 3×3 μοναδιαίου πίνακα και δίνει την αρχική βασική εφικτή λύση: $x_1=8$, $x_2=x_3=x_4=0$, $x_5=6$, $x_6=3$ ή $\underset{\sim}{x}=(8,0,0,0,6,3)'$. Εισάγοντας τις τεχνητές μεταβλητές x_5, x_6 στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστή M αυθαίρετα μικρό αρνητικό αριθμό και εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Simplex στο νέο πρόβλημα Γ.Π. έχουμε:

			2	−3	1	2	M	M		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	2	8	1	2	1	2	0	0	8	r_1
P_5	M	6	0	1	1	1	1	0	6	r_2
P_6	M	3	0	0	$\boxed{2}$	−3	0	1	$3/2$	r_3
	z	$16+9M$	0	$7+M$	$1+3M$	$2-2M$	0	0		
P_1	2	$13/2$	1	2	0	$7/2$	0		$13/7$	$r_1'=r_1-r_3'$
P_5	M	$9/2$	0	1	0	$5/2$	1		$9/5$	$r_2'=r_2-r_3'$
P_3	1	$3/2$	0	0	1	$-3/2$	0		−	$r_3'=\frac{1}{2}r_3$
	z	$\frac{29}{2}+\frac{9M}{2}$	0	$7+M$	0	$\frac{7}{2}+\frac{5M}{2}$	0			
P_1	2	$1/5$	1	$3/5$	0	0				$r_1''=r_1'-\frac{7}{2}r_2'$
P_4	2	$9/5$	0	$2/5$	0	1				$r_2''=\frac{2}{5}r_2'$
P_3	1	$21/5$	0	$3/5$	1	0				$r_3''=r_3'+\frac{3}{2}r_2'$
	z	$41/5$	0	$28/5$	0	0				

Στο τρίτο tableau, όλες οι διαφορές $z_k - c_k$ είναι μη-αρνητικές. Άρα, η βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος Γ.Π. είναι η $\underset{\sim}{x}=(1/5, 0, 21/5, 9/5)'$ και η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $z = \frac{41}{5}$.

3.4 Η μέθοδος των δύο φάσεων

Έστω $\underset{\sim}{y} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k})'$ το διάνυσμα των τεχνητών μεταβλητών και $\tilde{A} \in M_{m\times(n+k)}$ ο αντίστοιχος επαυξημένος πίνακας του A. Σύμφωνα με τη μέθοδο των δύο φάσεων ορίζουμε:

$$\tilde{c}_i = 0,\ i = 1, 2, \dots, n,\quad \tilde{c}_i = 1,\ i = n+1, \dots, n+k$$

δηλαδή ορίζουμε ως αντικειμενική συνάρτηση το άθροισμα των τεχνητών μεταβλητών:

$$x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+k},$$

και το νέο πρόβλημα Γ. Π. είναι: $z_1 = \min \underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{y}$, $\underset{\sim}{1}' = (1, 1, \dots, 1)$ με περιορισμούς: $\tilde{A}\begin{pmatrix}\underset{\sim}{x}\\ \underset{\sim}{y}\end{pmatrix} = \underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0}$, $\underset{\sim}{y} \geq \underset{\sim}{0}$.

Η μέθοδος εφαρμόζεται σε δύο φάσεις, τις παρακάτω:

<u>ΦΑΣΗ Ι</u>: Βρίσκουμε την άριστη λύση του νέου προβλήματος Γ. Π. Εφόσον οι τεχνητές μεταβλητές είναι μη αρνητικές θα είναι $z_1 \geq 0$. Αν $z_1 = 0$, τότε η άριστη λύση έχει όλες τις τεχνητές μεταβλητές ίσες με μηδέν, δηλαδή είναι της μορφής $\begin{pmatrix}\underset{\sim}{x}_0\\ \underset{\sim}{0}\end{pmatrix}$. Η $\underset{\sim}{x}_0$ είναι η αρχική βασική εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος Γ. Π. Αν $z_1 > 0$, αυτό σημαίνει ότι το αρχικό πρόβλημα Γ. Π. <u>δεν</u> έχει εφικτή λύση.

<u>ΦΑΣΗ ΙΙ</u>: Λύνουμε το αρχικό πρόβλημα Γ. Π. ξεκινώντας από το τελικό tableau της φάσης Ι και διαγράφοντας τις στήλες των τεχνητών μεταβλητών. Φυσικά, ως συντελεστές κόστους θέτουμε τα αρχικά c_i

και υπολογίζουμε από την αρχή την γραμμή των
διαφορών $z_j - c_j$.

Παράδειγμα Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα Γ.Π. με τη μέθοδο των δύο φάσεων. Πρόβλημα Σελ. 71.

Λύση: Στην πρώτη φάση λύνουμε το πρόβλημα Γ.Π. $z_1 = \min(x_5 + x_6)$ ή $z_1 = -\max(-x_5 - x_6)$ κάτω από τις νέες συνθήκες και στη δεύτερη φάση λύνουμε το αρχικό πρόβλημα.

ΦΑΣΗ Ι

			0	0	0	0	-1	-1		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	0	8	1	2	1	2	0	0	8/1	Γ_1
P_5	-1	6	0	1	1	1	1	0	6/1	Γ_2
P_6	-1	3	0	0	$\boxed{2}$	-3	0	1	3/2	Γ_3
	z	-9	0	-1	-3	2	0	0		Γ_4
P_1	0	13/2	1	2	0	7/2	0		13/7	$\Gamma_1' = \Gamma_1 - \Gamma_3'$
P_5	-1	9/2	0	1	0	5/2	1		9/5	$\Gamma_2' = \Gamma_2 - \Gamma_3'$
P_3	0	3/2	0	0	1	-3/2	0		-	$\Gamma_3' = \frac{1}{2}\Gamma_3$
	z	-9/2	0	-1	0	-5/2	0			$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 3\Gamma_3'$
P_1	0	1/5	1	3/5	0	0				$\Gamma_1'' = \Gamma_1' - \frac{7}{2}\Gamma_2''$
P_4	0	9/5	0	2/5	0	1				$\Gamma_2'' = \frac{2}{5}\Gamma_2'$
P_3	0	21/5	0	3/5	1	0				$\Gamma_3'' = \Gamma_3' + \frac{3}{2}\Gamma_2''$
	z	0	0	0	0	0				$\Gamma_4'' = \Gamma_4' + \frac{5}{2}\Gamma_2''$

Στο πρώτο tableau της φάσης ΙΙ είναι $z_k - c_k \geq 0$ για όλα τα κ. Άρα, βρήκαμε την άριστη λύση που είναι η: $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{21}{5}$, $x_4 = 9/5$

ή $\underset{\sim}{x} = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{21}{5}, 9/5\right)'$ με $z = \frac{41}{5}$.

ΦΑΣΗ II

			2	−3	1	2	
$\underline{B}$	$\underline{c_B}$	$\underline{b}$	$\underline{P_1}$	$\underline{P_2}$	$\underline{P_3}$	$\underline{P_4}$	θ
$\underline{P_1}$	2	1/5	1	3/5	0	0	
$\underline{P_4}$	2	9/5	0	2/5	0	1	
$\underline{P_3}$	1	21/5	0	3/5	1	0	
	z	41/5	0	28/5	0	0	