

4.1 Δυσκό πρόβλημα

Σε κάθε πρόβλημα Γ.Π. αντιστοιχεί ένα άλλο πρόβλημα Γ.Π., το δυσκό του, που έχει ξεχωριστή σημασία και ιδιότητες και του οποίου η βέλτιστη λύση συνδέεται άμεσα με τη βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος Γ.Π. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός: Ένα πρόβλημα Γ.Π. είναι σε κανονική μορφή, αν έχει τη μορφή $(\pm) \max \underline{c}' \underline{x}$ με περιορισμούς $\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$, $\underline{x} \geq \underline{0}$, όπου $\underline{c}, \underline{x} \in M_{n \times 1}$, $\underline{b} \in M_{m \times 1}$, $\underline{A} \in M_{m \times n}$ 

Παρατηρήσεις: (α) Σε αντίθεση με την κανονική μορφή, στην ημικανονική μορφή το διάνυσμα $\underline{b}$ των σταθερών όρων δεν είναι κατ'ανάγκη μη-αρνητικό. Επίσης δεν έχουμε εξισώσεις, αλλά ανισώσεις, της ίδιας φοράς. Έτσι, αν το αρχικό πρόβλημα περιέχει μία εξίσωση π.χ. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$, την αντικαθιστούμε με το ισοδύναμο σύστημα των ανισώσεων: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ και $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$

και μετά αλλάζουμε τη φορά της δεύτερης πολλαπλασιάζοντάς την με (-1) .

(β) Από την Παρατήρηση (α) και το γεγονός ότι κάθε πρόβλημα Γ.Π. μπορεί να τεθεί σε κανονική μορφή είναι προφανές ότι κάθε πρόβλημα Γ.Π. μπορεί επίσης να τεθεί σε ημι-κανονική μορφή.

Ορισμός: Έστω το πρόβλημα Γ.Π. σε κριμανονική

μορφή: $(\pm) \max \underline{c}' \underline{x}$

$$A \underline{x} \leq \underline{b} \quad (\Pi)$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

όπου $\underline{c}, \underline{x} \in M_{n \times 1}$, $\underline{b} \in M_{m \times 1}$, $A \in M_{m \times n}$. Ορίζουμε
ως δυτικό πρόβλημα του (Π) , το πρόβλημα Γ.Π.

$$(\pm) \min \underline{b}' \underline{w}$$

$$A' \underline{w} \geq \underline{c} \quad (\Delta)$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

όπου $\underline{w} \in M_{m \times 1}$, $A' \in M_{n \times m}$ είναι ο ανάστροφος του
πίνακα A . Το πρόβλημα Γ.Π. (Π) αναφέρεται ως πρω-
τεύον. $\boxtimes$

4.2 Οικονομική Ερμηνεία του δυτικού προβλήματος Γ.Π.

Το δυτικό πρόβλημα έχει μία ενδιαφέρουσα οικονομι-
κή ερμηνεία για την κατηγορία των προβλημάτων
Γ.Π. σε κριμανονική μορφή με όλους τους συντελε-
στές μη-αρνητικούς. Θεωρούμε το πρόβλημα Γ.Π. (Π)
με $c_j, b_i, a_{ij} \geq 0, j=1, \dots, n, i=1, 2, \dots, m$. Ένα τέτοιο
πρόβλημα Γ.Π. μπορεί να ερμηνευθεί ως πρόβλημα
παραγωγής στο οποίο ένας παραγωγός έχει τη δυνα-
τότητα να παράγει n διαφορετικά προϊόντα $\pi_1, \pi_2, \dots$

π_n χρησιμοποιώντας m διαφορετικά υλικά $\gamma_1, \gamma_2, \dots$

γ_m . Οι παράμετροι του προβλήματος είναι:

c_j : το κέρδος από μία μονάδα του προϊόντος π_j ,

a_{ij} : η απαιτούμενη ποσότητα από το υλικό
 γ_i για την παραγωγή μίας μονάδας του
προϊόντος π_j ,

b_i : διαθέσιμη ποσότητα του υγιούς Y_i ,
ενώ οι μεταβλητές είναι

x_j : η παραχόμενη ποσότητα του προϊόντος π_j .

Έτσι, η αντιικειμενική συνάρτηση εκφράζει το συνολικό κέρδος από την πώληση των προϊόντων. Ο i -περιορισμός εκφράζει την απαίτηση ότι:

$$\left(\begin{array}{l} \text{η συνολική ποσότητα} \\ \text{του υγιούς } Y_i \text{ που} \\ \text{καταναλώνεται} \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{l} \text{Διαθέσιμη} \\ \text{ποσότητα} \\ \text{του υγιούς } Y_i \end{array} \right)$$

Οι περιορισμοί μη-αρνητικότητας εκφράζουν τη φυσική απαίτηση οι ποσότητες παραγωγής των προϊόντων να είναι μη-αρνητικές. Το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους από την πώληση των προϊόντων. Έστω ότι κάποιος ενδιαφέρεται να αγοράσει τα υγιή που υπάρχουν στο πρόβλημα και προσπαθεί να διαμορφώσει τις τιμές που θα δώσει για κάθε μονάδα υγιούς ώστε να δελεάσει τον παραγωγό. Έστω w_i : η αξία μιας μονάδας του υγιούς i . Για να δελεαστεί ο παραγωγός και να πουλήσει τα υγιή θα πρέπει για κάθε προϊόν j :

$$\left(\begin{array}{l} \text{Αξία των υγιών για} \\ \text{την παραγωγή μιας} \\ \text{μονάδας του προϊόντος } j \end{array} \right) \geq \left(\begin{array}{l} \text{Τιμή μιας} \\ \text{μονάδας} \\ \text{του προϊόντος } j \end{array} \right)$$

και όλες οι μοναδιαίες τιμές των υγιών να είναι μη-αρνητικές. Όπως η αξία των υγιών για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος j είναι:

$$a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{mj}w_j, \text{ άρα οι περιο-}$$

ριστοί γίνονται:

-79-

$$a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m \geq c'_1$$

$$a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m \geq c'_2$$

$\vdots$

$\vdots$

$$a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m \geq c'_n$$

$$w_1, w_2, \dots, w_n \geq 0.$$

Το ζητούμενο είναι να πληρωθούν τα λιγότερα δυνατά χρήματα στον παραγωγό για την αγορά των υγιών, δηλαδή $\min(b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_mw_m)$. Το πρόβλημα είναι ακριβώς το δυϊκό πρόβλημα Γ.Π. (Δ) του (Π).

Συμπερασματικά, έστω ένα πρόβλημα Γ.Π. για την βελτιστοποίηση του κέρδους από την παραγωγή n προϊόντων με m υγιά, όπου είναι γνωστές οι n τιμές των μονάδων προϊόντων, οι m διαθέσιμες ποσότητες των υγιών και οι $m \times n$ ποσότητες των υγιών που χρειάζονται για την παραγωγή μιας μονάδας κάθε προϊόντος. Οι μεταβλητές του προβλήματος Γ.Π. αφορούν τον αριθμό των προϊόντων που πρέπει να παραχθούν. Το δυϊκό πρόβλημα Γ.Π. αφορά τον προσδιορισμό των m τιμών των μονάδων των υγιών ώστε να βελτιστοποιήσει ο παραγωγός να πληρώσει τα υγιά. $\square$

Παράδειγμα: Θεωρούμε ένα εργοστάσιο κατασκευής μεταλλευμάτων το οποίο παράγει δύο υλικά:

(i) το Cu-Fe κράτα με τιμή 3.000 ευρώ ανά μονάδα -80-

(ii) το Zn-Fe κράτα με τιμή 5.000 ευρώ ανά μονάδα.

Για την παραγωγή μιας μονάδας κράτους απαιτούνται οι μονάδες υγιών που φαίνονται στον πίνακα:

Μέταλλο κράτα	Cu Zn Fe		
	Cu	Zn	Fe
Cu-Fe	1	0	3
Zn-Fe	0	2	2

Οι διαθέσιμες ποσότητες των υγιών Cu, Zn, Fe είναι 4, 12 και 18 μονάδες αντίστοιχα. Θέτοντας x_1, x_2 τις παραχόμενες ποσότητες των κρατών Cu-Fe, Zn-Fe, το πρόβλημα Γ.Π. που θα πρέπει να λύσει το εργοστάσιο για τη μέγιστοποίηση του κέρδους του είναι το:

$\max (3x_1 + 5x_2) \Leftrightarrow$ Μέγιστοποίηση κέρδους από προϊόντα

$x_1 \leq 4 \rightarrow$ Απαιτούμενη ποσότητα Cu

$\leq$ Διαθέσιμη ποσότητα Cu

$2x_2 \leq 12 \Leftrightarrow$ Απαιτούμενη ποσότητα Zn

$\leq$ Διαθέσιμη ποσότητα Zn

$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \Leftrightarrow$ Απαιτούμενη ποσότητα Fe

$\leq$ Διαθέσιμη ποσότητα Fe

$x_1, x_2 \geq 0 \Leftrightarrow$ Ποσότητες των κρατών Cu-Fe, Zn-Fe ≥ 0 .

Θέτοντας w_1, w_2, w_3 τις τιμές αγοράς ανά μονάδα των υγιών Cu, Zn, Fe, το δυϊκό πρόβλημα που

πρέπει να λύσει κάποιος ο οποίος επιθυμεί την αγορά των μεταχειράτων-υγιών είναι:

$$\min(4w_1 + 12w_2 + 18w_3) \Leftrightarrow \text{Ελαχιστοποίηση τιμής αγοράς των υγιών}$$

$$w_1 + 3w_3 \geq 3 \Leftrightarrow \text{Αξία υγιών για μία μονάδα}$$

$$\text{Cu-Fe} \geq \text{Τιμή μονάδας Cu-Fe}$$

$$2w_2 + 2w_3 \geq 5 \Leftrightarrow \text{Αξία υγιών για μία μονάδα}$$

$$\text{Zn-Fe} \geq \text{Τιμή μονάδας Zn-Fe}$$

$$w_1, w_2, w_3 \geq 0 \Leftrightarrow \text{Τιμές ανά μονάδα υγιών}$$

$$\text{Cu, Zn, Fe} \geq 0 \quad \boxtimes$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το δυτικό του προβλήματος Γ.Π.

$$\max(5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4)$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 6$$

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 4 \quad (\pi)$$

$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \in \mathbb{R}$$

Λύση: Αντιμεθεωρώντας το δεύτερο περιορισμό με το ισοδύναμο σύστημα δύο ανισώσεων και θέτοντας:

$$x_3 = -x'_3, x'_3 \geq 0, x_4 = x'_4 - x''_4, x'_4, x''_4 \geq 0, \text{ έχουμε:}$$

την ημιανονική μορφή του προβλήματος:

$$\max(5x_1 + 3x_2 - 2x'_3 + x'_4 - x''_4)$$

$$4x_1 + 3x_2 - x'_3 + 2x'_4 - 2x''_4 \leq 6$$

$$2x_1 + 2x_2 - 5x'_3 + x'_4 - x''_4 \leq 4 \quad (\pi_1)$$

$$-2x_1 - 2x_2 + 5x'_3 - x'_4 + x''_4 \leq -4$$

$$x_1, x_2, x'_3, x'_4, x''_4 \geq 0$$

Από τον ορισμό, το δυτικό του (π_1) είναι το πρόβλημα

Γ.Π.

$$\min(6w_1 + 4w_2 - 4w_3)$$

με περιορισμούς:

$$4w_1 + 2w_2 - 2w_3 \geq 5$$

$$3w_1 + 2w_2 - 2w_3 \geq 3$$

$$-w_1 - 5w_2 + 5w_3 \geq -2 \quad (\Delta_1)$$

$$2w_1 + w_2 - w_3 \geq 1$$

$$-2w_1 - w_2 + w_3 \geq -1$$

$$w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

Οι δύο τελευταίοι περιορισμοί μπορούν να αντικατασταθούν από μία ισοδύναμη εξίσωση. Αφού, επίσης τόσο στην αντικειμενική συνάρτηση όσο και στους περιορισμούς οι μεταβλητές w_2, w_3 εμφανίζονται πάντοτε με τη μορφή της διαφοράς $w_2 - w_3$ θέτουμε $w_2 - w_3 = w'_2, w'_2 \in \mathbb{R}$. Τέλος, πολλαπλασιάζοντας τον τρίτο περιορισμό επί (-1) έχουμε το ισοδύναμο πρόβλημα Γ.Π.

$$\min (6w_1 + 4w'_2)$$

$$4w_1 + 2w'_2 \geq 5$$

$$3w_1 + 2w'_2 \geq 3 \quad (\Delta)$$

$$w_1 + 5w'_2 \leq 2$$

$$2w_1 + w'_2 = 1$$

$$w_1 \geq 0, w'_2 \in \mathbb{R}. \quad \boxtimes$$

4.3 Σχέσεις των λύσεων πρωτεύοντος (Π) και δυτικού (Δ) προβλήματος Γ.Π.

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα. Για την απόδειξή του παραπέμπουμε στο βιβλίο [4], σελ. 58-60.

Θεώρημα 4.1 (i) Αν το (Π) έχει βέλτιστη λύση, τότε και το (Δ) έχει βέλτιστη λύση και οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεών τους είναι ίσες.

(ii) Αν το (Π) είναι μη-φραχμένο, τότε το (Δ) δεν έχει εφικτές λύσεις.

Ισχύει επιπλέον το ακόλουθο σημαντικό πόρισμα, το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα να βρούμε την άριστη λύση του (Δ) , όταν γνωρίζουμε την άριστη λύση του (Π) χωρίς να γνωρίζουμε το σχετικό tableau της μεθόδου Simplex του (Π) , βρίνοντας απλά ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων.

Πόρισμα (βιβλίο [4], σελ. 61). Αν $\hat{x}, \hat{w}$ είναι άριστες λύσεις των (Π) και (Δ) αντίστοιχα και $\hat{x}_i > 0$, τότε η $\hat{w}$ κάνει τον i -περιορισμό του (Δ) ισότητα.

Ας δούμε ένα σχετικό παράδειγμα.

Παράδειγμα: Δίνεται το πρόβλημα Γ.Π.

$$\max (2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$2x_3 - 3x_4 = 3$$

$$x_i \geq 0, i=1, 2, 3, 4,$$

με άριστη λύση $\hat{x} = (1/5, 0, 24/5, 9/5)'$. Να βρεθεί η άριστη λύση του δυϊκού του.

Λύση: Το δυϊκό πρόβλημα Γ.Π. είναι:

$$\min (8w_1 + 6w_2 + 3w_3)$$

$$w_1 \geq 2$$

$$2w_2 + w_3 \geq -3$$

$$w_1 + w_2 + 2w_3 \geq 1$$

$$2w_1 + w_2 - 3w_3 \geq 2.$$

Δεν γνωρίζουμε το σχετικό tableau του πρωτεύοντος (Π) προβλήματος αλλά μόνο τη βέλτιστη λύση του.

Αφού οι θετικές συντεταγμένες της $\hat{x}$ είναι η πρώτη, η τρίτη και η τέταρτη, η άριστη λύση: $\hat{w} = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3)'$ του δυϊκού προβλήματος (Δ) θα κάνει

τους αντίστοιχους περιορισμούς του ισότητες. Έχουμε

δηλαδή το σύστημα:

$$\hat{w}_1 = 2$$
$$\hat{w}_1 + \hat{w}_2 + 2\hat{w}_3 = 1$$
$$2\hat{w}_1 + \hat{w}_2 - 3\hat{w}_3 = 2$$

που έχει λύση $\hat{w}_1 = 2, \hat{w}_2 = -7/5, \hat{w}_3 = 1/5$. Άρα, η άριστη λύση του δυτικού προβλήματος Γ.Π. είναι η $\hat{w} = (2, -7/5, 1/5)$. Η βέλτιστη τιμή των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο προβλημάτων είναι $z = 41/5$. $\boxtimes$

4.4 Δυτική μέθοδος Simplex

Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση κάθε προβλήματος Γ.Π. που έχει τεθεί σε κανονική μορφή. Αποτελείται από δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση βρίσκουμε μία βασική λύση του (Π) με $z_i - c_i \geq 0$ για όλα τα i , δηλαδή βρίσκουμε μία αρχική βασική εφικτή λύση του (Δ). Στη δεύτερη φάση διατηρώντας όλες τις διαφορές $z_i - c_i$ μη αρνητικές βρίσκουμε μία βασική λύση του (Π) με μη αρνητικές συντεταγμένες δηλαδή εφικτή και πετυχαίνουμε αυτό βρίσκοντας την άριστη λύση του δυτικού για το οποίο έχουμε από την πρώτη φάση μία αρχική βασική εφικτή λύση. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τον δυτικό αλγόριθμο Simplex.

Δυτικός αλγόριθμος Simplex: Ξεκινάμε από το tableau Simplex στο οποίο η αντίστοιχη βασική λύση δεν χρειάζεται να είναι κατ'αναγκασμό και εφικτή.

- ΦΑΣΗ I: Εξετάζουμε τις διαφορές $z_k - c_k$.
- (1α) Αν $z_k - c_k \geq 0$, για όλα τα k , πάμε στη φάση II.
 - (1β) Αν υπάρχει $r: z_r - c_r < 0$ και $x_{ir} < 0$ για όλα τα i ,

τότε το πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις ή είναι μη-φραχμένο.

(1γ) Αν οι (α), (β) δεν ισχύουν, τότε διαλέγουμε μία στήλη r με $z_r - c_r < 0$ και μετά ένα θετικό στοιχείο της, έστω το $x_{ir} > 0$. Η στήλη P_i φεύγει από τη βάση.

2. Η στήλη P_j που γίνεται βασική ορίζεται από το κριτήριο:

$$P_j: \left| \frac{z_j - c_j}{x_{ij}} \right| = \min \left\{ \begin{array}{l} \min_k \left| \frac{z_k - c_k}{x_{ik}} \right| : z_k - c_k > 0, x_{ik} < 0 \\ \max_k \left| \frac{z_k - c_k}{x_{ik}} \right| : z_k - c_k < 0, x_{ik} > 0 \end{array} \right\}$$

3. Πάρε στο επόμενο tableau Simplex με το γνωστό τρόπο.

4. Πάρε στο βήμα 1.

ΦΑΣΗ II: 1. Εδώ $z_k - c_k \geq 0$ για όλα τα k . Έστω $\underline{x}_0$ η αντίστοιχη βασική λύση.

(1α) Αν $x_{i0} \geq 0$, για όλα τα i , η $\underline{x}_0$ είναι άριστη λύση.

(1β) Αν υπάρχει $i: x_{i0} < 0$ και $x_{ik} \geq 0$ για όλα τα k , το πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις.

(1γ) Αν οι (α), (β) δεν ισχύουν, τότε για κάθε $i: x_{i0} < 0$, υπάρχει $k: x_{ik} < 0$. Διαλέγουμε ένα $x_{i0} < 0$ και η στήλη P_i φεύγει από τη βάση.

2. Η στήλη P_j γίνεται βασική χρησιμοποιώντας το κριτήριο:

$$P_j: \left| \frac{z_j - c_j}{x_{ij}} \right| = \min_k \left| \frac{z_k - c_k}{x_{ik}} \right| : z_k - c_k > 0, x_{ik} < 0$$

3. Πάρε στο επόμενο tableau Simplex με το γνωστό τρόπο.

4. Πάρε στο βήμα 1.

Παράδειγμα: Να λυθεί με το δυϊκό αλγόριθμο Simplex το πρόβλημα Γ.Π.

$$\begin{aligned} \max & (5x_1 - 4x_2) \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 &= 24 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 &= -4 \\ x_i &\geq 0, i=1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Λύση: Το πρόβλημα είναι σχεδόν σε κανονική μορφή. Επίσης, οι τρεις τελευταίες στήλες του πίνακα των συντελεστών σχηματίζουν τον 3×3 μοναδιαίο πίνακα ο οποίος μας δίνει την αρχική βασική μη εφικτή λύση $\underline{x}_0 = (0, 0, 6, 24, -4)'$.

		ΦΑΣΗ Ι						
		5 -4 0 0 0						
B	$\underline{c}_B$	$\underline{b}$	$\underline{P}_1$	$\underline{P}_2$	$\underline{P}_3$	$\underline{P}_4$	$\underline{P}_5$	
$\underline{P}_3$	0	6	1	-1	1	0	0	
$\underline{P}_4$	0	24	[3]	-2	0	1	0	
$\underline{P}_5$	0	-4	-2	3	0	0	1	
Z		0	-5	4	0	0	0	
$\underline{P}_3$	0	-2	0	$(-\frac{4}{3})$	1	$-\frac{1}{3}$	0	
$\underline{P}_1$	5	8	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	
$\underline{P}_5$	0	12	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	
Z		40	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	

Στο πρώτο tableau είναι $z_i - c_i = -5 < 0$, $x_{21} = 3 > 0$ άρα η στήλη $\underline{P}_4$ φεύγει από τη βάση. Τώρα, επίσης

$$|\theta| = \min \left\{ \left| \frac{-5}{3} \right|, \left| \frac{4}{-2} \right| \right\} = \left| \frac{-5}{3} \right|$$

άρα η στήλη $\underline{P}_1$ γίνεται βασική. Πιλότος είναι το 3. Στο δεύτερο tableau είναι $x_k - b_k \geq 0$ για όλα τα k και επομένως τελειώνει η φάση I.

ΦΑΣΗ II

Είναι $x_{10} = -2 < 0$, άρα η στήλη $\underline{P}_3$ φεύγει από τη βάση.

$$\text{Επίσης είναι: } |\theta| = \min \left\{ \left| \frac{2/3}{-1/3} \right|, \left| \frac{5/3}{-1/3} \right| \right\} = \left| \frac{2/3}{-1/3} \right|,$$

άρα η στήλη $\underline{P}_2$ γίνεται βασική. Πιλότος είναι το $-1/3$ και το επόμενο tableau είναι:

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{P}_2 & -4 & 6 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ \underline{P}_1 & 5 & 12 & & & & & \\ \underline{P}_5 & 0 & 2 & & & & & \\ & 2 & 36 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Εδώ προκύπτει είναι $x_{10} > 0$, για όλα τα i και επομένως η αντίστοιχη λύση είναι $\underline{x} = (12, 6, 0, 0, 2)'$ είναι η άριστη λύση. Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $z = 36$. $\square$

4.5 Ανάλυση Ευαισθησίας

Η ανάλυση ευαισθησίας μελετά τη μεταβολή της άριστης λύσης ενός προβλήματος Γ.Π. όταν μεταβληθούν κάποια από τα αρχικά δεδομένα του. Ας δούμε, για παράδειγμα, (α) μεταβολές στους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης και (β) μεταβολές στα δεξιά μέλη των περιορισμών.

(α) Μεταβολές στους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης. Ας δούμε το παράδειγμα που έχουμε επιλύσει γραφικά στο Κεφάλαιο 2.

$$\text{Max } z = 150x_1 + 200x_2$$

με περιορισμούς: $x_1 + x_2 \leq 550$

$$x_1 + 3x_2 \leq 1000$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 2000$$

$$x_1 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Έστω ότι ο αντικειμενικός συντελεστής της πρώτης μεταβλητής μεταβάλλεται κατά μία ποσότητα, έστω D . Ο τελικός πίνακας Simplex ήταν:

C_B^*	C_B		150	200	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
150+D	150	x_1	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
200	200	x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	0	x_5	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0
0	0	x_6	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
		z_j	150	200	125	25	0	0
		$C_j - z_j$	0	0	-125	-25	0	0
		z_j^*	150+D	200	125	$25 - \frac{1}{2}D$	0	0
		$C_j^* - z_j^*$	0	0	$-125 - \frac{3}{2}D$	$-25 + \frac{1}{2}D$		
								<u>93,75</u>
								<u>93,75 + 325D</u>

Αν μεταβληθεί το C_1 κατά την ποσότητα D , τότε ο συντελεστής της μεταβλητής x_1 θα είναι $C_1 + D$, δηλαδή $150 + D$. Η μεταβολή στον αντικειμενικό συντελεστή επηρεάζει συχευμένα στοιχεία του τελικού πίνακα Simplex που είναι τα στοιχεία της γραμμής $C_j - z_j$ και η τιμή του z , ενώ δεν επηρεάζονται καθόλου οι τιμές των βασικών μεταβλητών. Για να παραμείνει η λύση βέλτιστη, θα πρέπει:

$-125 - \frac{3}{2}D \leq 0$ και $-25 + \frac{1}{2}D \leq 0$. Λύνοντας ως προς D θα πρέπει: $D \geq -\frac{250}{3}$, $D \leq 50$, δηλαδή έχουμε: $-\frac{250}{3} \leq D \leq 50$. Ομοίως, μπορούμε να εντοπίσουμε το εύρος βελτιστότητας για τον αντιχειρениικό συντελεστή της δεύτερης μεταβλητής απόφασης. Ένα εύλογο ερώτημα είναι, τι συμβαίνει στην περίπτωση που μεταβάλλεται ο αντιχειρениικός συντελεστής κάποιας μη-βασικής μεταβλητής. Μία τέτοια μεταβολή επηρεάζει μόνο το αντίστοιχο στοιχείο της γραμμής $C_j - Z_j$ ενώ δεν επηρεάζει καθόλου το Z . Αυτό είναι αναμενόμενο διότι η μεταβολή δεν είναι βασική.

(β) Μεταβολές στα δεξιά μέλη των περιορισμών. Ας υποθέσουμε ότι το δεξιό μέλος του πρώτου περιορισμού $b_1 = 550$ μεταβάλλεται κατά μία ποσότητα D , δηλαδή έχουμε $b_1 = 550 + D$. Ο αρχικός πίνακας Simplex του προβλήματος είναι:

		150	200	0	0	0	0	Δεξιά μέλος
C_B		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	μέρος
0	x_3	1	1	1	0	0	0	$550 + D$
0	x_4	1	3	0	1	0	0	1000
0	x_5	2	5	0	0	1	0	2000
0	x_6	0	0	0	0	0	1	75
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$	150	200	0	0	0	0	

Στον τελικό πίνακα τα δεξιά μέλη θα μεταβληθούν κατά μία ποσότητα που προκύπτει από το γινόμενο της μεταβολής D επί το στοιχείο του πίνακα που βρίσκεται στη σειρά του b_i και στη στήλη της

περιθώρια μεταβλητής του συχνηεπιρένου περιουσιού.
Για την τιμή του z η μεταβολή που θα προκύψει εντοπίζεται ως εξής: Όταν μεταβάλλεται το b_i αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τα στοιχεία της στήλης της περιθώριας μεταβλητής x_i που στην περίπτωση μας είναι τα στοιχεία της στήλης της x_3 . Αυτά τα στοιχεία πολλαπλασιάζονται με τη μεταβολή D και στη συνέχεια προστίθενται στα δεξιά μέλη και στην τιμή του z .

C_B		150	200	0	0	0	0	Δεξιά μέλος
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
150	x_1	1	0	$3/2$	$-1/2$	0	0	$325 + 3/2 D$
200	x_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	0	$225 - 1/2 D$
0	x_5	0	0	$-1/2$	$-3/2$	1	0	$225 - 1/2 D$
0	x_6	0	0	$-3/2$	$1/2$	0	1	$75 - 3/2 D$
	z_j	150	200	125	25	0	0	$93,75 + 125 D$
	$C_j - z_j$	0	0	-125	-25	0	0	

Μπορούμε να εντοπίσουμε το εύρος εφικτότητας για την παράμετρο b_1 . Το εύρος εφικτότητας για τα δεξιά μέλη είναι εκείνο το διάστημα, όπου παραμένουν μη αρνητικά, ώστε η λύση που δίνεται από αυτά να είναι εφικτή. Θα πρέπει τα δεξιά μέλη να είναι μη αρνητικά, συνεπώς προκύπτουν οι ακόλουθες τέσσερις σχέσεις:

$$\begin{aligned} 325 + \frac{3}{2} D &\geq 0 \\ 225 - \frac{1}{2} D &\geq 0 \\ 225 - \frac{1}{2} D &\geq 0 \\ 75 - \frac{3}{2} D &\geq 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας τις σχέσεις ως προς D λαμβάνουμε τις ανισότητες: $D \geq -\frac{650}{3}$, $D \leq 450$ και $D \leq 50$.

Οι τέσσερις ανισώσεις συναρτηθούν στο εξής διάστημα για τη μεταβολή D : $-\frac{650}{3} \leq D \leq 50$. Άρα, η επιτρεπόμενη αύξηση για το b_1 είναι μέχρι 50 μονάδες, ενώ η επιτρεπόμενη μείωση είναι μέχρι και $-\frac{650}{3}$. Το διάστημα εφικτότητας για το b_1 είναι:

$$-\frac{650}{3} \leq D \leq 50 \Rightarrow \frac{1000}{3} \leq 550 + D \leq 600 \text{ που}$$

δίνει $\frac{1000}{3} \leq b_1 \leq 600$. Το διάστημα εφικτότητας υποδεικνύει ότι, εφόσον το δεξιό μέλος του πρώτου περιορισμού (που αρχικά είχε τιμή ίση με 550) μεταβάλλεται μεταξύ $\frac{1000}{3}$ και 600, θα υπάρχει μία εφικτή λύση. Με όμοιο τρόπο, μπορούμε να χειριστούμε όλες τις περιπτώσεις περιορισμών ανεξάρτητα από τη φορά τους. Η ανάγνωση ευαισθησίας διεξάγεται αποδοτικά στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, χρησιμοποιώντας κατάλληλα πακέτα λογισμικού.

