

5.1 Εισαγωγή

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε δύο χαρακτηριστικά προβλήματα του Γ. Π., όπως το πρόβλημα μεταφοράς και το πρόβλημα της ανάθεσης ή πρόβλημα καταμερισμού της εργασίας.

5.2 Το πρόβλημα της Μεταφοράς

Στο Παράδειγμα 5 του Κεφαλαίου 1 είδαμε ένα παράδειγμα προβλήματος μεταφοράς. Το πρόβλημα μεταφοράς είναι μία από τις πρώτες εφαρμογές του Γ. Π. Είναι το πρόβλημα της οικονομικότερης διανομής ενός προϊόντος από ορισμένους σταθμούς παραγωγής (εργοστάσια, βιομηχανίες, αποθήκες) σε ορισμένους σταθμούς προορισμού (αποθήκες, λιμάνια, καταστήματα). Σε m σταθμούς παραγωγής $A_1, A_2, \dots, A_m$ ένα προϊόν υ-πάρχει σε ποσότητες $a_1, a_2, \dots, a_m$ αντίστοιχα. Το προϊόν πρέπει να παραδοθεί σε n σταθμούς προορισμού $B_1, B_2, \dots, B_n$ που απαιτούν ποσότητες $b_1, \dots, b_n$ αντίστοιχα. Η συνολική παραγωγή ισούται με τη συνολική ζήτηση, δηλαδή:
$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \equiv S.$$
 Το κόστος μεταφοράς μίας μονάδας προϊόντος από το σταθμό παραγωγής A_i στο σταθμό προορισμού B_j μετρούμενο σε κατάλληλες χρηματικές μονάδες είναι c_{ij} , $i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$. Ζητάμε να βρεθεί ένα άριστο σχέδιο μεταφοράς, δηλαδή να βρεθούν οι κατάλληλες ποσότητες x_{ij} που πρέπει να μεταφερθούν από τους σταθμούς παραγωγής στους σταθμούς προορισμού

ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφο-⁻⁹³⁻
 ρας και συγχρόνως να ικανοποιούνται οι ανάγκες όρων
 των σταθμών προορισμού. Τα δεδομένα του προβλή-
 ματος παρουσιάζονται συνοπτικά με τη βοήθεια του
 επόμενου πίνακα.

	β_1	β_2	$\dots$	β_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$ x_{1n}	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$ x_{2n}	c_{2n}	a_2
$\vdots$			$\dots$		$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$ x_{mn}	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	$\dots$ b_n	$\sum$	

Στην τελευταία στήλη του πίνακα αναγράφονται οι δια-
 θέσιμες ποσότητες, ενώ στην τελευταία γραμμή οι απαι-
 τούμενες ποσότητες του προϊόντος. Στην πάνω δεξιά γω-
 νία του τετραγώνου (i,j) που αντιστοιχεί στους αρι-
 θμούς A_i, β_j αναγράφεται το αντίστοιχο κόστος με-
 ταφοράς c_{ij} ενώ στο κάτω μέρος του τετραγώνου κατα-
 χωρείται η αντίστοιχη μεταφερόμενη ποσότητα x_{ij} .
 Αυτός ο πίνακας αναφέρεται ως *tableau σχεδίου μετα-*
φοράς. Έστω x_{ij} η ποσότητα προϊόντος που μεταφέ-
 ρεται από το σταθμό παραγωγής A_i στο σταθμό προ-
 ορισμού β_j . Η γραθηρατική διατύπωση του προβλή-
 ματος μεταφοράς είναι:

$$\min \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \right)$$

-94-

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i=1, 2, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j=1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n.$$

Το πρόβλημα μεταφοράς είναι ένα πρόβλημα β.π. με $m+n$ περιορισμούς και mn μεταβλητές και κάθιστα διατυπωμένο σε κανονική μορφή ως προς τους περιορισμούς. Το πρόβλημα έχει μία κατ'εξοχήν απλή μορφή. Συγκεκριμένα όλοι οι συντελεστές των μεταβλητών x_{ij} στους περιορισμούς είναι 0 ή 1 ενώ κάθε μία από αυτές εμφανίζεται με συντελεστή το 1 σε δύο αριθμούς από τους περιορισμούς, σ'αυτόν που αντιστοιχεί στον σταθμό παραγωγής A_i και σ'αυτόν που αντιστοιχεί στο σταθμό προορισμού B_j . Η ειδική μορφή των περιορισμών επιτρέπει την ανάπτυξη μίας απλής μεθόδου επίλυσης του προβλήματος μεταφοράς, παραλλαγής της μεθόδου Simplex, γνωστή ως μέθοδο μεταφοράς. Παραπέρπουτε στα βιβλία [1], σελ. 13-61, Τόμος Β' και στο βιβλίο [4], σελ. 87-103 για μία αναλυτικότερη παρουσίαση του προβλήματος μεταφοράς και της μεθόδου επίλυσής του.

5.3 Το πρόβλημα της ανάθεσης

Το πρόβλημα της ανάθεσης ή πρόβλημα καταμερισμού εργασίας είναι το εξής. Υπάρχουν m άτομα $A_1, A_2, \dots, A_m$ τα οποία πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για την εκτέλεση m εργασιών $B_1, B_2, \dots, B_m$. Κάθε εργασία

απαιτεί ένα άτομο και κάθε άτομο επιτελεί μία εργασία - 95-
 σία. Έστω ξ_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, m$ η απόδοση (π.χ. παραγωγι-
 κότητα, ταχύτητα κλπ) του ατόμου A_i στην εργασία B_j
 μετρούμενη σε κατάλληλες μονάδες. Πώς πρέπει να
 κατανεμηθούν τα άτομα στις εργασίες για να μεγιστο-
 ποιηθεί η συνολική απόδοση; Ένας τρόπος επίλυσης
 του προβλήματος είναι να γράφουμε τις $m!$ δυνατές
 κατανομές των m ατόμων στις m εργασίες, να βρούμε
 τη συνολική απόδοση καθεμιάς από αυτές και να
 επιλέξουμε εκείνη με τη μεγαλύτερη συνολική από-
 δωση. Αυτός ο τρόπος δεν συνιστάται αφού π.χ. για $m=8$
 έχουμε $8! = 40320$ μεταθέσεις.

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος ανάθεσης.
 Ορίζουμε τις 0-1 μεταβλητές x_{ij} , $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, m$
 ως:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν το άτομο } A_i \text{ χρησιμοποιείται} \\ & \text{στην εργασία } B_j, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε έχουμε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, i=1, 2, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, j=1, 2, \dots, m,$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ή } 1, i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, m.$$

Παρατηρούμε ότι οι περιορισμοί είναι της μορφής
 του προβλήματος μεταφοράς όταν $m=n$, $a_i = b_j = 1$
 $i, j = 1, \dots, m$, με τη μόνη διαφορά ότι η συνθήκη
 μη-αρνητικότητας των μεταβλητών αντικαθίσταται

από τη συνθήκη $x_{ij} = 0$ ή l . Λόγω της συμμε-
μετρικής κορφής του προβλήματος έχει αναπτυχθεί
ένας ειδικός αλγόριθμος για την εύρεση της βέλ-
τιστης λύσης του, ο λεγόμενος Ουγγρικός αλγό-
ριθμος. Έστω $C = (c_{ij})_{m \times m}$ ο πίνακας απόδοσης
του προβλήματος. Η εύρεση της βέλτιστης λύσης
ανάγεται στον προσδιορισμό η ανεξάρτητων στοι-
χείων του C δηλαδή η στοιχείων του C ένα μόνο
σε κάθε γραμμή και στήλη που το άθροισμά τους
να είναι μέγιστο. Αυτό αριθμώς επιτυγχάνει ο Ουγγρι-
κός αλγόριθμος. Ισχύει το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα: Ο μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων μηδε-
νικών ενός τετραγωνικού πίνακα C είναι ίσος με
τον ελάχιστο αριθμό ευθειών που απαιτούνται
για να διαγράψουμε όλα τα μηδενικά του C .

Παράδειγμα: Ας εξετάσουμε τον πίνακα:

$A = \begin{pmatrix} 8 & 0^* & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0^* & 6 \\ 1 & 1 & 0^* & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0^* & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C \\ C \\ C \\ C \end{matrix}$

Ο ελάχιστος αριθμός ευθειών που απαιτούνται για
να διαγράψουμε (καλύψουμε) όλα τα μηδενικά του
πίνακα είναι 4. Μία τέτοια ομάδα ευθειών έχει ση-
μειωθεί με C . Άρα, ο μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων
0 του πίνακα είναι επίσης 4. Μία τέτοια ομάδα από

μηδενικά έχει σφραγισθεί με αστερίσκους. ☒

Ο Ουγγρικός Αλγόριθμος: Τα βήματα του Ουγγρικού αλγόριθμου για την επίλυση του προβλήματος ανάθεσης είναι τα εξής:

1. Αφαιρούμε το μεγαλύτερο c_{ij} κάθε γραμμής από κάθε c_{ij} της αντίστοιχης γραμμής. Στο νέο tableau αφαιρούμε το μεγαλύτερο c_{ij} κάθε στήλης από κάθε c_{ij} της αντίστοιχης στήλης.

2. Με τον ελάχιστο αριθμό r ευθειών (οριζοντίων ή/και καθέτων) διαγράφουμε τα μηδενικά του τελευταίου tableau.

(2α) Αν $r=m$, τότε το αντίστοιχο tableau δίνει την άριστη λύση.

(2β) Αν $r < m$, πάμε στο επόμενο βήμα.

3. Αφαιρούμε το μεγαλύτερο μη διαγραφμένο c_{ij} από κάθε μη διαγραφμένο c_{ij} και το προσθέτουμε στα c_{ij} που είναι στη διασταύρωση δύο ευθειών.

4. Επιστρέφουμε στο Βήμα 2. ☒

Με βάση το Λήμμα και το Βήμα 2 θα υπάρχουν στο τελικό tableau $r=m$ ανεξάρτητα μηδενικά. Στις αντίστοιχες μεταβλητές x_{ij} δίνουμε την τιμή 1 και αυτό το σχέδιο καταμερισμού εργασίας είναι άριστο. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα: Η απόδοση τριών υποψηφίων A_1, A_2, A_3 για τρεις θέσεις B_1, B_2, B_3 δίνονται στον πίνακα:

	B_1	B_2	B_3
A_1	30	52	76
A_2	42	36	80
A_3	55	48	60

Πώς πρέπει να κατανεμηθούν οι υποψήφιοι στις θέσεις για να μεγιστοποιηθεί η συνολική απόδοση;

Λύση: 1) Εφαρμόζοντας το πρώτο βήμα του αλγορίθμου έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 30 & 52 & 76 \\ 42 & 36 & 80 \\ 55 & 48 & 60 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -46 & -24 & 0 \\ -38 & -44 & 0 \\ -5 & -12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -46 & -12 & 0 \\ -33 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Ο ελάχιστος αριθμός ευθειών με τις οποίες διαγράφουμε όλα τα 0 είναι $n=2 < m=3$, άρα το τρίτο tableau δεν δίνει άριστη λύση.

3) Από τα μη διαγραφέντα στοιχεία αφαιρούμε το μεγαλύτερο δηλαδή το -12 και το προσθέτουμε στο 0 της θέσης (3,3). Έτσι σχηματίζεται το tableau

$$\begin{pmatrix} -29 & 0^* & 0 \\ -21 & -20 & 0^* \\ 0^* & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Σ' αυτό το tableau, ο ελάχιστος αριθμός ευθειών

με τις οποίες διαγράφουμε όλα τα O είναι $r=3$.

Άρα υπάρχουν ακριβώς 3 ανεξάρτητα O . Μία ομάδα τέτοιων O και γάριστα η μοναδική συνεινέται με αστερίσκους. Άρα, η μοναδική άριστη λύση είναι: $x_{12}=1, x_{23}=1, x_{31}=1$, με συνολική απόδοση $R=52+80+55=187$. $\square$

