



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σημειώσεις για το μάθημα

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Θεοδόσης Δημητράκος

E-mail: dimitheo@aegean.gr

Δημιουργία και επιμέλεια του ηλεκτρονικού αρχείου

Χρήστος Πηλιχός

Απόφοιτος του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου

ΣΑΜΟΣ

2010

Περιεχόμενα

Πρόλογος	iii
Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή	1
Κεφάλαιο 2. Μορφοποίηση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού και εφαρμογές του	5
1. Εισαγωγή	5
2. Βασικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων Μαθηματικού Προγραμματισμού	5
3. Βασικές Υποθέσεις ενός μοντέλου Γραμμικού Προγραμματισμού	8
4. Εφαρμογές μορφοποίησης προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού	12
Κεφάλαιο 3. Γραφική επίλυση του προβλήματος Γ.Π. - Κανονική μορφή - Ιδιότητες των Λύσεων	23
1. Γραφική επίλυση μοντέλου Γραμμικού Προγραμματισμού	23
2. Ειδικές περιπτώσεις	26
3. Κανονική μορφή	30
4. Οι λύσεις του προβλήματος Γ.Π.	32
5. Ιδιότητες των λύσεων	35
Κεφάλαιο 4. Η μέθοδος Simplex	39
1. Εισαγωγή	39
2. Ο αλγόριθμος Simplex	39
3. Τεχνητές Μεταβλητές: Η μέθοδος M	44
4. Η μέθοδος των δύο φάσεων	46
Κεφάλαιο 5. Δυϊκό πρόβλημα και ανάλυση ευαισθησίας	49
1. Δυϊκό πρόβλημα	49
2. Οικονομική Ερμηνεία του δυϊκού προβλήματος Γ.Π.	50
3. Σχέσεις των λύσεων πρωτεύοντος (Π) και δυϊκού (Δ) προβλήματος Γ.Π.	56
4. Δυϊκή μέθοδος Simplex	57
5. Ανάλυση Ευαισθησίας	59
Κεφάλαιο 6. Δύο δημοφιλή προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού	63
1. Εισαγωγή	63
2. Το πρόβλημα της Μεταφοράς	63

3. Το πρόβλημα της Ανάθεσης	64
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΩΝ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ	67
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	67
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	69
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	72
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	79

Πρόλογος

Στις παρούσες σημειώσεις επιχειρείται η επιλογή του κατάλληλου υλικού για την κάλυψη των διδακτικών αναγκών ενός εισαγωγικού μαθήματος στο Γραμμικό Προγραμματισμό. Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζεται μία σύντομη περιγραφή της εξέλιξης της Επιχειρησιακής Έρευνας ως έναν από τους πλέον διαδεδομένους κλάδους των Μαθηματικών. Στο Κεφάλαιο 2 εισάγονται οι βασικές έννοιες του Γραμμικού Προγραμματισμού και παρουσιάζονται δημοφιλείς εφαρμογές του σε διάφορα πρόβληματα, οικονομικής κυρίως φύσεως. Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφεται η γραφική διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού σε δύο διαστάσεις. Επιπλέον, παρουσιάζεται η κανονική μορφή των προβλημάτων και οι ιδιότητες των λύσεών τους. Στο Κεφάλαιο 4 αναλύεται η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδος επίλυσης των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού, η μέθοδος Simplex, μαζί με δύο σημαντικές τροποποιήσεις της. Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται η δυϊκή θεωρία και η ανάλυση ευαισθησίας. Στο Κεφάλαιο 6 περιγράφονται δύο ειδικές κατηγορίες προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, το πρόβλημα της μεταφοράς και το πρόβλημα της εκχώρησης.

Μεγαλύτερη έμφαση έχει δοθεί στη μοντελοποίηση των προβλημάτων και στην παρουσίαση κατάλληλων παραδειγμάτων. Η αντίστοιχη μαθηματική θεωρία αναλύεται στο απόλυτα απαραίτητο επίπεδο. Η παρουσίαση επιλεγμένων αποδείξεων στο βασικό κείμενο σε συνδυασμό με την παρουσίαση κάποιων επιπρόσθετων αποδείξεων μαθηματικών αποτελεσμάτων που περιέχονται στο παράρτημα των σημειώσεων δημιουργεί ένα πλήρως αυτόνομο κείμενο.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον απόφοιτο του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου Χρήστο Πηλιχό για την προθυμία του να δημιουργήσει και να επιμεληθεί την ηλεκτρονική δακτυλογράφηση των παρόντων σημειώσεων.

Σάμος, Νοέμβριος 2010

Θ. Δ. Δημητράκος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming) είναι μία από τις πλέον δημοφιλείς τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας (Operations Research). Η Επιχειρησιακή Έρευνα μπορεί να οριστεί ως η εφαρμογή σύγχρονων μεθόδων λήψης αποφάσεων επιστημονικά θεμελιωμένων οι οποίες σκοπό έχουν την πιο αποτελεσματική χρησιμοποίηση των υπάρχοντων οικονομικών πόρων σε τεχνολογία, κεφαλαιακό εξοπλισμό και ανθρώπινο δυναμικό.

Η αρχική ώθηση για την ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας δόθηκε κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου. Τότε δημιουργήθηκαν στις συμμαχικές χώρες, επιστημονικές μονάδες που ασχολήθηκαν με έρευνα, σχετικά με κυρίως μαθηματικές τεχνικές για την επίτευξη του βέλτιστου δυνατού αποτελέσματος σε στρατιωτικές επιχειρήσεις. Με το τέλος του πολέμου, διαπιστώθηκε ότι αυτές οι τεχνικές μπορούσαν να εφαρμοσθούν επιτυχώς και στην οικονομική δραστηριότητα σχετικά με προβλήματα μεγιστοποίησης κέρδους ή ελαχιστοποίησης κόστους. Η ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών διευκόλυνε και διεύρυνε τις εφαρμογές αυτών των τεχνικών. Έτσι, στις μέρες μας, η Επιχειρησιακή Έρευνα βρίσκει πολλές εφαρμογές στην παραγωγή, στις μεταφορές, στο Μάρκετινγκ, στην Υγεία, στην Εκπαίδευση, στην Προστασία του Περιβάλλοντος, στην Οικονομία και αλλού. Αποτελεί αυτοτελή κλάδο των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών με μεγάλο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον.

Οι τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας έχουν αναπτυχθεί για να βοηθήσουν τα διευθυντικά στελέχη των επιχειρήσεων και των οργανισμών στη λήψη των αποφάσεων τους. Ειδικότερα, ο Γραμμικός Προγραμματισμός ασχολείται κυρίως με το πρόβλημα της βέλτιστης (άριστης) κατανομής των περιορισμένων (οικονομικών) πόρων μεταξύ ανταγωνιζόμενων δραστηριοτήτων. Δηλαδή, ο Γραμμικός Προγραμματισμός επικεντρώνεται στον εντοπισμό του βέλτιστου (άριсту) προγράμματος, με το οποίο κατανέμονται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο οι περιορισμένοι διαθέσιμοι πόροι μιας οικονομικής μονάδας στις ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες της, ώστε να ικανοποιηθούν οι προκαθορισμένοι στόχοι. Οι στόχοι ενός οργανισμού ή μιας επιχείρησης επιτυγχάνονται κάτω από συνθήκες οι οποίες υπαγορεύονται από περιορισμούς που πρέπει να ικανοποιούνται. Ορισμένοι από τους περιορισμούς αφορούν στους περιορισμένους διαθέσιμους πόρους της επιχείρησης, όπως είναι η εργασία, οι πρώτες ύλες, η δυναμικότητα του εξοπλισμού, τα διαθέσιμα κεφάλαια και άλλα. Υπάρχουν όμως περιορισμοί που προκύπτουν από άλλες αιτίες, όπως η ζήτηση των προϊόντων, η πολιτική της επιχείρησης, η μέθοδος χρηματοδότησης των δραστηριοτήτων της, οι κανονισμοί λειτουργίας, η νομοθεσία και άλλοι. Όσον αφορά στον όρο ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες, οι δραστηριότητες μιας επιχείρησης δεν σημαίνει ότι είναι οπωσδήποτε ανταγωνιστικές στην αγορά, αλλά ότι ανταγωνίζονται μεταξύ τους για την κατανάλωση των περιορισμένων διαθέσιμων πόρων.

Για παράδειγμα, εάν μία επιχείρηση παράγει πόρτες και παράθυρα, τα δύο αυτά προϊόντα, ενώ δεν είναι ανταγωνιστικά στην αγορά, ανταγωνίζονται μεταξύ τους για την κατανάλωση των διαθέσιμων πόρων της επιχείρησης, όπως τις πρώτες ύλες, την εργασία, την ενέργεια και την παραγωγική δυναμικότητα.

Η βέλτιστη απόφαση στην οποία οδηγεί ο Γραμμικός Προγραμματισμός αποσκοπεί στην μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση ενός κριτηρίου απόδοσης που μπορεί, για παράδειγμα, να είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους από τις πωλήσεις των προϊόντων, η μεγιστοποίηση του μεριδίου αγοράς, η ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής των προϊόντων μίας βιομηχανικής επιχείρησης, η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς ενός προϊόντος σε διάφορα κέντρα κατανάλωσης.

Η συστηματική μελέτη και η ανάπτυξη της μεθοδολογίας που διερευνά και επιλύει τα προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού οφείλεται κυρίως στον G. Dantzig κατά την περίοδο που ήταν επικεφαλής του Air Force Statistical Control's Analysis Branch στις Η.Π.Α.. Το έργο στο οποίο απασχολούνταν με την ομάδα του είχε την ονομασία Scientific Computation of Optimum Programs και στόχευε στην εγκαθίδρυση βέλτιστων μηχανισμών εκπαίδευσης, ανάπτυξης και συντήρησης στρατιωτικού υλικού και προσωπικού. Αυτά τα σχέδια τα αποκαλούσαν προγράμματα και μπορούσαν να εκφραστούν μαθηματικά με τη βοήθεια συστημάτων γραμμικών σχέσεων. Έτσι, είχαμε την ονομασία Γραμμικός Προγραμματισμός η οποία δεν έχει καμία σχέση με αυτό που ονομάζουμε προγραμματισμό ηλεκτρονικών υπολογιστών. Για πολλά χρόνια ο Γραμμικός Προγραμματισμός αποτελεί μία από τις πλέον γνωστές και ευρέως χρησιμοποιούμενες τεχνικές μοντελοποίησης και συνδράμει σημαντικά στη λήψη των αποφάσεων. Η επίλυση των προβλημάτων γίνεται συνήθως με τη μέθοδο Simplex η οποία θεωρείται μία από τις σημαντικότερες μαθηματικές μεθοδολογίες του 20^{ου} αιώνα. Η μέθοδος Simplex σε συνδυασμό με τη ραγδαία εξέλιξη των Η/Υ σε επίπεδο υλικού και λογισμικού έδωσε λύσεις σε θεμελιώδη προβλήματα μεγάλου μεγέθους για ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών.

Στόχος του μαθήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού, είναι να παρουσιάσουμε, όσον το δυνατόν πιο απλά, τις μεθοδολογίες και τις υπολογιστικές τεχνικές του Γραμμικού Προγραμματισμού σε διάφορες εφαρμογές που σχετίζονται με διάφορα επιστημονικά πεδία. Εκτός από τις παρούσες Σημειώσεις, ως βιβλία για περαιτέρω μελέτη, προτείνονται, μεταξύ άλλων, τα ακόλουθα:

Ελληνική Βιβλιογραφία:

- (1) Οικονόμου Γ. και Γεωργίου Α., Ποσοτική Ανάλυση για τη Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων, Τόμοι Α' και Β', Εκδόσεις Ε. Μπένου, Αθήνα, 2006 και 2000.
- (2) Λουκάκη Μ., Επιχειρησιακή Έρευνα, Τόμος Α', Γ' Έκδοση, Θεσσαλονίκη, Εκδοτικό Κέντρο Βόρειας Ελλάδας ΕΠΕ, 1994.
- (3) Βασιλείου Π.-Χ., Τσακλίδης Γ. και Τσάντας Ν.Δ., Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000.
- (4) Φακίνου Δ. και Οικονόμου Α., Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Θεωρία και Ασκήσεις, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2003.
- (5) Κουνιά Σ. και Φακίνου Δ., Γραμμικός Προγραμματισμός, Θεωρία και Ασκήσεις, Β' Έκδοση, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1993.

- (6) Δεσπότη Δ. Κ., Γραμμικός Προγραμματισμός, Μοντέλα Συστημάτων Υποστήριξης Αποφάσεων, Α' Έκδοση, Αθήνα, 2011.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία:

- (1) Anderson D.R., Sweeney D.J. and Williams T.A., Linear Programming for Decision Making, St. Paul, Minn., West, 1974.
- (2) Kolman B. and Beck R.E., Elementary Linear Programming with Applications, 2nd Edition, Academic Press, San Diego, 1995.
- (3) Sukin H.M. and Saha J., Studies in Linear Programming, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.
- (4) Taha H.A., Operations Research: An Introduction, 5th Edition, MacMillan, New York, 1992.
- (5) Winston W.L., Operations Research: Applications and Algorithms, 3rd Edition, Duxbury Press, Belmont, California, 1994.

Μορφοποίηση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού και εφαρμογές του

1. Εισαγωγή

Μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων Επιχειρησιακής Έρευνας είναι τα προβλήματα βελτιστοποίησης (optimization problems). Αυτά αναφέρονται στη μεγιστοποίηση (maximization) ή ελαχιστοποίηση (minimization) μίας ή περισσότερων συναρτήσεων ενός αριθμού μεταβλητών οι τιμές των οποίων ικανοποιούν ένα σύνολο περιορισμών (constraints). Τα προβλήματα βελτιστοποίησης διακρίνονται σε προβλήματα κλασσικής βελτιστοποίησης (classical optimization) και προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού (mathematical programming). Η βασική διαφορά που διακρίνει τα προβλήματα κλασσικής βελτιστοποίησης από τα προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού αναφέρεται στο είδος και τη φύση των περιορισμών. Στα προβλήματα κλασσικής βελτιστοποίησης το σύνολο των περιορισμών αποτελείται μόνο από εξισώσεις και οι μέθοδοι επίλυσης τους χρησιμοποιούν εργαλεία της κλασσικής Μαθηματικής Ανάλυσης, δηλαδή του Διαφορικού και του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Αντίθετα, στα προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού το σύνολο των περιορισμών περιλαμβάνει εκτός των εξισώσεων και ανισότητες.

Τα τελευταία 35-50 χρόνια παρουσιάστηκαν πολλά καινούργια και ενδιαφέροντα πρακτικά προβλήματα οικονομικής κυρίως βελτιστοποίησης. Αυτά τα προβλήματα χαρακτηρίστηκαν προβλήματα Μαθηματικού Προγραμματισμού και η επίλυσή τους δεν μπορούσε να γίνει με τις τεχνικές των κλασσικών μεθόδων βελτιστοποίησης.

2. Βασικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων Μαθηματικού Προγραμματισμού

Μαθηματικός Προγραμματισμός είναι το σύνολο των μεθόδων και υπολογιστικών τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μίας κατηγορίας προβλημάτων βελτιστοποίησης. Τα προβλήματα αυτά περιγράφονται με τη βοήθεια ενός μαθηματικού μοντέλου που αποτελείται από μία πραγματική συνάρτηση της οποίας ζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο και από μία ομάδα συνθηκών (περιορισμών) που πρέπει να ικανοποιούν οι μεταβλητές της συνάρτησης. Όταν αυτές εκφράζονται από γραμμικές σχέσεις, έχουμε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού (π.γ.π.). Ως μοντέλο (model) θα θεωρήσουμε μία αναπαράσταση ή απεικόνιση των πλέον σημαντικών χαρακτηριστικών ενός συστήματος, με την οποία μπορούμε με ευχέρεια να το αναλύσουμε. Η μακέτα ενός κτιρίου, το διάγραμμα διαδρομών ενός μεταφορικού μέσου ή ακόμα ένα σύστημα εξισώσεων που περιγράφει τη λειτουργία μίας επιχείρησης αποτελούν διαφορετικές περιπτώσεις μοντέλων.

Τα κύρια χαρακτηριστικά στοιχεία κάθε μοντέλου μαθηματικού προγραμματισμού είναι:

- (1) Υπάρχει ένα σύνολο δραστηριοτήτων έστω $J = \{1, 2, \dots, n\}$ που μπορεί να είναι παραγωγή προϊόντων, παροχή διαφόρων ειδών υπηρεσιών κ.τ.λ.. Σε κάθε δραστηριότητα $j \in J$ αντιστοιχεί μία μεταβλητή έστω x_j και μας δείχνει το ύψος παραγωγής της δραστηριότητας j . Αυτές οι μεταβλητές καλούνται και μεταβλητές αποφάσεων (decision variables) ή μεταβλητές πολιτικής (policy variables).
- (2) Έχουμε ένα σύνολο οικονομικών πόρων ή μέσων $I = \{0, \dots, m\}$ που διατίθενται σε περιορισμένες ποσότητες για την εκτέλεση των δραστηριοτήτων. Αυτοί οι πόροι μπορεί να είναι πρώτες ύλες, διάφορα βοηθητικά υλικά, μηχανολογικός εξοπλισμός, αποθηκευτικοί χώροι, εργατοώρες και γενικά οποιοσδήποτε συντελεστής παραγωγής ο οποίος είναι απαραίτητος για την εκτέλεση του συνόλου δραστηριοτήτων J .
- (3) Υπάρχει ένα σύνολο αντικειμενικών συναρτήσεων (objective functions), η βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση-ελαχιστοποίηση) των οποίων επιδιώκεται από την επίλυση του προβλήματος του Μαθηματικού Προγραμματισμού.

Ανάλογα με το εάν έχουμε μία ή περισσότερες της μίας αντικειμενικές συναρτήσεις έχουμε τις περιπτώσεις του μονοκριτηριακού μαθηματικού προγραμματισμού (single objective mathematical programming) ή πολυκριτηριακού μαθηματικού προγραμματισμού (multi-objective mathematical programming). Η έννοια του προγραμματισμού είναι ταυτόσημη με την έννοια της επιλογής. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον δραστηριότητες που θα λειτουργούν σε συνθήκες ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης και το σύνολο των περιορισμών δεν θα πρέπει να παρέχει αλληλοαποκλειόμενους περιορισμούς.

Το γενικό πρόβλημα του μαθηματικού προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Δίνεται μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(\underline{x})$ και ένα σύνολο $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Επιθυμούμε να βρεθεί (εάν υπάρχει)

$$\underline{x}^* \in F : f(\underline{x}^*) = \max \{ f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in F \}$$

$$\text{ή } f(\underline{x}^*) = \min \{ f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in F \}$$

Λόγω της ταυτότητας $\min f(\underline{x}) = -\max (-f(\underline{x}))$, κάθε πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μεγιστοποίησης. Η $f(\underline{x})$ καλείται αντικειμενική συνάρτηση, το σύνολο F καλείται εφικτή περιοχή και τα σημεία του F λέγονται εφικτές λύσεις του προβλήματος. Άριστη ή βέλτιστη λύση $\underline{x}^*$ καλείται κάθε εφικτή λύση που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί την $f(\underline{x})$. Εάν η αντικειμενική συνάρτηση των μεταβλητών $x_1, x_2, \dots, x_n$ και η εφικτή περιοχή F εκφράζεται από γραμμικούς περιορισμούς (εξισώσεις ή ανισώσεις) ως προς τις μεταβλητές, τότε έχουμε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού (π.γ.π.). Έτσι το γενικό π.γ.π. έχει την εξής μαθηματική διατύπωση:

$$\text{Να βρεθεί η: } z = \begin{matrix} \max \\ (\min) \end{matrix} (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n)$$

$$\begin{aligned} \text{όταν } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq, =, \geq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq, =, \geq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq, =, \geq b_m \end{aligned}$$

όπου c_j, b_i, a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ πραγματικές σταθερές.

Συνήθως, υποθέτουμε ότι: $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Οι συντελεστές c_j , $j = 1, \dots, n$ αναφέρονται ως συντελεστές κέρδους (ή κόστους) ενώ η τελευταία συνθήκη αναφέρεται ως συνθήκη μη-αρνητικότητας των μεταβλητών. Ανάλογα με τις διάφορες μορφές της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιοριστικών συναρτήσεων ο μαθηματικός προγραμματισμός ταξινομείται στις εξής κατηγορίες:

- (1) Γραμμικός Προγραμματισμός (linear programming) όπου η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιοριστικές συναρτήσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις.
- (2) Μη-γραμμικός Προγραμματισμός (non-linear programming) όπου από τις περιοριστικές συναρτήσεις και την αντικειμενική συνάρτηση τουλάχιστον μία συνάρτηση είναι μη-γραμμική.
- (3) Ακέραιος Προγραμματισμός (Integer Programming) όπου όλες οι μεταβλητές του προβλήματος παίρνουν ακέραιες μόνο τιμές. Προφανώς ο ακέραιος προγραμματισμός μπορεί να είναι γραμμικός ή μη-γραμμικός.
- (4) Μικτός ακέραιος Προγραμματισμός (Mixed Integer Programming) όπου κάποιες μεταβλητές παίρνουν ακέραιες τιμές και οι υπόλοιπες μεταβλητές είναι συνεχείς. Προφανώς μπορεί να έχουμε Μικτό ακέραιο γραμμικό προγραμματισμό ή Μικτό ακέραιο μη-γραμμικό προγραμματισμό.

Εάν όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις ή ανισώσεις της ίδιας φοράς, το π.γ.π. μπορεί, πιο συνοπτικά, με μορφή πινάκων να γραφεί ως εξής:

$$z = \begin{matrix} \max \\ (\min) \end{matrix} \underline{c}' \underline{x}$$

$$A\underline{x} \leq, =, \geq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

$$\text{με } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$$

όπου $\underline{c}' = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ και $M_{m \times n}$ είναι το σύνολο των $m \times n$ πινάκων.

3. Βασικές Υποθέσεις ενός μοντέλου Γραμμικού Προγραμματισμού

Για να διαπιστώσουμε κατά πόσο ένα μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού εφαρμόζεται ικανοποιητικά στο υπό εξέταση πρόβλημα, θα αναφερθούμε στις υποθέσεις που διέπουν τα μοντέλα του Γραμμικού Προγραμματισμού, μέσω ενός παραδείγματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1 (Άριστη επιλογή προϊόντων). Έστω ότι παράγουμε τα προϊόντα Π_1, Π_2 και Π_3 το κέρδος κάθε πωλούμενης μονάδας των οποίων είναι ίσο με 5, 11 και 8 νομισματικές μονάδες, αντίστοιχα. Η τιμή πώλησης της μονάδας των Π_1, Π_2 και Π_3 είναι 23, 18 και 25 νομισματικές μονάδες, αντίστοιχα. Χρησιμοποιούνται οι διαδικασίες της κοπής, της συναρμολόγησης και της βαφής των προϊόντων. Η παραγωγή κάθε μονάδας από τα προϊόντα Π_1, Π_2 και Π_3 απαιτεί ορισμένες εργατοώρες από τις διαδικασίες αυτές οι οποίες συνοψίζονται στο πίνακα:

Εργασίες	Π_1	Π_2	Π_3	Διαθέσιμες εργατοώρες
Κοπή	15	28	5	5500
Συναρμολόγηση	3	4	11	13100
Βαφή	19	22	6	3600

Η παραγωγή της μονάδας των Π_1, Π_2 και Π_3 χρησιμοποιεί τις πρώτες ύλες $\Pi Y_1, \Pi Y_2, \Pi Y_3$ και ΠY_4 σε ποσότητες που δίνονται στον πίνακα:

	Π_1	Π_2	Π_3	Διαθέσιμες ποσότητες
ΠY_1	2	5	3	125
ΠY_2	1	2	5	212
ΠY_3	4	3	1	167
ΠY_4	7	1	10	265

Έρευνα αγοράς έδειξε ότι τα ανώτατα όρια στην προηγούμενη ποσότητα των Π_1, Π_2 και Π_3 είναι 95, 110 και 80 μονάδες, αντίστοιχα. Επιθυμητά κατώτατα όρια στις πωλήσεις των Π_1, Π_2 και Π_3 είναι 40, 60, 35 μονάδες, αντίστοιχα. Ζητείται να προσδιοριστούν οι παραγόμενες ποσότητες των Π_1, Π_2 και Π_3 ώστε να μην παραβιάζονται οι περιορισμοί του προβλήματος, να επιτυγχάνεται ένα ελάχιστο κέρδος 50 νομισματικών μονάδων και να μεγιστοποιούνται τα συνολικά έσοδα.

ΛΥΣΗ 1. Κατασκευάζουμε το σύνολο των μεταβλητών του προβλήματος. Ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός των επιπέδων παραγωγής των προϊόντων Π_1, Π_2 και Π_3 συνεπώς εισάγουμε τις εξής μεταβλητές:

x_1 = Ποσότητα προϊόντος Π_1 που θα παραχθεί.

x_2 = Ποσότητα προϊόντος Π_2 που θα παραχθεί.

x_3 = Ποσότητα προϊόντος Π_3 που θα παραχθεί.

Σε κάθε μεταβλητή αντιστοιχεί μία δραστηριότητα.

Στο παράδειγμα, οι τρεις δραστηριότητες που συνοδεύουν τις μεταβλητές x_1, x_2, x_3 είναι:

Δραστηριότητα 1: Παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος Π_1 .

Δραστηριότητα 2: Παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος Π_2 .

Δραστηριότητα 3: Παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος Π_3 .

Η τιμή της μεταβλητής x_j , $j = 1, 2, 3$ παριστάνει το επίπεδο εκτέλεσης της δραστηριότητας j , $j = 1, 2, 3$.

Για τη μορφοποίηση ενός προβλήματος σε πρόβλημα Γ.Π. γίνονται οι εξής υποθέσεις:

- (1) Υπόθεση της αναλογικότητας (*proportionality assumption*). Με την υπόθεση αυτή, εάν απαιτούνται 2 μονάδες πρώτης ύλης για την παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος Π_1 , τότε $2 \cdot x_1$ μονάδες πρώτης ύλης απαιτούνται για την παραγωγή x_1 μονάδων προϊόντος Π_1 για κάθε $x_1 \geq 0$. Γενικά, η υπόθεση της αναλογικότητας εξασφαλίζει ότι εάν a_{ij} μονάδες του πόρου i καταναλώνονται ($a_{ij} > 0$) ή παράγονται ($a_{ij} < 0$) για την εκτέλεση της δραστηριότητας j σε επίπεδο μονάδας, τότε $a_{ij}x_j$ μονάδες καταναλώνονται ή παράγονται για την εκτέλεση της δραστηριότητας j σε επίπεδο x_j για κάθε $x_j \geq 0$. Ομοίως, εάν c_j είναι το κέρδος μονάδας της δραστηριότητας j τότε c_jx_j είναι η συμβολή της δραστηριότητας j στο ολικό κέρδος για κάθε $x_j \geq 0$.
- (2) Υπόθεση της Προσθετικότητας (*additivity assumption*). Με την υπόθεση αυτή, εάν απαιτούνται $2x_1$ μονάδες πρώτης ύλης ΠY_1 για την παραγωγή ΠY_1 μονάδων προϊόντος Π_1 , $5x_2$ μονάδες πρώτης ύλης ΠY_1 για την παραγωγή x_2 μονάδων προϊόντος Π_2 και $3x_3$ μονάδες πρώτης ύλης ΠY_1 για την παραγωγή x_3 μονάδων προϊόντος Π_3 τότε $2x_1 + 5x_2 + 3x_3$ μονάδες πρώτης ύλης ΠY_1 απαιτούνται για την παραγωγή x_1 μονάδων προϊόντος Π_1 , x_2 μονάδων προϊόντος Π_2 και x_3 μονάδων προϊόντος Π_3 για κάθε $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$. Η υπόθεση της προσθετικότητας συνεπάγεται ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι διαχωρίσιμη ως προς τις μεταβλητές (*separable in the variables*). Δηλαδή, η αντικειμενική συνάρτηση $z(\underline{x}) = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα n συναρτήσεων κάθε μία από τις οποίες περιλαμβάνει μία μεταβλητή. Είναι δηλαδή

$$z(x_1, x_2, \dots, x_n) = z_1(x_1) + \dots + z_n(x_n).$$

Η υπόθεση της αναλογικότητας μαζί με την υπόθεση της προσθετικότητας είναι γνωστή ως υπόθεση της γραμμικότητας (*linearity assumption*).

- (3) Υπόθεση της συνέχειας στις τιμές των μεταβλητών (*continuity of variation assumption*). Κάθε μεταβλητή του προβλήματος μπορεί να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές στο διάστημα μεταβολής της. Δηλαδή το πεδίο ορισμού κάθε μεταβλητής ενός προβλήματος Γ.Π. είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών. Αυτή η υπόθεση εναλλακτικά καλείται υπόθεση της διαιρετότητας (*divisibility assumption*).
- (4) Υπόθεση της προσδιοριστικότητας (*certainty assumption*). Το πρόβλημα είναι προσδιοριστικό (*deterministic*) όταν γνωρίζουμε με **βεβαιότητα** τις τιμές των παραμέτρων, δηλαδή των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης, των συντελεστών των περιορισμών και τα δεξιά μέλη των περιορισμών. Αυτό σημαίνει ότι αυτές οι τιμές δεν καθορίζονται από κάποιες πιθανοθεωρητικές κατανομές. Στην

πραγματικότητα, είναι πρακτικά αδύνατο να ισχύει η προσδιοριστικότητα από την φύση του προβλήματος. Οι τιμές των παραμέτρων μπορούν πράγματι να είναι γνωστές σταθερές, π.χ. ακριβώς ένα λίτρο γάλα χρησιμοποιείται στη συνταγή ενός παγωτού. Ακόμα και στην περίπτωση αυτή όμως το ένα λίτρο υπόκειται σε κάποια ίσως αμελητέα αλλά όχι μηδενική διακύμανση. Επομένως, το ένα λίτρο είναι μία μέση τιμή πιθανότατα με μικρή διακύμανση. Αυτό που τελικά γίνεται στα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού, είναι να χρησιμοποιούμε τις εκτιμήσεις ή τις προβλέψεις των τιμών των παραμέτρων ως γνωστές σταθερές και επομένως να ισχύει η προσδιοριστικότητα. Γι' αυτό το λόγο μετά την επίλυση ενός προβλήματος είναι πολύ σημαντική η ανάλυση ευαισθησίας (*sensitivity analysis*) που ακολουθεί, μέσω της οποίας διερευνάται η ευαισθησία των παραμέτρων, δηλαδή κατά πόσο μικρές ή μεγαλύτερες μεταβολές στις τιμές τους επηρεάζουν σημαντικά τη βέλτιστη λύση.

Στη συνέχεια της μορφοποίησης του προβλήματος ως ένα πρόβλημα Γ.Π. κατασκευάζουμε το σύνολο των περιορισμών του προβλήματος. Οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενοι περιορισμοί είναι:

(α') Περιορισμοί μη-αρνητικότητας (*non-negativity constraints*). Π.χ. δεν νοείται η παραγωγή αρνητικών ποσοτήτων ενός προϊόντος. Στο παράδειγμά μας, έχουμε

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(β') Περιορισμοί παραγωγικής δυναμικότητας (*productive capacity constraints*). Προέρχονται από τα ανώτατα όρια των πόρων που διατίθενται στην εκτέλεση των διάφορων παραγωγικών διαδικασιών. Τέτοιοι πόροι, μπορεί να είναι μηχανολογικός εξοπλισμός, αποθηκευτικοί χώροι, διάφορα είδη ανθρώπινου δυναμικού κ.λ.π., π.χ. οι περιορισμοί που αντιστοιχούν στις διαδικασίες της κοπής, της συναρμολόγησης και της βαφής έχουν ως εξής: οι εργατοώρες που χρησιμοποιούνται για την κοπή, τη συναρμολόγηση και τη βαφή για να παραχθούν x_1 μονάδες προϊόντος Π_1 , x_2 μονάδες προϊόντος Π_2 και x_3 μονάδες προϊόντος Π_3 είναι:

$$15x_1 + 28x_2 + 5x_3, \quad 3x_1 + 4x_2 + 11x_3, \quad 19x_1 + 22x_2 + 6x_3$$

αντίστοιχα. Οι ποσότητες αυτές δεν μπορεί να υπερβαίνουν τις διαθέσιμες εργατοώρες των 5500, 13100 και 3600 για κοπή, συναρμολόγηση και βαφή, αντίστοιχα. Προκύπτουν έτσι οι περιορισμοί:

$$15x_1 + 28x_2 + 5x_3 \leq 5500$$

$$3x_1 + 4x_2 + 11x_3 \leq 13100$$

$$19x_1 + 22x_2 + 6x_3 \leq 3600$$

(γ') Περιορισμοί υλικών και πρώτων υλών παραγωγής (*raw materials constraints*). Οι περιορισμοί αυτοί προέρχονται από τα ανώτατα όρια στις διαθέσιμες ποσότητες πρώτων και βοηθητικών υλών παραγωγής. Στο παράδειγμά μας, οι περιορισμοί αυτοί είναι:

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 125 \quad , \quad x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 212$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 167 \quad , \quad 7x_1 + x_2 + 10x_3 \leq 265$$

Οι περιορισμοί παραγωγικής δυναμικότητας και οι περιορισμοί πρώτων και βοηθητικών υλών παρέχονται από τις περιορισμένες ποσότητες των διαθέσιμων πόρων και γι' αυτό αποτελούν συχνά την ίδια κατηγορία περιορισμών και αναφέρονται ως τεχνολογικοί περιορισμοί (*technological constraints*). Σε κάθε πόρο μπορεί να τεθεί είτε μία απαίτηση είτε ένα όριο ή και τα δύο στη διαθεσιμότητα του. Δηλαδή κάθε διαθέσιμος πόρος μπορεί να περιοριστεί είτε με ένα ανώτατο όριο ή με ένα κατώτατο όριο ή και με τα δύο.

(δ') Περιορισμοί αγοράς (*market constraints*). Οι περιορισμοί αυτοί εκφράζουν συνήθως τις διάφορες συνθήκες που επικρατούν στην αγορά των προϊόντων που παράγει η επιχείρηση, π.χ.: στο παράδειγμά μας, οι περιορισμοί αυτοί είναι τα ανώτατα όρια στην πωλούμενη ποσότητα των προϊόντων Π_1, Π_2 και Π_3 . Έχουμε δηλαδή τους περιορισμούς $x_1 \leq 95$, $x_2 \leq 110$, $x_3 \leq 80$.

(ε') Περιορισμοί πολιτικής (*policy constraints*). Οι περιορισμοί αυτοί εκφράζουν διάφορους επιθυμητούς στόχους οι οποίοι συνήθως αναφέρονται στις λειτουργίες της παραγωγής ή της αγοράς, π.χ.: η εξασφάλιση του κατώτατου ορίου των 50 νομισματικών μονάδων κερδών εκφράζεται με την ανισότητα $5x_1 + 11x_2 + 8x_3 \geq 50$. Τα επιθυμητά κατώτατα όρια των 40, 60 και 35 μονάδων στις πωλήσεις των προϊόντων Π_1, Π_2 και Π_3 αντίστοιχα ενσωματώνονται στους περιορισμούς $x_1 \geq 40$, $x_2 \geq 60$, $x_3 \geq 35$.

Οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες αντικειμενικές συναρτήσεις που εκφράζονται σε προβλήματα βελτιστοποίησης της λειτουργίας μίας επιχείρησης ή ενός οργανισμού είναι:

- (1) Μεγιστοποίηση κέρδους (*profit maximization*)
- (2) Ελαχιστοποίηση κόστους (*cost minimization*) και
- (3) Μεγιστοποίηση χρησιμότητας (*utility maximization*).

Η εκτέλεση κάθε δραστηριότητας $j \in J$ σε επίπεδο μονάδας επιφέρει ένα αποτέλεσμα που συμβολίζουμε με c_j . Το τί παριστάνει το c_j καθώς και η μονάδα μέτρησής του εξαρτώνται προφανώς από το είδος της αντικειμενικής συνάρτησης που βελτιστοποιείται. Π.χ.: στο παράδειγμά μας, στο οποίο ζητείται η μεγιστοποίηση των εσόδων από τις πωλήσεις, έχουμε: $c_1 = 23$, $c_2 = 18$, $c_3 = 25$ νομισματικές μονάδες. Το πρόβλημα βέλτιστης επιλογής των προϊόντων μορφοποιείται ως ένα πρόβλημα Γ.Π. ως εξής:

Μέγιστο της $z(x_1, x_2, x_3) = 23x_1 + 18x_2 + 25x_3$

με περιορισμούς:

$$\left. \begin{array}{l} 15x_1 + 28x_2 + 5x_3 \leq 5500 \\ 3x_1 + 4x_2 + 11x_3 \leq 13100 \\ 19x_1 + 22x_2 + 6x_3 \leq 3600 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 125 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 212 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 167 \\ 7x_1 + x_2 + 10x_3 \leq 265 \end{array} \right\} \text{Τεχνολογικοί περιορισμοί}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \left. \begin{array}{l} x_1 \leq 95 \\ x_2 \leq 110 \\ x_3 \leq 80 \end{array} \right\} & \text{Περιορισμοί αγοράς} & \\
 \left. \begin{array}{l} x_1 \geq 40 \\ x_2 \geq 60 \\ x_3 \geq 35 \end{array} \right\} & \text{Περιορισμοί πολιτικής} & \\
 5x_1 + 11x_2 + 8x_3 \geq 50 & & \\
 x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \text{Περιορισμοί μη-αρνητικότητας.} &
 \end{array}$$

4. Εφαρμογές μορφοποίησης προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Σε αυτό το εδάφιο θα παρουσιάσουμε μερικά παραδείγματα τα οποία θα διαμορφώσουμε ως προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού, για να δείξουμε το ευρύ πεδίο εφαρμογών του Γραμμικού Προγραμματισμού αλλά και τον τρόπο μοντελοποίησης του αντίστοιχου μοντέλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1 (Πρόβλημα Δίαιτας - (Diet Problem)). Στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε τη βέλτιστη κατανομή των τροφίμων ώστε να εντοπίσουμε εκείνο το διαιτολόγιο που πληρεί συγκεκριμένες διατροφικές προδιαγραφές με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Αποτελεί σημαντικό πρόβλημα για ιδρύματα στα οποία σιτίζεται μεγάλο πλήθος ατόμων, όπως π.χ. νοσοκομεία, εκπαιδευτικές μονάδες, φυλακές, στρατώνες και άλλα. Μια επιχείρηση τροφίμων παράγει μία μεγάλη ποικιλία ζωοτροφών και πρόκειται να εισάγει στην αγορά μία νέα ζωοτροφή. Το νέο προϊόν πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένες διατροφικές προδιαγραφές σε βιταμίνες, πρωτεΐνες και θερμίδες. Ειδικότερα, μία μονάδα ζωοτροφής (π.χ. μία κονσέρβα ενός κιλού) πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 80 μονάδες βιταμίνης A, 100 μονάδες βιταμίνης C, 60 μονάδες βιταμίνης E, 26 μονάδες πρωτεϊνών και το πολύ 2300 θερμίδες. Η παρασκευή της ζωοτροφής μπορεί να γίνει με ανάμειξη τεσσάρων το πολύ βασικών συστατικών καθένα από τα οποία περιέχει έναν αριθμό διατροφικών στοιχείων τα οποία δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Στον πίνακα δίνεται επίσης και το κόστος κάθε μονάδας βασικού συστατικού. Στόχος του προβλήματος είναι ο προσδιορισμός των ποσοτήτων που πρέπει να αναμειχθούν από κάθε συστατικό, ώστε να παρουσιαστεί με το μικρότερο δυνατό κόστος η νέα ζωοτροφή που ικανοποιεί τις συγκεκριμένες διατροφικές προδιαγραφές.

Απαιτούμενο διατροφικό στοιχείο	Αριθμός διατροφικών στοιχείων ανά μονάδα συστατικού				Διατροφική απαίτηση ανά μονάδα ζωοτροφής
	1	2	3	4	
Βιταμίνη A	80	115	100	90	≥ 80
Βιταμίνη C	110	90	85	100	≥ 100
Βιταμίνη E	50	70	105	80	≥ 60
Πρωτεΐνες	250	300	210	240	≥ 260
Θερμίδες	480	510	470	530	≤ 2300
Κόστος/μον. συστ. (σε νομισματικές μονάδες)	180	160	145	200	

ΛΥΣΗ 2. Για να διαμορφώσουμε το πρόβλημα ως μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού, έστω x_j , $j = 1, 2, 3, 4$ η ποσότητα του συστατικού j που αναμειγνύεται για την παρασκευή μίας μονάδας ζωοτροφής (κονσέρβα ενός κιλού). Η αντικειμενική συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το κόστος παραγωγής ενός κιλού ζωοτροφής είναι:

$$\min z = 180x_1 + 160x_2 + 145x_3 + 200x_4$$

Ο περιορισμός σχετικά με τη διατροφική απαίτηση της ζωοτροφής σε βιταμίνη A είναι:

$$80x_1 + 115x_2 + 100x_3 + 90x_4 \geq 80 \text{ (βιταμίνη A)}$$

Ο περιορισμός σχετικά με τη διατροφική απαίτηση της ζωοτροφής σε βιταμίνη C είναι:

$$110x_1 + 90x_2 + 85x_3 + 100x_4 \geq 100 \text{ (βιταμίνη C)}$$

Ο περιορισμός σχετικά με τη διατροφική απαίτηση της ζωοτροφής σε βιταμίνη E είναι:

$$50x_1 + 70x_2 + 105x_3 + 80x_4 \geq 60 \text{ (βιταμίνη E)}$$

Ο περιορισμός σχετικά με τη διατροφική απαίτηση της ζωοτροφής σε πρωτεΐνες είναι:

$$250x_1 + 300x_2 + 210x_3 + 240x_4 \geq 260 \text{ (πρωτεΐνες)}$$

Ο περιορισμός σχετικά με τη διατροφική απαίτηση της ζωοτροφής σε θερμίδες είναι:

$$480x_1 + 510x_2 + 470x_3 + 530x_4 \leq 2300 \text{ (θερμίδες)}$$

Τέλος, υπάρχει ο περιορισμός σύμφωνα με τον οποίον το άθροισμα των ποσοτήτων των τεσσάρων συστατικών είναι ίσο με ένα κιλό ζωοτροφής που παράγεται, δηλαδή, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Συνεπώς, το μοντέλο του Γραμμικού Προγραμματισμού, που ελαχιστοποιεί το κόστος παραγωγής της ζωοτροφής λαμβάνοντας υπόψη τις διατροφικές απαιτήσεις του προϊόντος και την επεξεργασία των συστατικών, είναι:

$$\min z = 180x_1 + 160x_2 + 145x_3 + 200x_4$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 80x_1 + 115x_2 + 100x_3 + 90x_4 &\geq 80 \\ 110x_1 + 90x_2 + 85x_3 + 100x_4 &\geq 100 \\ 50x_1 + 70x_2 + 105x_3 + 80x_4 &\geq 60 \\ 250x_1 + 300x_2 + 210x_3 + 240x_4 &\geq 260 \\ 480x_1 + 510x_2 + 470x_3 + 530x_4 &\leq 2300 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Η βέλτιστη λύση είναι: $x_1 = 0,537$, $x_2 = 0,317$, $x_3 = 0,146$ και $x_4 = 0$. Για την παρασκευή ενός κιλού ζωοτροφής θα χρησιμοποιηθούν 537 γραμμάρια του συστατικού 1, 317 γραμμάρια του συστατικού 2, 146 γραμμάρια του συστατικού 3 και καθόλου από το συστατικό 4. Το ελάχιστο κόστος παραγωγής ενός κιλού είναι: 168,55 νομισματικές μονάδες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2 (Πρόβλημα Μείξης - Blending Problem). Το πρόβλημα αυτό έχει τις ρίζες του στη βιομηχανία διύλισης και αναφέρεται στον προσδιορισμό του βέλτιστου προγράμματος μείξης διαφορετικών πρώτων υλών για την παραγωγή καυσίμων με συγκεκριμένες ιδιότητες. Το πρόβλημα αφορά τον εντοπισμό εκείνης της συνταγής σύμφωνα με την οποία αναμειγνύονται διαφορετικά προϊόντα πετρελαίου προκειμένου να δώσουν ένα βελτιωμένο μέγμα με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Παρόμοιες εφαρμογές υπάρχουν στις χημικές βιομηχανίες, στη βιομηχανία τροφίμων, στη μεταλλουργία και αλλού.

Ένα διυλιστήριο παράγει μεταξύ άλλων προϊόντων και τρία είδη βενζίνης, τη *super*, την αμόλυβδη και τη *super* αμόλυβδη. Αυτά τα προϊόντα παράγονται από τη μείξη τριών το πολύ κυρίων συστατικών A , B και Γ . Για κάθε κύριο συστατικό, ο αριθμός των οκτανίων, το κόστος του τόνου, καθώς και η μέγιστη ημερήσια ποσότητα σε τόνους που μπορεί να έχει στη διάθεσή του το διυλιστήριο δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Κύριο Συστατικό	Αριθμός Οκτανίων	Κόστος ανά τόνο	Μέγιστη ημερήσια διαθέσιμη ποσότητα (τόνοι)
Δεδομένα προσφοράς	A	120	38	1000
	B	90	42	1200
	Γ	130	105	700

Κάθε είδος βενζίνης πρέπει να ικανοποιεί έναν ελάχιστο αριθμό οκτανίων. Για κάθε προϊόν, ο ελάχιστος αριθμός οκτανίων, η τιμή πώλησης της βενζίνης καθώς και η ελάχιστη ημερήσια ζήτηση σε τόνους δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	Βενζίνη	Ελάχιστος αριθμός οκτανίων	Τιμή ανά τόνο	Ημερήσια ζήτηση (τόνοι)
Δεδομένα ζήτησης	Super	94	85	800
	Αμόλυβδη	92	80	1100
	Super αμόλυβδη	96	88	500

Η διοίκηση του διυλιστηρίου ενδιαφέρεται να προσδιορίσει τις ποσότητες από το κάθε συστατικό για την παραγωγή των τριών προϊόντων ώστε να μεγιστοποιήσει τη συνολική ημερήσια συνεισφορά στο κέρδος λαμβάνοντας υπόψη τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό οκτανίων κάθε προϊόντος, τις διαθέσιμες ποσότητες των κυρίων συστατικών και τις ελάχιστες ζητούμενες ποσότητες των τριών ειδών βενζίνης.

ΛΥΣΗ 3. Υποθέτουμε ότι η περίοδος προγραμματισμού είναι η μία ημέρα και ότι όλες οι ποσότητες της βενζίνης που παράγονται κατά τη διάρκεια της ημέρας από τη μείξη των τριών συστατικών πωλούνται την ίδια ημέρα. Για να διαμορφώσουμε το πρόβλημα ως μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες μεταβλητές απόφασης:

x_{ij} := ποσότητα συστατικού i που αναμεγνύεται για την παραγωγή του προϊόντος j .

$$i = A, B, \Gamma \quad j = 1, 2, 3$$

και $j = 1$ -βενζίνη super, $j = 2$ -βενζίνη αμόλυβδη, $j = 3$ -βενζίνη super αμόλυβδη. Είναι:

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} \quad := \quad \text{ημερήσια χρησιμοποιούμενη ποσότητα συστατικού A}$$

$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \quad := \quad \text{ημερήσια χρησιμοποιούμενη ποσότητα συστατικού B}$$

$$x_{\Gamma 1} + x_{\Gamma 2} + x_{\Gamma 3} \quad := \quad \text{ημερήσια χρησιμοποιούμενη ποσότητα συστατικού \Gamma}$$

και

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{\Gamma 1} \quad := \quad \text{ημερήσια παραγόμενη ποσότητα βενζίνης super}$$

$$x_{A2} + x_{B2} + x_{\Gamma 2} \quad := \quad \text{ημερήσια παραγόμενη ποσότητα αμόλυβδης βενζίνης}$$

$$x_{A3} + x_{B3} + x_{\Gamma 3} \quad := \quad \text{ημερήσια παραγόμενη ποσότητα super αμόλυβδης}$$

Τα ημερήσια έσοδα από την παραγωγή και πώληση τριών ειδών βενζίνης είναι:

$$\text{Ημερήσια Έσοδα} := 85(x_{A1} + x_{B1} + x_{\Gamma 1}) + 80(x_{A2} + x_{B2} + x_{\Gamma 2}) + 88(x_{A3} + x_{B3} + x_{\Gamma 3})$$

Το ημερήσιο συνολικό κόστος των χρησιμοποιούμενων ποσοτήτων των τριών κύριων συστατικών για την παραγωγή των προϊόντων είναι:

$$\text{Ημερήσιο συνολικό κόστος} := 38(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3}) + 42(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3}) + 105(x_{\Gamma 1} + x_{\Gamma 2} + x_{\Gamma 3})$$

Συνεπώς, η ημερήσια συνολική συνεισφορά στο κέρδος είναι:

$$\begin{aligned}
z = & (85 - 38)x_{A1} + (80 - 38)x_{A2} + (88 - 38)x_{A3} + \\
& + (85 - 42)x_{B1} + (80 - 42)x_{B2} + (88 - 42)x_{B3} + \\
& + (85 - 105)x_{\Gamma1} + (80 - 105)x_{\Gamma2} + (88 - 105)x_{\Gamma3}
\end{aligned}$$

και η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος που μεγιστοποιεί τη συνολική συνεισφορά στο κέρδος είναι:

$$\max z = 47x_{A1} + 42x_{A2} + 50x_{A3} + 43x_{B1} + 38x_{B2} + 46x_{B3} - 20x_{\Gamma1} - 25x_{\Gamma2} - 17x_{\Gamma3}$$

Ο ελάχιστος αριθμός οκτανίων της βενζίνης *super* είναι 94 οκτάνια, συνεπώς θα πρέπει:

$$\frac{120x_{A1} + 90x_{B1} + 130x_{\Gamma1}}{x_{A1} + x_{B1} + x_{\Gamma1}} \geq 94$$

Ομοίως, ο ελάχιστος αριθμός οκτανίων της βενζίνης *super* είναι 92 οκτάνια, συνεπώς θα πρέπει:

$$\frac{120x_{A2} + 90x_{B2} + 130x_{\Gamma2}}{x_{A2} + x_{B2} + x_{\Gamma2}} \geq 92$$

Ομοίως, ο ελάχιστος αριθμός οκτανίων της *super* αμόλυβδης βενζίνης είναι 96 οκτάνια, συνεπώς θα πρέπει:

$$\frac{120x_{A3} + 90x_{B3} + 130x_{\Gamma3}}{x_{A3} + x_{B3} + x_{\Gamma3}} \geq 96$$

Προκύπτουν οι ανισότητες:

$$26x_{A1} - 4x_{B1} + 36x_{\Gamma1} \geq 0$$

$$28x_{A2} - 2x_{B2} + 38x_{\Gamma2} \geq 0$$

$$24x_{A3} - 6x_{B3} + 34x_{\Gamma3} \geq 0$$

Η ημερήσια χρησιμοποιούμενη ποσότητα κάθε συστατικού δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διαθέσιμη ποσότητα του συστατικού. Συνεπώς, για τα συστατικά A , B , Γ θα πρέπει:

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} \leq 1000$$

$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 1200$$

$$x_{\Gamma1} + x_{\Gamma2} + x_{\Gamma3} \leq 700$$

Η ποσότητα που παράγεται από κάθε είδος βενζίνης πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με την ημερήσια ζήτηση, δηλαδή θα πρέπει:

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{\Gamma1} \geq 800$$

$$x_{A2} + x_{B2} + x_{\Gamma2} \geq 1100$$

$$x_{A3} + x_{B3} + x_{\Gamma3} \geq 500$$

Το μοντέλο Γ.Π. που μεγιστοποιεί την ημερήσια συνεισφορά στο κέρδος και συγχρόνως ικανοποιεί τον ελάχιστο αριθμό οκτανίων των βενζινών, τους περιορισμούς της ημερήσιας ποσότητας των συστατικών και την ημερήσια ζήτηση των τριών προϊόντων είναι:

$$\max z = 47x_{A1} + 42x_{A2} + 50x_{A3} + 43x_{B1} + 38x_{B2} + 46x_{B3} - 20x_{\Gamma1} - 25x_{\Gamma2} - 17x_{\Gamma3}$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} 26x_{A1} - 4x_{B1} + 36x_{\Gamma1} &\geq 0 \\ 28x_{A2} - 2x_{B2} + 38x_{\Gamma2} &\geq 0 \\ 24x_{A3} - 6x_{B3} + 34x_{\Gamma3} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{Περιορισμοί ελάχιστου αριθμού οκτανίων} \\
 & \left. \begin{aligned} x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} &\leq 1000 \\ x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} &\leq 1200 \\ x_{\Gamma1} + x_{\Gamma2} + x_{\Gamma3} &\leq 700 \end{aligned} \right\} \text{Περιορισμοί προσφοράς συστατικού} \\
 & \left. \begin{aligned} x_{A1} + x_{B1} + x_{\Gamma1} &\geq 800 \\ x_{A2} + x_{B2} + x_{\Gamma2} &\geq 1100 \\ x_{A3} + x_{B3} + x_{\Gamma3} &\geq 500 \end{aligned} \right\} \text{Περιορισμοί ζήτησης προϊόντων} \\
 & x_{ij} \geq 0, \quad i = A, B, \Gamma, \quad j = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Η βέλτιστη λύση είναι: $x_{A1} = 0$, $x_{A2} = 500$, $x_{A3} = 500$, $x_{B1} = 720$, $x_{B2} = 480$, $x_{B3} = 0$, $x_{\Gamma1} = 80$, $x_{\Gamma2} = 120$, $x_{\Gamma3} = 0$. Για να μεγιστοποιήσει το διυλιστήριο την ημερήσια συνεισφορά στο κέρδος, θα πρέπει να χρησιμοποιήσει 720 τόνους συστατικού B και 80 τόνους συστατικού Γ για να παράγει 800 τόνους βενζίνης super, 500 τόνους συστατικού A με 480 τόνους συστατικού B και 120 τόνους συστατικού Γ για να παράγει 1100 τόνους αμόλυβδης βενζίνης και τέλος 500 τόνους συστατικού A για να παράγει 500 τόνους super αμόλυβδης βενζίνης. Η μέγιστη συνολική ημερήσια συνεισφορά στο κέρδος που αντιστοιχεί στο βέλτιστο πρόγραμμα μείξης είναι 90.600.000 νομισματικές μονάδες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3 (Επιλογή Διαφημιστικών Μέσων). Αυτό το πρόβλημα το αντιμετωπίζουν τόσο οι επιχειρήσεις και οι οργανισμοί όσο και οι διαφημιστικές εταιρίες προκειμένου να αναπτύξουν την κατάλληλη διαφημιστική εκστρατεία. Το πρόβλημα αφορά στον προσδιορισμό του αριθμού των προβολών/καταχωρήσεων που πρέπει να γίνουν στα διάφορα διαφημιστικά μέσα π.χ. τηλεόραση, ραδιόφωνο, περιοδικά, εφημερίδες και άλλα ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική ακροαματικότητα της διαφημιστικής εκστρατείας. Η διαφήμιση στα διάφορα μέσα πρέπει να λαμβάνει υπόψη έναν αριθμό περιορισμών, όπως π.χ. ο προϋπολογισμός της διαφημιστικής εκστρατείας, ο μέγιστος ή ο ελάχιστος αριθμός προβολών/καταχωρήσεων στα διαφημιστικά μέσα, τα χαρακτηριστικά των ακροατών, η πολιτική της επιχείρησης ή του οργανισμού και άλλοι. Συνεπώς, το πρόβλημα της επιλογής των διαφημιστικών μέσων είναι ένα πρόβλημα κατανομής περιορισμένων πόρων σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες (τα διαφημιστικά μέσα) το οποίο μπορεί να διαμορφωθεί ως πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού.

Μία βιομηχανική επιχείρηση πρόκειται να εισάγει στην αγορά ένα νέο προϊόν. Οι υπεύθυνοι του τμήματος διαφήμισης αποφάσισαν να κάνουν μία δοκιμαστική διαφήμιση στην τηλεόραση ένα συγκεκριμένο τριήμερο Παρασκευής - Σαββάτου - Κυριακής. Το κόστος μίας προβολής και η ακροαματικότητα της μίας προβολής του επιλεγμένου καναλιού διαφέρουν ανάλογα με την ημέρα και την ώρα και δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Διαφημιστικό μέσο	Κόστος προβολής (σε χιλιάδες €)	Μονάδες αναμενόμενης ακροαματικότητας μίας προβολής
Παρασκευή - Ημέρα	400	5000
Σάββατο - Ημέρα	450	5500
Κυριακή - Ημέρα	450	5700
Παρασκευή - Νύχτα	500	7500
Σάββατο - Νύχτα	550	8200
Κυριακή - Νύχτα	550	8400

Το πρόβλημα είναι πρόβλημα επιλογής διαφημιστικών μέσων λόγω των διαφορετικών στοιχείων κόστους και ακροαματικότητας εάν και το κανάλι της τηλεόρασης είναι μόνο ένα. Στόχος των υπευθύνων της διαφήμισης είναι η μεγιστοποίηση της συνολικής ακροαματικότητας, λαμβάνοντας υπόψη τους ακόλουθους περιορισμούς:

- (1) Το συνολικό ποσό που θα δοθεί για όλες τις προβολές του τριημέρου να μην υπερβαίνει τα 45 εκατομύρια €.
- (2) Το ποσό που θα δοθεί για τις προβολές της Παρασκευής να μην είναι μεγαλύτερο από 11 εκατομύρια €, ενώ για τις προβολές του Σαββάτου να μην είναι μεγαλύτερο από 14,4 εκατομύρια €.
- (3) Ο συνολικός αριθμός των προβολών που θα γίνουν κατά τη διάρκεια της ημέρας να είναι τουλάχιστον 20, ενώ ο συνολικός αριθμός των προβολών που θα γίνουν κατά τη διάρκεια της νύχτας να είναι τουλάχιστον το 50% του συνολικού αριθμού των προβολών.
- (4) Ο μέγιστος αριθμός προβολών που θα γίνουν κατά τη διάρκεια μίας ημέρας πρέπει να είναι το πολύ 12 και κάθε νύχτα το πολύ 18.

ΛΥΣΗ 4. Για να διαμορφώσουμε το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα Γ.Π. θα χρησιμοποιήσουμε τις μεταβλητές αποφάσεων:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \# \text{ προβολών ημέρας Παρασκευής} \\
 x_2 &= \# \text{ προβολών ημέρας Σαββάτου} \\
 x_3 &= \# \text{ προβολών ημέρας Κυριακής} \\
 x_4 &= \# \text{ προβολών νύχτας Παρασκευής} \\
 x_5 &= \# \text{ προβολών νύχτας Σαββάτου} \\
 x_6 &= \# \text{ προβολών νύχτας Κυριακής}
 \end{aligned}$$

Η αντικειμενική συνάρτηση που μεγιστοποιεί το συνολικό αριθμό των μονάδων ακροαματικότητας κατά τη διάρκεια του τριημέρου είναι:

$$\max z = 5000x_1 + 5500x_2 + 5700x_3 + 7500x_4 + 8200x_5 + 8400x_6$$

Ο περιορισμός που εκφράζει τον προϋπολογισμό της δοκιμαστικής διαφήμισης (σε χιλιάδες €) είναι:

$$400x_1 + 450x_2 + 450x_3 + 500x_4 + 550x_5 + 550x_6 \leq 45000$$

Ο περιορισμός σχετικά με το ποσό που θα δοθεί στις προβολές που θα γίνουν την Παρασκευή (σε χιλιάδες €) είναι: $400x_1 + 500x_4 \leq 11000$, ενώ ο αντίστοιχος περιορισμός που σχετίζεται με το ποσό που θα δοθεί για τις προβολές του Σαββάτου (σε χιλιάδες €) είναι: $450x_2 + 550x_5 \leq 14400$. Ο περιορισμός που αφορά το συνολικό αριθμό των προβολών της ημέρας είναι: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 20$ και ο περιορισμός του συνολικού αριθμού των προβολών της νύχτας είναι:

$$x_4 + x_5 + x_6 \geq 0,5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0,5x_1 - 0,5x_2 - 0,5x_3 + 0,5x_4 + 0,5x_5 + 0,5x_6 \geq 0$$

Υπάρχουν, τέλος, έξι περιορισμοί σχετικά με το μέγιστο αριθμό επιτρεπόμενων προβολών κάθε ημέρα και νύχτα καθώς και ο περιορισμός της μη-αρνητικότητας. Το μοντέλο του Γ.Π. που μεγιστοποιεί τη συνολική ακροαματικότητα λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς του προβλήματος, είναι:

$$\max z = 5000x_1 + 5500x_2 + 5700x_3 + 7500x_4 + 8200x_5 + 8400x_6$$

με περιορισμούς:

$$\begin{array}{rcll} 400x_1 & + & 450x_2 & + & 450x_3 & + & 500x_4 & + & 550x_5 & + & 550x_6 & \leq & 45000 \\ 400x_1 & & & & & & + & 500x_4 & & & & \leq & 11000 \\ & & 450x_2 & & & & & & + & 550x_5 & & \leq & 14400 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & \geq & 20 \\ -0,5x_1 & - & 0,5x_2 & - & 0,5x_3 & + & 0,5x_4 & + & 0,5x_5 & + & 0,5x_6 & \geq & 0 \\ x_1 & & & & & & & & & & & \leq & 12 \\ & & x_2 & & & & & & & & & \leq & 12 \\ & & & & x_3 & & & & & & & \leq & 12 \\ & & & & & & x_4 & & & & & \leq & 18 \\ & & & & & & & & x_5 & & & \leq & 18 \\ & & & & & & & & & x_6 & \leq & 18 \\ & & & & & & & & & & x_j & \geq & 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6 \end{array}$$

Η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι: $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 12$ και $x_4 = x_5 = x_6 = 18$, δηλαδή η επιχείρηση θα πρέπει να κάνει 5 προβολές το πρωί της Παρασκευής, 10 προβολές το πρωί του Σαββάτου, 12 προβολές το πρωί της Κυριακής και από 18 προβολές κάθε βράδυ του τριημέρου. Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 582,2 μονάδες ακροαματικότητας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4 (Πρόβλημα μεταφοράς - Transportation problem). Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται στον οικονομικότερο τρόπο μεταφοράς ενός προϊόντος από διαφορετικές πηγές - προελεύσεις (παραγωγικές μονάδες,

αποθήκες, κέντρα διανομής και άλλα) σε διαφόρους προορισμούς - κέντρα κατανάλωσης (σημεία πώλησης, αποθήκες, σταθμούς, λιμάνια και άλλα). Αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που αντιμετωπίστηκαν με Γ.Π. με πολλές εφαρμογές σε προβλήματα κατανομής περιορισμένων πόρων σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες που δε σχετίζονται απαραίτητα με μεταφορά προϊόντων. Ο βέλτιστος τρόπος μεταφοράς των προϊόντων καλείται βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς (*optimal transportation plan*) και προκύπτει με κριτήριο το συνολικό κόστος μεταφοράς των αγαθών από τις διάφορες πηγές στους διαφόρους προορισμούς. Η προσφορά-δυναμικότητα (*supply, capacity*) κάθε πηγής είναι συνήθως περιορισμένη και η ζήτηση κάθε προορισμού προσδιορισμένη.

Μία εταιρεία αναψυκτικών παράγει και διανέμει ένα αναψυκτικό ευρείας κατανάλωσης. Το προϊόν παράγεται σε τρία εργοστάσια της Βόρειας Ελλάδας και η εταιρεία ικανοποιεί την τοπική ζήτηση. Η εταιρεία αποστέλνει ποσότητες του προϊόντος σε τέσσερις βαλκανικές πόλεις. Η μεταφορά του προϊόντος από τα τρία εργοστάσια στις τέσσερις πόλεις πραγματοποιείται με τα οχήματα της εταιρείας. Το κόστος μεταφοράς ενός κιβωτίου από κάθε εργοστάσιο σε κάθε πόλη ποικίλει ανάλογα με την απόσταση, το χρόνο και το κόστος των καυσίμων και δίνεται σε χρηματικές μονάδες στον παρακάτω πίνακα.

Από \ Προς	Πόλη 1	Πόλη 2	Πόλη 3	Πόλη 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	8	10	7	9	250
Εργοστάσιο 2	9	11	9	7	400
Εργοστάσιο 3	7	5	4	6	350
Ζήτηση	350	150	300	200	1000

Στον ίδιο πίνακα δίνεται η εβδομαδιαία ποσότητα που μπορεί να αποστείλει κάθε εργοστάσιο (Στήλη: Προσφορά) καθώς και η εβδομαδιαία ζήτηση κάθε πόλης (Σειρά: Ζήτηση).

Η συνολική εβδομαδιαία ζήτηση είναι 1000 κιβώτια αναψυκτικού όση είναι και η συνολική εβδομαδιαία προσφορά των τριών εργοστασίων. Όταν η συνολική προσφορά είναι ίση με τη συνολική ζήτηση, το πρόβλημα καλείται ισορροπημένο (*balanced*).

ΛΥΣΗ 5. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει η διοίκηση της εταιρείας είναι να εντοπίσει το πλήθος των κιβωτίων που πρέπει να αποστείλει εβδομαδιαίως κάθε εργοστάσιο σε κάθε πόλη ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς. Είναι δυνατόν να παραστήσουμε το πρόβλημα με τη μορφή ενός μοντέλου Γραμμικού Προγραμματισμού. Μπορούμε να θεωρήσουμε ως μεταβλητές απόφασης το πλήθος των κιβωτίων που αποστέλλονται από κάθε προέλευση σε κάθε προορισμό. Έστω,

$$x_{ij} = \text{πλήθος των κιβωτίων που αποστέλλονται από το εργοστάσιο } i \text{ στην πόλη } j.$$

Ο δείκτης i παίρνει τιμές από το 1 μέχρι το 3 και ο j από το 1 μέχρι το 4. Το κόστος μεταφοράς από κάθε προέλευση σε κάθε προορισμό είναι το γινόμενο της αντίστοιχης μεταβλητής με το μοναδιαίο κόστος. Πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η ακόλουθη αντικειμενική συνάρτηση:

$$z = 8x_{11} + 10x_{12} + 7x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 7x_{24} + 7x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 6x_{34}$$

και κατά 200 από το εργοστάσιο 3. Τέλος, η ζήτηση των 200 κιβωτίων της πώλης 4 καλύπτεται εξ ολοκλήρου από το εργοστάσιο 2.

Στα βιβλία [1], Κεφ 3, [2], σελ. 23-35, [4], σελ. 13-17, παρουσιάζονται διάφορες εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού όπως π.χ. η επιλογή χαρτοφυλαχίου (portfolio selection), η έρευνα marketing, ο προγραμματισμός ανθρώπινου δυναμικού, η επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων, προβλήματα χρηματοοικονομικού προγραμματισμού και άλλα.

Γραφική επίλυση του προβλήματος Γ.Π. - Κανονική μορφή - Ιδιότητες των Λύσεων

1. Γραφική επίλυση μοντέλου Γραμμικού Προγραμματισμού

Όταν στη μαθηματική διατύπωση ενός π.γ.π. υπάρχουν δύο μόνο μεταβλητές, τότε εκτός της γενικής αναλυτικής μεθόδου επίλυσης που θα παρουσιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και μία γραφική μέθοδος. Έστω το μοντέλο Γ.Π. τέτοιο ώστε:

$$\max z = 150x_1 + 200x_2$$

με περιορισμούς:

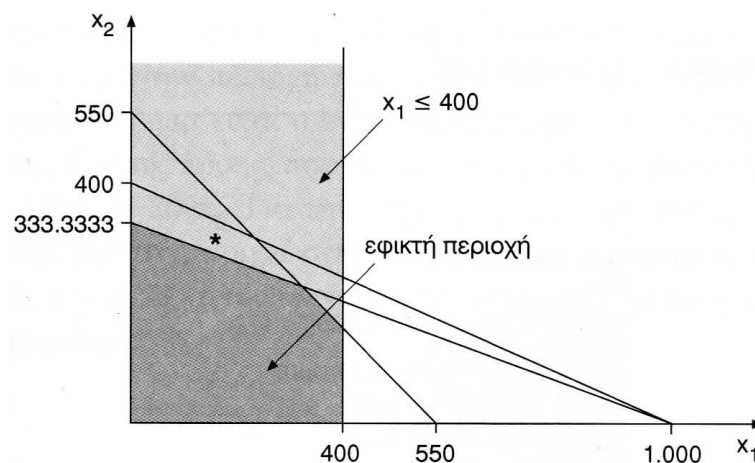
$$x_1 + x_2 \leq 550 \quad (1)$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 1000 \quad (2)$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 2000 \quad (3)$$

$$x_1 \leq 400 \quad (4)$$

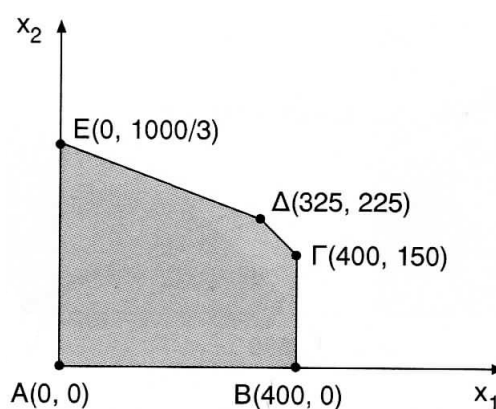
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (5)$$



ΣΧΗΜΑ 1. Η τελική εφικτή περιοχή

Όταν το πρόβλημα έχει δύο μεταβλητές απόφασης, μπορούμε να παραστήσουμε στο επίπεδο τους περιορισμούς και την αντικειμενική συνάρτηση. Σχεδόν κανένα πραγματικό πρόβλημα δεν έχει μόνο δύο μεταβλητές

απόφασης. Ένα μετρίου μεγέθους πραγματικό πρόβλημα πιθανόν να έχει μερικές εκατοντάδες ή χιλιάδες μεταβλητές απόφασης και έναν αρκετά μεγάλο αριθμό περιορισμών. Κατασκευάζουμε ένα σύστημα αξόνων στο οποίο ο οριζόντιος άξονας έχει τις τιμές της μεταβλητής x_1 και ο κάθετος τις τιμές της μεταβλητής x_2 . Χρησιμοποιούμε μόνο το πρώτο τεταρτημόριο επειδή οι μεταβλητές παίρνουν τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός. Κάθε πιθανή λύση του προβλήματος παριστάνεται από ένα σημείο πάνω στο σύστημα των θετικών ημιαξόνων. Για τη γραφική επίλυση του προβλήματος πρέπει να χαράξουμε τους περιορισμούς ώστε να καθορίσουμε την **εφικτή περιοχή** εντός της οποίας ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί. Χειριζόμαστε κάθε ανίσωση-περιορισμό σαν να ήταν εξίσωση και σχεδιάζουμε την εξίσωση της ευθείας που αντιστοιχεί σε κάθε περιορισμό. Αυτή την ευθεία την ονομάζουμε περιοριστική ευθεία. Η εξίσωση που αντιστοιχεί στον περιορισμό (1) είναι $x_2 = -x_1 + 550$, στον (2) $x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1000}{3}$, στον (3) $x_2 = -\frac{2}{5}x_1 + 400$, στον (4) $x_1 = 400$. Στο παρακάτω σχήμα εμφανίζεται η εφικτή περιοχή, δηλαδή εκείνη που περιέχει όλες τις εφικτές λύσεις του προβλήματος δηλαδή τις λύσεις που ικανοποιούν τους τέσσερις περιορισμούς και τον περιορισμό της μη-αρνητικότητας. Όλα τα σημεία που περιέχονται στην περιοχή αυτή ή βρίσκονται στο σύνορό της είναι οι εφικτές λύσεις του προβλήματος.



ΣΧΗΜΑ 2. Η εφικτή περιοχή και οι κορυφές της

Η διαδικασία για τον εντοπισμό της εφικτής περιοχής απαιτεί την επανάληψη κάποιων βημάτων για κάθε περιορισμό:

- (1) Εργαζόμαστε στο πρώτο τεταρτημόριο του συστήματος αξόνων.
- (2) Αντικαθιστούμε την ανίσωση του κάθε περιορισμού με την αντίστοιχη εξίσωση.
- (3) Χαράσσουμε την ευθεία που αντιστοιχεί στην εξίσωση (περιοριστική ευθεία).
- (4) Σκιαζουμε την κοινή περιοχή στην οποία ισχύουν οι μέχρι τώρα εξετασθέντες περιορισμοί.
- (5) Εάν έχουμε τελειώσει με όλους τους περιορισμούς, τότε έχουμε βρει την εφικτή περιοχή, διαφορετικά επαναλαμβάνουμε τα βήματα (2)-(4) για κάθε περιορισμό.

Στο Σχήμα 1 εμφανίζεται η τελική εφικτή περιοχή του προβλήματος. Κορυφή ή ακραίο σημείο (vertex, extreme point) της εφικτής περιοχής είναι ένα σημείο στο οποίο τέμνονται δύο περιοριστικές ευθείες. Το επόμενο βήμα είναι ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης, δηλαδή της εφικτής λύσης που μεγιστοποιεί την αντικειμενική

συνάρτηση $z = 150x_1 + 200x_2$. Για την εύρεση της άριστης λύσης σχεδιάζουμε την ευθεία που αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση για αυθαίρετες τιμές του z . Η αντικειμενική συνάρτηση ως εξίσωση ευθείας έχει τη εξής μορφή:

$$x_2 = -\frac{150}{200}x_1 + \frac{1}{200}z \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{200}z$$

Καθώς το z μεταβάλλεται, η τελευταία εξίσωση ορίζει μία οικογένεια παράλληλων ευθειών με ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οι οποίες μετακινούνται επί της εφικτής περιοχής. Για $z = 93,75$ η ευθεία τέμνει την εφικτή περιοχή σ' ένα μόνο σημείο. Οι ευθείες αυτές καλούνται και ευθείες ίσου κέρδους (isoprofit lines) και σε πρόβληματα ελαχιστοποίησης καλούνται ευθείες ίσου κόστους (isocost lines). Για οποιαδήποτε τιμή του z μεγαλύτερη από 93,75 η αντίστοιχη ευθεία θα μετακινηθεί πιο πάνω και θα βρεθεί στην περιοχή των μη εφικτών λύσεων, επειδή δεν θα έχει κανένα κοινό σημείο με την περιοχή των εφικτών λύσεων. Άρα, όσο απομακρυνόμαστε από την αρχή των αξόνων τόσο αυξάνεται το z και αυτή είναι η κατεύθυνση αύξησης. Η μέγιστη τιμή του z (το μέγιστο κέρδος) λαμβάνεται εκεί που μία ευθεία από την οικογένεια των παραλλήλων ευθειών $z = 150x_1 + 200x_2$ είναι όσο γίνεται 'πιο μακριά' από την αρχή των αξόνων αλλά ταυτόχρονα έχει ένα κοινό σημείο με την περιοχή των εφικτών λύσεων. Το σημείο αυτό είναι το Δ. Η βέλτιστη λύση είναι το σημείο Δ με συντεταγμένες $x_1 = 325$ και $x_2 = 225$. Η συνολική συνεισφορά στο κέρδος θα είναι 93,75 νομισματικές μονάδες.

Η βέλτιστη λύση είναι μία κορυφή της εφικτής περιοχής. Ο εντοπισμός της γίνεται με παράλληλη μετακίνηση της ευθείας που αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση. Αυτή η μετακίνηση αυξάνει το z όσο η ευθεία κινείται προς την κατεύθυνση αύξησης. Όπως θα δούμε και στις ιδιότητες των λύσεων, η **βέλτιστη λύση** σ' ένα πρόβλημα Γ.Π. είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής.

Συνοψίζοντας, για να εντοπίσουμε τη βέλτιστη λύση με τη γραφική μέθοδο σ' ένα δισδιάστατο πρόβλημα Γ.Π. θα πρέπει:

- (1) Να σχεδιάσουμε στο πρώτο τεταρτημόριο τις περιοριστικές ευθείες για όλους τους περιορισμούς.
- (2) Να εντοπίσουμε την εφικτή περιοχή, δηλαδή την περιοχή στην οποία ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί.
- (3) Να φέρουμε μία ευθεία για την αντικειμενική συνάρτηση για αυθαίρετη τιμή του z .
- (4) Να μετακινήσουμε παράλληλα προς την κατεύθυνση αύξησης (μείωσης εάν είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης) της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης.
- (5) Να εντοπίσουμε το ακραίο σημείο (κορυφή), από το οποίο διέρχεται η αντικειμενική συνάρτηση πριν απομακρυνθεί από την εφικτή περιοχή.
- (6) Με τη βοήθεια των δύο περιοριστικών ευθειών που καθορίζουν την κορυφή αυτή να βρούμε τις συντεταγμένες της που είναι και οι βέλτιστες τιμές για τις δύο μεταβλητές απόφασης.
- (7) Να αντικαταστήσουμε τις βέλτιστες τιμές των δύο μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση και να υπολογίσουμε τη βέλτιστη λύση για το z .

Το γεγονός ότι η βέλτιστη λύση είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής είναι σημαντικό διότι περιορίζεται δραστικά το πλήθος των εφικτών λύσεων που πρέπει να διερευνήσουμε για τον εντοπισμό της

βέλτιστης. Η διερεύνηση γίνεται μόνο ανάμεσα στις κορυφές της εφικτής περιοχής οι οποίες είναι πεπερασμένου πλήθους.

2. Ειδικές περιπτώσεις

Στη γραφική επίλυση που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, υπάρχει η δυνατότητα να βρούμε τη μοναδική εφικτή λύση που δίνει τη βέλτιστη τιμή στο z . Τη βέλτιστη λύση την εντοπίσαμε σε μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής. Τα πράγματα όμως δεν είναι πάντα έτσι! Υπάρχουν προβλήματα στα οποία παρουσιάζονται οι ακόλουθες τρεις ειδικές περιπτώσεις:

- (1) Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις,
- (2) Προβλήματα χωρίς εφικτές λύσεις και
- (3) Μη φραγμένα προβλήματα, δηλαδή περιπτώσεις όπου η τιμή του z μπορεί να είναι οποιαδήποτε μικρή ή μεγάλη σε αντίστοιχα προβλήματα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης.

Οι ειδικές αυτές περιπτώσεις δεν παρουσιάζονται συχνά σε ένα πραγματικό πρόβλημα.

- (1) Άπειρες βέλτιστες λύσεις.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Μία μικρή επιχείρηση δερμάτων παράγει δύο προϊόντα $A =$ γυναικείο παλτό, $B =$ ανδρικό σακάκι και επιθυμεί να μεγιστοποιήσει το συνολικό κέρδος της σε σχέση με τα τεμάχια προϊόντων που παράγει. Έστω $x_1 =$ μονάδες προϊόντος A , $x_2 =$ μονάδες προϊόντος B . Οι περιορισμοί του προβλήματος είναι τρεις, ο πρώτος αναφέρεται στις φόδρες, ο δεύτερος στο δέρμα ως πρώτη ύλη και ο τρίτος στην εργασία. Η διαμόρφωση του προβλήματος ως μοντέλο Γ.Π. είναι:

$$\max z = 25x_1 + 20x_2 \quad (\text{νομισματικές μονάδες})$$

με περιορισμούς:

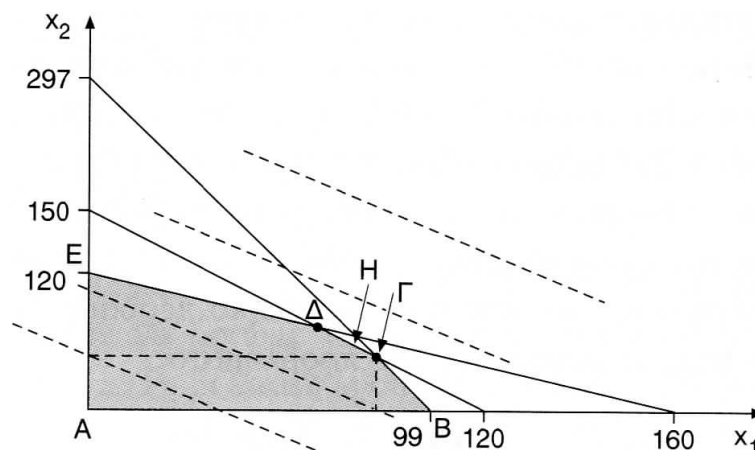
$$3x_1 + x_2 \leq 297 \quad (\text{φόδρα})$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 600 \quad (\text{δέρμα})$$

$$6x_1 + 8x_2 \leq 960 \quad (\text{εργασία})$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{μη-αρνητικότητας})$$

Η γραφική επίλυση παρουσιάζεται στο Σχήμα 3 στο οποίο εμφανίζονται η εφικτή περιοχή, οι κορυφές της και οι ευθείες της αντικειμενικής συνάρτησης. Για να βρούμε τη βέλτιστη λύση θα πρέπει είτε να χρησιμοποιήσουμε τις ευθείες ίσου κέρδους για διάφορες τιμές του z (παράλληλη μετακίνηση) μέχρι να εντοπίσουμε τη βέλτιστη κορυφή ή να επιλύσουμε την αντικειμενική συνάρτηση για όλες τις κορυφές και να επιλέξουμε αυτή που δίνει το μέγιστο z . Η εξίσωση ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $x_2 = -\frac{5}{4}x_1 + \frac{1}{20}z$. Η περιοριστική ευθεία που αντιστοιχεί στο δεύτερο περιορισμό είναι $x_2 = -\frac{5}{4}x_1 + 150$. Άρα, οι δύο ευθείες είναι παράλληλες. Καθώς μετακινείται η αντικειμενική συνάρτηση για να εντοπίσει τη βέλτιστη κορυφή οι δύο ευθείες συμπίπτουν, δηλαδή η ευθεία που



ΣΧΗΜΑ 3. Εφικτή περιοχή, κορυφές και ευθείες της αντικειμενικής συνάρτησης

αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση πριν εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή εφάπτεται όχι απλώς σε μία κορυφή, αλλά συμπίπτει με το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ. Οι δύο κορυφές που είναι τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ δίνουν ίδια τιμή για το z που είναι 3000. Δεν είναι όμως μόνο οι δύο αυτές κορυφές βέλτιστες, αλλά όλα τα σημεία του ΓΔ, επειδή δίνουν την ίδια τιμή. Άρα, η επιχείρηση έχει να επιλέξει ανάμεσα σε άπειρες βέλτιστες λύσεις που δίνουν ίδια τιμή στο z και οι οποίες είναι όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ περιλαμβανομένων και των δύο κορυφών. Κάθε λύση που προκύπτει ως κυρτός συνδυασμός των κορυφών Γ και Δ, δηλαδή:

$$H = a(84, 45) + (1 - a)(60, 75), \text{ με } 0 \leq a \leq 1$$

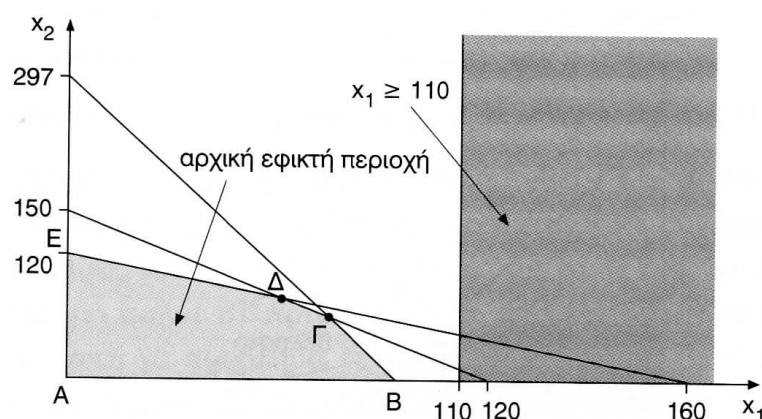
δίνει ένα σημείο που βρίσκεται πάνω στο ΓΔ το οποίο είναι επίσης βέλτιστη λύση δίνοντας άριστη λύση για το z πάντα 3000. Όταν ο a πάρει τιμή μηδέν ή μονάδα, προφανώς έχουμε τις δύο κορυφές. Η επιλογή μίας βέλτιστης λύσης σε ένα πρόβλημα, στο οποίο υπάρχουν άπειρες εναλλακτικές, μπορεί να γίνει με τη χρησιμοποίηση ενός ακόμη κριτηρίου επιλογής. Π.χ. μπορεί η επιχείρηση να επιλέξει τη λύση του σημείου Γ εάν θέλει να παράγονται όσο είναι δυνατόν περισσότερα γυναικεία ροστάκια ενδύματα από ανδρικά. Μπορεί ακόμη να επιλέξει τη λύση Η, δηλαδή τον κυρτό συνδυασμό των δύο άκρων επειδή δίνει σχεδόν ισόποση παραγωγή ανάμεσα στα δύο προϊόντα.

- (2) Καμία εφικτή λύση: Έστω ότι η επιχείρηση δέχεται μία παραγγελία για τουλάχιστον 110 μονάδες προϊόντος Α. Προσθέτουμε έναν τέταρτο περιορισμό, $x_1 \geq 110$, οπότε το μοντέλο παίρνει τη μορφή:

$$\max z = 25x_1 + 20x_2 \quad (\text{νομισματικές μονάδες})$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 297 && (\text{φόδρα}) \\ 5x_1 + 4x_2 &\leq 600 && (\text{δέρμα}) \\ 6x_1 + 8x_2 &\leq 960 && (\text{εργασία}) \\ x_1 &\geq 110 && (\text{παραγγελία}) \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2 && (\text{μη-αρνητικότητα}) \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 4. Αρχική εφικτή περιοχή και περιοχή ισχύος νέου περιορισμού

Στο Σχήμα 4, βλέπουμε την αρχική εφικτή περιοχή και την περιοχή στην οποία είναι αληθής ο νέος περιορισμός. Δεν υπάρχουν σημεία που να ικανοποιούν ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς. Συνέπεια αυτού είναι η εφικτή περιοχή για το νέο πρόβλημα, να είναι το **κενό σύνολο**. Η επιχείρηση έχει εκτιμήσει εσφαλμένα τη διαθέσιμη ποσότητα πόρων και **δεν** μπορεί να καλύψει όλους τους περιορισμούς. Συνέπεια αυτού είναι η εφικτή περιοχή για το νέο πρόβλημα να είναι το **κενό σύνολο**. Η επιχείρηση έχει εκτιμήσει εσφαλμένα τη διαθέσιμη ποσότητα των πόρων και **δεν** μπορεί να καλύψει την παραγγελία. Αντικαθιστώντας, την ελάχιστη απαίτηση για το προϊόν Α στον πρώτο περιορισμό θα έχουμε: $3(110) + x_2 = 330 + x_2 \leq 297$, δηλαδή για να ικανοποιηθεί η απαίτηση παραγωγής 110 τουλάχιστον μονάδων προϊόντος Α χρειάζονται τουλάχιστον 330 μέτρα φόδρας και επιπλέον ο,τιδήποτε χρησιμοποιηθεί για το προϊόν Β. Η επιχείρηση όμως έχει συνολικά μόνο 297 μέτρα φόδρας. Άρα, η ανεπάρκεια της πρώτης ύλης φόδρα είναι ουσιαστικά αυτή που προκαλεί την ανυπαρξία εφικτής περιοχής για το πρόβλημα. Η επιπλέον προμήθεια 33 μέτρων φόδρας, ώστε να φτάσει τα 330 μέτρα, θα καλύψει την ελάχιστη ζήτηση των 110 μονάδων προϊόντος Α, χωρίς όμως δυνατότητα παραγωγής του προϊόντος Β.

Γενικά η ανυπαρξία εφικτών λύσεων δεν οφείλεται στην αντικειμενική συνάρτηση αλλά στους περιορισμούς. Η διερεύνηση αυτής της ειδικής περίπτωσης όταν εμφανίζεται σ' ένα πρόβλημα, πρέπει να επικεντρώνεται στους περιορισμούς και στις παραμέτρους αυτών (τεχνολογικούς συντελεστές, σταθερές δεξιών μελών).

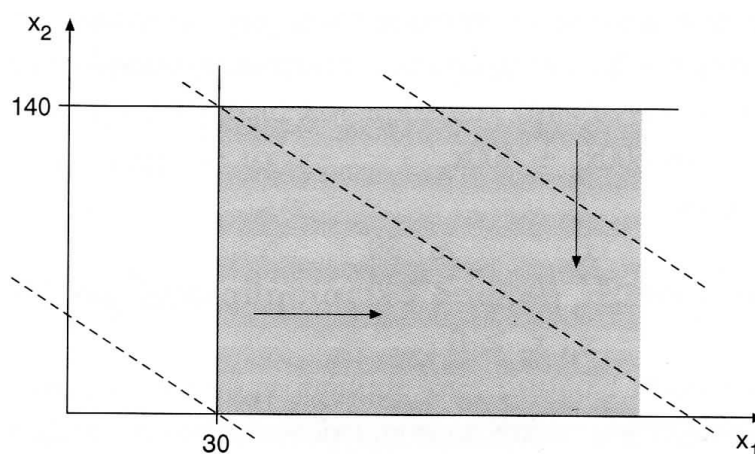
- (3) Μη φραγμένο πρόβλημα: Η ύπαρξη μη φραγμένης εφικτής περιοχής σ' ένα πρόβλημα Γ.Π. μεγιστοποίησης (ή ελαχιστοποίησης) ενδέχεται να οδηγήσει σε απεριόριστη αύξηση (ή μείωση) της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Τότε το πρόβλημα καλείται μη φραγμένο (unbounded problem). Ένα μη-φραγμένο πρόβλημα είναι συνήθως περίπτωση σφάλματος μοντελοποίησης.

Μία εταιρία κατασκευάζει χαρταετούς μεγάλου και μικρού μεγέθους και θέλει να μεγιστοποιήσει το συνολικό κέρδος από την παραγωγή και την πώληση x_1 και x_2 μονάδων χαρταετών μεγάλου και μικρού μεγέθους, αντίστοιχα. Το πρόβλημα Γ.Π. είναι:

$$\max z = 600x_1 + 400x_2$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 30 && \text{(Ελάχιστη ζήτηση αριθμού μεγάλων χαρταετών)} \\ 2x_2 &\leq 280 && \left(\begin{array}{l} \text{Η εταιρία διαθέτει 280 μέτρα νάιλον} \\ \text{και για την κατασκευή ενός μικρού} \\ \text{χαρταετού χρησιμοποιεί 2 μέτρα} \end{array} \right) \\ x_1, x_2 &\geq 0 && \text{(μη-αρνητικότητα)} \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 5. Μη φραγμένο πρόβλημα

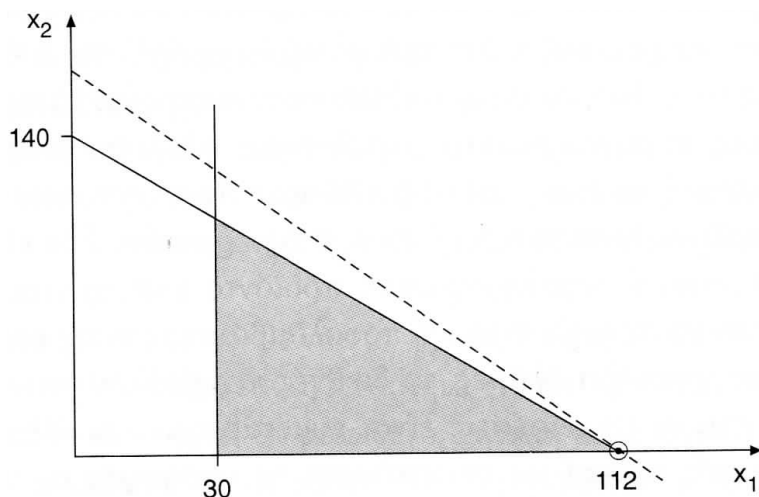
Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5, η εφικτή περιοχή του μοντέλου είναι μη-φραγμένη και εκτείνεται στο άπειρο. Η αντικειμενική συνάρτηση περνάει αρχικά από την κορυφή $(30, 0)$ και στη συνέχεια από την κορυφή $(30, 140)$. Συνεχίζοντας προς την κατεύθυνση αύξησης διέρχεται πάντα μέσα από αυτήν. Ανεξάρτητα από ποια τιμή παίρνει το z όσο μεγάλη και εάν είναι, υπάρχει πάντα μία εφικτή λύση. Η διαμόρφωση του μοντέλου είναι ελλιπής. Κάποιος από τους περιορισμούς είναι λανθασμένος ή λείπει κάποιος περιορισμός ώστε να γίνει το πρόβλημα φραγμένο. Στο δεύτερο περιορισμό, δεν λάβαμε υπόψη μας τη διαθέσιμη ποσότητα νάιλον για την κατασκευή του μεγάλου χαρταετού. Έστω ότι κάθε μεγάλος

χαρταετός χρειάζεται 2,5 μέτρα νάilon από τη διαθέσιμη ποσότητα των 280 μέτρων. Τότε ο δεύτερος περιορισμός γίνεται: $2,5x_1 + 2x_2 \leq 280$, οπότε το μοντέλο γίνεται:

$$\max z = 600x_1 + 400x_2$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 30 \\ 2,5x_1 + 2x_2 &\leq 280 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 6. Το πρόβλημα φράσσεται από έναν ακόμα περιορισμό

Στο Σχήμα 6, φαίνεται η φραγμένη εφικτή περιοχή του προβλήματος από την οποία προκύπτει ότι η βέλτιστη λύση είναι $x_1 = 112$ και $x_2 = 0$, δηλαδή προτείνεται η κατασκευή 112 χαρταετών μεγάλου μεγέθους και κανενός μικρού. Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση είναι: $z = 67200$ νομισματικές μονάδες. Συμπερασματικά, ένα μη φραγμένο πρόβλημα συνήθως προκύπτει από εσφαλμένη μοντελοποίηση και μπορεί να γίνει επιλύσιμο με την αντικατάσταση κάποιου εσφαλμένου περιορισμού καθώς και με την προσθήκη κάποιου απαραίτητου περιορισμού που αρχικά δεν έχει ληφθεί υπόψη. Πρέπει να βρεθεί το λογικό σφάλμα που προκαλεί την αδυναμία εντοπισμού μη πεπερασμένης τιμής για το z . □

3. Κανονική μορφή

Ένα γενικό πρόβλημα Γ.Π. εμφανίζεται κάτω από μία ποικιλία διαφορετικών μορφών όπως μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, εξισώσεις ή ανισώσεις για τους περιορισμούς. Αυτές όλες οι μορφές μπορούν να αναχθούν σε μία κοινή μορφή την κανονική ή τυπική μορφή η οποία, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, επιτρέπει την εφαρμογή μιας γενικής μεθόδου (μέθοδος Simplex) για την επίλυση του συγκεκριμένου κάθε φορά προβλήματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1. Ένα πρόβλημα Γ.Π. είναι σε κανονική (ή τυπική) μορφή, εάν έχει την μορφή:

$$\begin{aligned}
 (\pm) \max & (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) \\
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\
 x_1, \dots, x_n &\geq 0
 \end{aligned}$$

όπου $c_j, b_i, a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, \dots, n$ πραγματικές σταθερές και επιπλέον $b_i \geq 0, i = 1, \dots, m$. Ισοδύναμα, με την μορφή πινάκων:

$$\begin{aligned}
 (\pm) \max & \underline{c}' \underline{x} \\
 A\underline{x} &= \underline{b} \\
 \underline{x} &\geq 0
 \end{aligned}$$

όπου $\underline{c}, \underline{x} \in M_{n \times 1}, \underline{b} \in M_{m \times 1}, A \in M_{m \times n}$ και $\underline{b} \geq 0$.

Κάθε πρόβλημα Γ.Π. μπορεί να τεθεί σε κανονική μορφή με τη χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών. Πράγματι, έχουμε τις περιπτώσεις:

- (1) Πρόβλημα ελαχιστοποίησης: Όταν ζητείται ο προσδιορισμός του ελαχίστου της $f(\underline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ αντί του μεγίστου της, θέτουμε:

$$g(\underline{x}) = -f(\underline{x}) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$$

και μεγιστοποιούμε τη συνάρτηση $g(\underline{x})$. Το ελάχιστο της $f(\underline{x})$ προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\min f(\underline{x}) = -\max g(\underline{x})$$

- (2) Αρνητικοί σταθεροί όροι σε περιορισμούς: Μετατρέπουμε τους όρους σε θετικούς πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη των αντίστοιχων περιορισμών με (-1) .
- (3) Περιορισμοί που εκφράζονται από ανισώσεις: Αυτοί μπορούν να αναχθούν σε εξισώσεις με την εισαγωγή νέων μη-αρνητικών μεταβλητών που λέγονται περιθώριες μεταβλητές. Οι αρχικοί περιορισμοί:

$$\begin{aligned}
 a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &\leq b_i \\
 a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n &\geq b_j
 \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμοι με τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
 a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_r &= b_i, \quad x_r \geq 0 \\
 a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n - x_s &= b_j, \quad x_s \geq 0
 \end{aligned}$$

- (4) Μεταβλητές χωρίς περιορισμό στο πρόσημο ή μη θετικές: Εάν η μεταβλητή x_i δεν υπόκειται στον περιορισμό $x_i \geq 0$ αλλά είναι $x_i \in \mathbb{R}$, θέτουμε $x_i = x'_i - x''_i$, όπου $x'_i, x''_i \geq 0$, διότι κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο μη-αρνητικών αριθμών, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε: $x = \max(0, x) - \max(0, -x)$. Εάν η μεταβλητή x_j είναι μη-θετική θέτουμε $x_j = -x'_j$, όπου $x'_j \geq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1. Να τεθεί σε κανονική μορφή το πρόβλημα Γ.Π.:

$$\begin{aligned} \min(x_1 + 2x_2 + x_3) \\ x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 30 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 &\geq -50 \\ x_2 + x_3 &\geq 25 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ 6. Πολλαπλασιάζουμε τον τρίτο περιορισμό επί (-1) , αλλάζοντας συγγρόνως τη φορά της ανίσωσης, για να γίνει ο σταθερός όρος θετικός. Μετά εισάγουμε περιθώριες μεταβλητές για να μετατρέψουμε τις ανισώσεις σε εξισώσεις. Συγκεκριμένα, στα πρώτα μέλη των δύο ανισώσεων της μορφής $\leq$ προσθέτουμε τις περιθώριες μεταβλητές x_4, x_5 αντίστοιχα ενώ από το πρώτο μέλος της τελευταίας ανίσωσης αφαιρούμε την περιθώρια μεταβλητή x_6 , όπου $x_4, x_5, x_6 \geq 0$. Αφού η μεταβλητή x_3 δεν έχει περιορισμό στο πρόσημο, θέτουμε $x_3 = x'_3 - x''_3$ με την απαίτηση $x'_3, x''_3 \geq 0$. Επίσης, μετατρέπουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης σε πρόβλημα μεγιστοποίησης, αλλάζοντας τα πρόσημα των συντελεστών στην αντικειμενική συνάρτηση. Έτσι, καταλήγουμε στην κανονική μορφή του προβλήματος που είναι:

$$-\max(-x_1 - 2x_2 - x'_3 + x''_3)$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40 \\ x_1 - x_2 + x'_3 - x''_3 &= 30 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 + x_5 &= 50 \\ x_2 + x'_3 - x''_3 - x_6 &= 25 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6 \\ x'_3, x''_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

4. Οι λύσεις του προβλήματος Γ.Π.

Αρχικά, υπενθυμίζουμε βασικούς ορισμούς και έννοιες από τη Γραμμική Άλγεβρα που είναι απαραίτητοι για τα επόμενα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1. Έστω $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ διανύσματα του $\mathbb{R}^m$. Κάθε διάνυσμα $\underline{a} \in \mathbb{R}^m$ που μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\underline{a} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

καλείται γραμμικός συνδυασμός των $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$. Τα διανύσματα $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$, $k \leq m$ λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητα** εάν η σχέση: $\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k = \underline{0}$, ισχύει μόνο όταν $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. Διαφορετικά, καλούνται **γραμμικά εξαρτημένα**. Εάν τα $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $k = m$ τότε αυτά αποτελούν μία **βάση** του χώρου $\mathbb{R}^m$ (διανυσματικός χώρος), δηλαδή κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2. Έστω $A \in M_{m \times n}$ ένας $m \times n$ πίνακας με πραγματικά στοιχεία. Ορίζουμε βαθμό (ή τάξη) $r(A)$ του πίνακα A , το μέγιστο αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του. Αποδεικνύεται ότι ο μέγιστος αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ενός πίνακα είναι ίσος με το μέγιστο αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του. Δηλαδή ισχύει ότι $r(A) = r(A') \leq \min\{m, n\}$. Σε ο,τιδήποτε ακολουθεί υποθέτουμε ότι $r(A) = m < n$ που είναι η μόνη ενδιαφέρουσα περίπτωση. Τότε το σύστημα των περιορισμών έχει άπειρες λύσεις και η βέλτιστη λύση θα αναζητηθεί στις μη-αρνητικές από αυτές. Ένα πρόβλημα Γ.Π. όπως θα δούμε και παρακάτω μπορεί να έχει μία, καμία ή άπειρες βέλτιστες λύσεις. Κάτι τέτοιο άλλωστε το είδαμε και στη γραφική επίλυση ενός προβλήματος Γ.Π. (ειδικές περιπτώσεις).

Ερώτημα: Πότε ένα πρόβλημα Γ.Π. έχει άριστη λύση;

Μία μερική απάντηση σ' αυτό το ερώτημα, δίνεται από τη Μαθηματική Ανάλυση και το Θεώρημα Weierstrass. Πριν όμως παρουσιάσουμε το θεώρημα, ας δούμε κάποιους σημαντικούς ορισμούς.

Συμβολισμός: Συμβολίζουμε με $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \dots, \underline{P}_n$ τις στήλες του πίνακα A , δηλαδή

$$\underline{P}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \text{ και τότε } A = (\underline{P}_1 \quad \underline{P}_2 \quad \dots \quad \underline{P}_n)$$

$$\text{όπου } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}.$$

Αφού $r(A) = m < n$ υπάρχουν πάντοτε m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα A . Με τον παραπάνω συμβολισμό, το σύστημα των περιορισμών παίρνει τη μορφή:

$$\underline{P}_1 x_1 + \underline{P}_2 x_2 + \dots + \underline{P}_n x_n = \underline{b}$$

δηλαδή υπάρχει "1 - 1" αντιστοιχία μεταξύ των μεταβλητών και των στηλών του πίνακα A .

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3. Έστω το πρόβλημα Γ.Π. σε κανονική μορφή:

$$\begin{array}{ll} \max \underline{c}' \underline{x} & \max(c_1 x_1 + \dots + c_n x_n) \\ A \underline{x} = \underline{b} & \text{ή} \quad \underline{P}_1 x_1 + \underline{P}_2 x_2 + \dots + \underline{P}_n x_n = \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0} & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{array}$$

όπου $\underline{c}, \underline{x} \in M_{n \times 1}$, $\underline{b} \in M_{m \times 1}$, $\underline{b} \geq \underline{0}$, $A = (\underline{P}_1 \dots \underline{P}_n) \in M_{m \times n}$, $r(A) = m < n$.

- (1) Λύση του προβλήματος Γ.Π. λέγεται κάθε λύση $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)'$ του συστήματος των περιορισμών $A \underline{x} = \underline{b}$.
- (2) Βασική λύση καλείται κάθε λύση $\underline{x}$ που οι μη-μηδενικές συντεταγμένες της αντιστοιχούν σε γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A . Αφού $r(A) = m$ κάθε βασική λύση έχει το πολύ m μη-μηδενικές συντεταγμένες.
- (3) Εφικτή λύση λέγεται κάθε λύση $\underline{x}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη μη-αρνητικότητας των μεταβλητών δηλαδή κάθε λύση που έχει μη αρνητικές συντεταγμένες.
- (4) Βασική εφικτή λύση καλείται κάθε λύση $\underline{x}$ που είναι συγχρόνως βασική και εφικτή.
- (5) Μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση καλείται κάθε βασική εφικτή λύση που έχει ακριβώς m θετικές συντεταγμένες. Διαφορετικά, καλείται εκφυλισμένη.
- (6) Άριστη ή βέλτιστη λύση καλείται κάθε εφικτή λύση που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.
- (7) Εφικτή περιοχή F καλείται το σύνολο των εφικτών λύσεων.
- (8) Το πρόβλημα Γ.Π. καλείται φραγμένο, εάν $\max \underline{c}' \underline{x} < \infty$. Εάν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο, τότε και το πρόβλημα Γ.Π. θα είναι φραγμένο. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Εάν $\max \underline{c}' \underline{x} = \infty$ τότε λέμε ότι το πρόβλημα Γ.Π. δεν έχει πεπερασμένη άριστη λύση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1 (Θεώρημα Weierstrass). Εάν το F είναι ένα μη-κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και η συνάρτηση $f : F \mapsto \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε υπάρχει $\underline{x}^* \in F : f(\underline{x}^*) \geq f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in F$ δηλαδή η f πετυχαίνει το μέγιστό της (και επομένως και το ελάχιστό της) σε σημεία του F .

Σαν πόρισμα του Θεωρήματος Weierstrass ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2. Έστω το πρόβλημα Γ.Π. $\max \underline{c}' \underline{x}$, $A \underline{x} = \underline{b}$, $\underline{x} \geq \underline{0}$ με εφικτή περιοχή $F \neq \emptyset$. Εάν το F είναι φραγμένο σύνολο τότε το πρόβλημα Γ.Π. έχει βέλτιστη λύση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η αντικειμενική συνάρτηση $f(\underline{x}) = \underline{c}' \underline{x}$ ως γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$. Η εφικτή περιοχή F είναι κλειστό σύνολο δηλαδή περιέχει τα οριακά της σημεία. Πράγματι, εάν $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία σημείων του F με $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n = \underline{x}$, αφού $\underline{x}_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$(1) \quad \underline{x}_n \geq \underline{0} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n \geq \underline{0} \Rightarrow \underline{x} \geq \underline{0}$$

$$(2) \quad A \underline{x}_n = \underline{b} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A \underline{x}_n = \underline{b} \Rightarrow A \underline{x} = \underline{b}$$

Από (1) και (2) έπεται ότι $\underline{x} \in F$, δηλαδή το F είναι κλειστό. Αλλά το F είναι επίσης φραγμένο άρα συμπαγές.

Από το Θεώρημα 4.1, υπάρχει $\underline{x}^* \in F : \underline{c}' \underline{x}^* \geq \underline{c}' \underline{x}$, $\underline{x} \in F$ δηλαδή το πρόβλημα Γ.Π. έχει άριστη λύση. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.3. Η απαίτηση το F να είναι φραγμένο είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη **άριστης λύσης** όπως **είδαμε** και στις ειδικές περιπτώσεις στη γραφική επίλυση του προβλήματος Γ.Π..

5. Ιδιότητες των λύσεων

Αρχικά θα δώσουμε μερικούς ορισμούς που είναι απαραίτητοι για την μελέτη των ιδιοτήτων των λύσεων ενός προβλήματος Γ.Π.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1. **Κυρτός συνδυασμός** των σημείων $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ είναι κάθε σημείο $\underline{x}$ της μορφής: $\underline{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ με $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$ και $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.2. Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$ καλείται **κυρτό** εάν για κάθε $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in K$ και $\lambda : 0 < \lambda < 1$, ισχύει: $\lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda) \underline{x}_2 \in K$, δηλαδή κάθε κυρτός συνδυασμός δύο σημείων του K είναι επίσης σημείο του K .

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.3. Ακρότατο σημείο ενός κυρτού συνόλου K είναι κάθε σημείο $\underline{x} \in K$ τέτοιο ώστε **δεν** υπάρχουν $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in K$ και $\lambda : 0 < \lambda < 1$ με $\underline{x} = \lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda) \underline{x}_2$, δηλαδή **κάθε** σημείο του K που δεν μπορεί να εκφρασθεί ως κυρτός συνδυασμός δύο διαφορετικών σημείων του K .

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.4. Κυρτό πολύεδρο $\underline{P}$ είναι το σύνολο των κυρτών συνδυασμών ενός πεπερασμένου πλήθους σημείων $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ δηλαδή

$$\underline{P} = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των ακροτάτων του $\underline{P}$ είναι υποσύνολο του συνόλου $\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k\}$ των σημείων που το ορίζουν. Επιπλέον κάθε σημείο του $\underline{P}$ μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός ακροτάτων του.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.5. Τα ακρότατα σημεία ενός κυρτού πολυέδρου (ή γενικότερα ενός κυρτού συνόλου όταν είναι πεπερασμένα σε πλήθος) καλούνται **κορυφές**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.6. Υπερεπίπεδο στο χώρο $\mathbb{R}^n$ καλείται το σύνολο των σημείων $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$, όπου $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ σταθερές.

Θα αναφερθούμε στη συνέχεια σε μερικά βασικά θεωρήματα που αφορούν την εφικτή περιοχή και τις λύσεις ενός προβλήματος Γ.Π.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1. (1) Η εφικτή περιοχή F είναι κυρτό σύνολο.

(2) Εάν η F είναι φραγμένο σύνολο, τότε είναι κυρτό πολύεδρο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Έστω $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in F$ και $\lambda \in \mathbb{R} : 0 < \lambda < 1$. Αρκεί να δείξουμε ότι: $\underline{x} = \lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda) \underline{x}_2 \in F$. Αφού $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ είναι εφικτές λύσεις $A \underline{x}_1 = A \underline{x}_2 = \underline{b}$ και $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \geq \underline{0}$. Επομένως, $A \underline{x} = A[\lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda) \underline{x}_2] = \lambda A \underline{x}_1 + (1 - \lambda) A \underline{x}_2 = \lambda \underline{b} + (1 - \lambda) \underline{b}$ και $\underline{x} = \lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda) \underline{x}_2 \geq \underline{0}$. Άρα η $\underline{x}$ είναι εφικτή λύση δηλαδή $\underline{x} \in F$.

(2) Παραλείπεται. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2. (1) *Εάν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο τότε η βέλτιστη λύση επιτυγχάνεται σε μία κορυφή (ακρότατο σημείο) της F .*
 (2) *Εάν δύο ή περισσότερες κορυφές είναι βέλτιστες λύσεις, τότε και κάθε κυρτός συνδυασμός τους είναι επίσης άριστη λύση.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Έχουμε δείξει ότι εάν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο τότε υπάρχει άριστη λύση $\underline{x}^*$ του προβλήματος Γ.Π.. Επίσης η F αποτελεί ένα κυρτό πολύεδρο που ορίζεται από τις τομές του πεπερασμένου πλήθους υπερεπιπέδων που ορίζουν οι γραμμικοί περιορισμοί και η συνθήκη μη-αρνητικότητας των μεταβλητών. Συνεπώς, η F έχει ένα πεπερασμένο πλήθος κορυφών $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k$ και $\underline{x}^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ για κάποια $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Άρα,

$$\begin{aligned} f(\underline{x}^*) &= \underline{c}' \underline{x}^* = \underline{c}' \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{c}' \underline{x}_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(\underline{x}_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(\underline{x}_p) = f(\underline{x}_p) \end{aligned} \quad (6)$$

όπου $f(\underline{x}_p) = \max \{ f(\underline{x}_i) \mid i = 1, 2, \dots, k \}$. Επίσης $f(\underline{x}^*) \geq f(\underline{x}_p)$, αφού η $\underline{x}^*$ είναι άριστη λύση. Από την Σχέση 6 και την τελευταία σχέση, έπεται ότι: $f(\underline{x}^*) = f(\underline{x}_p)$, δηλαδή υπάρχει κορυφή $\underline{x}_p$ της F : $f(\underline{x}_p) = \max \{ f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in F \}$.

(2) Έστω ότι υπάρχουν r κορυφές της F , οι $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_r$ ώστε $z = \max f(\underline{x}) = f(\underline{x}_i)$, $i = 1, \dots, r$. Τότε για κάθε κυρτό συνδυασμό τους $\underline{x} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \underline{x}_i$ με $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ έχουμε:

$$f(\underline{x}) = \underline{c}' \underline{x} = \underline{c}' \sum_{i=1}^r \lambda_i \underline{x}_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i \underline{c}' \underline{x}_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i f(\underline{x}_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i z = z$$

δηλαδή η $\underline{x}$ είναι επίσης βέλτιστη λύση. □

Από το Θεώρημα 5.2, προκύπτει ότι για να βρούμε την άριστη λύση ενός προβλήματος Γ.Π. αρκεί να βρούμε τις κορυφές της φραγμένης εφικτής περιοχής F και να επιλέξουμε εκείνη που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

Για την εύρεση μίας βασικής λύσης ενός προβλήματος Γ.Π. ισχύουν τα ακόλουθα Θεωρήματα 5.3 και 5.4 τα οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη. Για τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 5.3 και 5.4 παραπέμπουμε στο Παράρτημα των παρόντων Σημειώσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3. *Εάν η $\underline{x}$ είναι βασική εφικτή λύση, τότε η $\underline{x}$ είναι κορυφή της F .*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλέπε Παράρτημα Επιλεγμένων Αποδείξεων. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.4. *Εάν η $\underline{x}$ είναι κορυφή της F , τότε η $\underline{x}$ είναι βασική εφικτή λύση.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλέπε Παράρτημα Επιλεγμένων Αποδείξεων. $\square$

Συμπερασματικά, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα Γ.Π. για το οποίο η εφικτή περιοχή είναι **φραγμένο σύνολο**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.5. Να λυθεί το πρόβλημα Γ.Π.

$$\begin{aligned} & \max(3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4) \\ & \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ 7. Εάν E_i , $i = 1, 2, 3$ είναι οι γραμμές του πίνακα των συντελεστών των περιορισμών, τότε είναι $E_3 = 2E_1 + E_2$ δηλαδή η τρίτη εξίσωση είναι περιττή αφού δεν μας δίνει καμία επιπλέον πληροφορία για τις μεταβλητές. Οι δύο πρώτες γραμμές του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες και επομένως ο βαθμός του είναι 2. Έχουμε το ισοδύναμο πρόβλημα Γ.Π. σε κανονική μορφή:

$$\begin{aligned} & \max(3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4) \\ & \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ & & & & & & x_i & \geq & 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array} \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} & \max(3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4) \\ & \underline{P}_1 x_1 + \underline{P}_2 x_2 + \underline{P}_3 x_3 + \underline{P}_4 x_4 = \underline{b} \\ & \text{όπου } x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ & \underline{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{P}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{P}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Θα εξετάσουμε εάν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο που είναι ικανή συνθήκη για να έχει το πρόβλημα βέλτιστη λύση. Από το δεύτερο περιορισμό και τη συνθήκη μη-αρνητικότητας των μεταβλητών προκύπτει ότι:

$$0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad 0 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τους περιορισμούς και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη μη-αρνητικότητας, προκύπτει ότι: $0 \leq x_4 \leq 6$. Άρα $0 \leq x_i \leq 6$, $i = 1, 2, 3, 4$, δηλαδή η F είναι φραγμένο σύνολο. Μας μένει να βρούμε τις κορυφές της F δηλαδή τις βασικές εφικτές λύσεις. Αυτό επιτυγχάνεται κάθε φορά παίρνοντας δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες από τις $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \underline{P}_3, \underline{P}_4$ και λύνοντας το αντίστοιχο σύστημα απορρίπτοντας τις λύσεις με αρνητικά στοιχεία.

- (1) Οι $\underline{P}_1, \underline{P}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 < 0 \end{array}, \text{ απορρίπτεται.}$$
- (2) Οι $\underline{P}_1, \underline{P}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένες.

- (3) Οι $\underline{P}_1, \underline{P}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_4 = 5 \\ 2x_1 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_4 = \frac{9}{2} \end{array}, \text{ δεκτή.}$$
- (4) Οι $\underline{P}_2, \underline{P}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$$\left. \begin{array}{l} -x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_2 = -3 < 0 \\ x_3 = 2 \end{array}, \text{ απορρίπτεται.}$$
- (5) Οι $\underline{P}_2, \underline{P}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$$\left. \begin{array}{l} -x_2 + x_4 = 5 \\ x_2 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_2 = 1 \\ x_4 = 6 \end{array}, \text{ δεκτή.}$$
- (6) Οι $\underline{P}_3, \underline{P}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$$\left. \begin{array}{l} x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_3 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = \frac{9}{2} \end{array}, \text{ δεκτή.}$$

Άρα υπάρχουν τρεις βασικές εφικτές λύσεις (κορυφές της F) και μάλιστα μη-εκφυλισμένες:

$$\underline{x}_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{9}{2} \right)', \quad \underline{x}_2 = (0, 1, 0, 6)', \quad \underline{x}_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right)'$$

Βάσει του Θεωρήματος 5.2, η άριστη λύση είναι μία τουλάχιστον από αυτές. Οι αντίστοιχες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_1) &= 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 6 \\ f(\underline{x}_2) &= 5 \cdot 1 + 6 = 11 \\ f(\underline{x}_3) &= -2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 3,5 \end{aligned}$$

Η λύση που δίνει τη μέγιστη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση είναι η $\underline{x}_2$, άρα αυτή είναι και η άριστη λύση. Στο αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης η άριστη λύση είναι η $\underline{x}_3$.

Η μέθοδος Simplex

1. Εισαγωγή

Η μέθοδος Simplex είναι η απλούστερη μέθοδος για την εύρεση της άριστης λύσης ενός προβλήματος Γ.Π.. Σύμφωνα με αυτή, από μία κορυφή $\underline{x}_1$ πηγαίνουμε σε μία καλύτερη κορυφή $\underline{x}_2$ που δίνει μεγαλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση, δηλαδή $\underline{c}'\underline{x}_2 > \underline{c}'\underline{x}_1$. Έτσι, αφού εξετάζουμε μόνο κορυφές, ή ισοδύναμα βασικές εφικτές λύσεις και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης βελτιώνεται σε κάθε βήμα της μεθόδου, φθάνουμε τελικά, μετά από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων στην άριστη λύση του προβλήματος. Για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex πρέπει:

- (1) Το πρόβλημα Γ.Π. να είναι σε κανονική μορφή.
- (2) Να είναι γνωστή μία αρχική μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση.

Ξεκινώντας από τη λύση $\underline{x}_0$ ελέγχουμε εάν είναι άριστη και σε αντίθετη περίπτωση βρίσκουμε μία καλύτερη βασική εφικτή λύση $\underline{x}_1$, εάν υπάρχει. Χρειαζόμαστε ένα κριτήριο για να αποφασίζουμε κάθε φορά εάν η βασική εφικτή λύση είναι άριστη ή όχι. Το κριτήριο αυτό στηρίζεται στις διαφορές $z_j - c_j$ και ορίζεται από τα επόμενα δύο θεωρήματα, τα οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη. Για τις αποδείξεις, παραπέμπουμε στο Παράρτημα των παρόντων Σημειώσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1. *Εάν $z_j - c_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, n$, τότε η μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underline{x}_0$ είναι βέλτιστη.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2. *Εάν $z_j - c_j < 0$, για ένα τουλάχιστον $j, j = 1, \dots, n$, τότε η μη-εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underline{x}_0$ δεν είναι άριστη.*

Εάν η F είναι φραγμένο σύνολο, τότε προκύπτει το ακόλουθο Πρόσμα, του οποίου η απόδειξη παρουσιάζεται στο Παράρτημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.3. *Εάν $z_j - c_j < 0$ για ένα τουλάχιστον $j, j = 1, \dots, n$ και η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο, τότε υπάρχει βασική εφικτή λύση $\underline{x}_1$ καλύτερη από την $\underline{x}_0$.*

2. Ο αλγόριθμος Simplex

Τα διαδοχικά βήματα της μεθόδου Simplex μπορούν να εκτελεσθούν με τη βοήθεια μίας σειράς πινάκων που είναι γνωστοί ως tableaux Simplex. Ο αλγόριθμος Simplex θα αναπτυχθεί κάνοντας την υπόθεση ότι ο πίνακας A περιέχει τον $m \times m$ μοναδιαίο πίνακα I , ο οποίος μας δίνει μία πρώτη αρχική βασική λύση. Η αρχική βασική

εφικτή λύση δίνεται από το διάνυσμα $\underline{b}$ των σταθερών όρων. Εάν όλα τα στοιχεία του $\underline{b}$ είναι μη-μηδενικά, άρα θετικά (διότι το πρόβλημα Γ.Π. είναι σε κανονική μορφή), η λύση αυτή είναι μη εκφυλισμένη και έτσι έχουμε όλες τις προϋποθέσεις για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex. Σε επόμενα εδάφια θα δούμε τί γίνεται όταν ο πίνακας A δεν περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα.

Ο αλγόριθμος

- (1) Σχηματίζουμε έναν $(m+1) \times (n+4)$ πίνακα (tableau), στην πρώτη στήλη του οποίου αναγράφονται οι βασικές στήλες, στη δεύτερη οι τιμές των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης, στην τρίτη η αρχική βασική εφικτή λύση, στις επόμενες m τα στοιχεία των στηλών του A , ενώ η τελευταία στήλη του tableau μένει προσωρινά κενή. Στην τελευταία γραμμή γράφεται η τιμή z_0 της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στην αρχική λύση $\underline{x}_0$ και οι τιμές των διαφορών $z_k - c_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Για ευκολία στους υπολογισμούς προσθέτουμε δύο ακόμα γραμμές, κοινές για όλα τα tableaux όπου στην πρώτη γράφουμε τις τιμές όλων των c_k και στη δεύτερη τα ονόματα των στηλών του tableau. Υποθέτοντας ότι ο μοναδιαίος πίνακας σχηματίζεται από τις πρώτες m στήλες του A , το αρχικό tableau έχει την παρακάτω μορφή:

			c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	$\dots$	c_n	
B	$\underline{c}_B$	$\underline{b}$	$\underline{P}_1$	$\underline{P}_2$	$\dots$	$\underline{P}_m$	$\underline{P}_{m+1}$	$\underline{P}_{m+2}$	$\dots$	$\underline{P}_n$	Θ
$\underline{P}_1$	c_1	x_{10}	1	0	$\dots$	0	$x_{1,m+1}$	$x_{1,m+2}$	$\dots$	x_{1n}	
$\underline{P}_2$	c_2	x_{20}	0	1	$\dots$	0	$x_{2,m+1}$	$x_{2,m+2}$	$\dots$	x_{2n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$\underline{P}_m$	c_m	x_{m0}	0	0	$\dots$	1	$x_{m,m+1}$	$x_{m,m+2}$	$\dots$	x_{mn}	
		z_0	0	0	$\dots$	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$	$z_{m+2} - c_{m+2}$	$\dots$	$z_n - c_n$	

- (2) Ελέγχουμε εάν η λύση $\underline{x}_0$ είναι άριστη, εξετάζοντας τις διαφορές $z_k - c_k$.
- (α') Εάν $z_k - c_k \geq 0$ για όλα τα k , η λύση $\underline{x}_0$ είναι άριστη.
- (β') Εάν $z_j - c_j < 0$ και $x_{ij} \leq 0 \ \forall \ i = 1, 2, \dots, m$ για κάποιο j , τότε το πρόβλημα Γ.Π. είναι μη-φραγμένο.
- (γ') Εάν οι 2α', 2β' δεν ισχύουν τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον j : $z_j - c_j < 0$ και $x_{ij} > 0$ για ένα τουλάχιστον i και αυτό για κάθε τέτοιο j . Πάμε στο επόμενο βήμα.
- (3) Η στήλη $\underline{P}_j$ που γίνεται **βασική** ορίζεται από τη σχέση

$$\underline{P}_j : |z_j - c_j| = \max_k \{|z_k - c_k| : z_k - c_k < 0\}$$

- (4) Γράφουμε στην τελευταία στήλη τους λόγους $\frac{x_{s0}}{x_{sj}}$ για $x_{sj} > 0$ δηλαδή τους λόγους των στοιχείων της στήλης $\underline{b}$ με τα αντίστοιχα θετικά στοιχεία της στήλης $\underline{P}_j$. Η στήλη $\underline{P}_i$ που «φεύγει» από τη βάση

ορίζεται από τη σχέση:

$$\underline{P}_i : \frac{x_{i0}}{x_{ij}} = \min_s \left\{ \frac{x_{s0}}{x_{sj}} : x_{sj} > 0 \right\}$$

- (5) Το στοιχείο x_{ij} το οποίο σημειώνουμε με ένα τετράγωνο λέγεται **πιλότος**. Τα στοιχεία x'_{sk} του επόμενου tableau ορίζονται από τις σχέσεις:

$$x'_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_{ij}}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (7)$$

$$x'_{sk} = x_{sk} - \frac{x_{ik}}{x_{ij}} x_{sj}, \quad s = 1, 2, \dots, m, m+1, \quad s \neq i \quad (8)$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

όπου $x_{m+10} = z_0$, $x_{m+1k} = z_k - c_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Δηλαδή η i γραμμή του νέου tableau (Γ'_i) προκύπτει από την i γραμμή του προηγούμενου tableau (Γ_i) όταν αυτή διαιρεθεί με τον πιλότο ($\Gamma'_i = \frac{1}{x_{ij}}\Gamma_i$), ενώ η s , $s \neq i$ γραμμή του νέου tableau (Γ'_s) προκύπτει από την s γραμμή (Γ_s) του προηγούμενου tableau όταν από αυτή αφαιρεθεί η γραμμή Γ'_i πολλαπλασιασμένη με το s στοιχείο x_{sj} της στήλης του πιλότου ($\Gamma'_s = \Gamma_s - x_{sj}\Gamma'_i$).

- (6) Πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

Σχηματικά τα δύο διαδοχικά tableaux έχουν την παρακάτω μορφή:

B	$\underline{c}_B$	$\underline{b}$	c_1	$\dots$	c_i	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_j	$\dots$	c_n	Θ	
$\underline{P}_1$	c_1	x_{10}	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$x_{1,m+1}$	$\dots$	x_{1j}	$\dots$	x_{1n}	$\frac{x_{10}}{x_{1j}}$	Γ_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underline{P}_i$	c_i	x_{i0}	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$x_{i,m+1}$	$\dots$	x_{ij}	$\dots$	x_{in}	$\frac{x_{i0}}{x_{ij}}$	Γ_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underline{P}_m$	c_m	x_{m0}	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$x_{m,m+1}$	$\dots$	x_{mj}	$\dots$	x_{mn}	$\frac{x_{m0}}{x_{mj}}$	Γ_m
		z_0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$	$\dots$	$z_j - c_j$	$\dots$	$z_n - c_n$	$\dots$	Γ_{m+1}
$\underline{P}_1$	c_1	x'_{10}	1	$\dots$	x'_{1i}	$\dots$	0	$x'_{1,m+1}$	$\dots$	0	$\dots$	x'_{1n}		$\Gamma'_1 = \Gamma_1 - x_{1j}\Gamma'_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$
$\underline{P}_i$	c_i	x'_{i0}	1	$\dots$	x'_{ii}	$\dots$	0	$x'_{i,m+1}$	$\dots$	1	$\dots$	x'_{in}		$\Gamma'_i = \frac{1}{x_{ij}}\Gamma_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$
$\underline{P}_m$	c_m	x'_{m0}	0	$\dots$	x'_{mi}	$\dots$	0	$x'_{m,m+1}$	$\dots$	0	$\dots$	x'_{mn}		$\Gamma'_m = \Gamma_m - x_{mj}\Gamma'_i$
		z'_0	0	$\dots$	$z'_i - c_i$	$\dots$	0	$z'_{m+1} - c_{m+1}$	$\dots$	0	$\dots$	$z'_n - c_n$		$\Gamma'_{m+1} = \Gamma_{m+1} - (z_j - c_j)\Gamma'_i$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.1. (1) Οι στήλες κάθε tableau που αντιστοιχούν κάθε φορά στις βασικές στήλες του πίνακα A έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα με μηδέν εκτός του στοιχείου της αντίστοιχης γραμμής που είναι ίσο με 1.

- (2) Εφόσον η βέλτιστη λύση βρίσκεται, όταν $z_k - c_k \geq 0$ για όλα τα k συμφέρει σε κάθε tableau να υπολογίσουμε, μετά τη γραμμή του πιλότου, πρώτα τη γραμμή των διαφορών $z_k - c_k$ και μετά τα υπόλοιπα στοιχεία του tableau εάν αυτό είναι απαραίτητο δηλαδή εάν δεν έχει βρεθεί ακόμη η βέλτιστη λύση.
- (3) Στα Βήματα 3 και 4 εάν υπάρχουν περισσότερα από ένα j ή i που πληρούν τα αντίστοιχα κριτήρια διαλέγουμε ένα από αυτά αυθαίρετα.
- (4) Το κριτήριο του Βήματος 3 μπορεί να αντικατασταθεί από το:

$$\underline{P}_j : \frac{x_{i0}}{x_{ij}} |z_j - c_j| = \max_{k,s} \left\{ \frac{x_{s0}}{x_{sk}} |z_k - c_k| \text{ ώστε } z_k - c_k < 0, x_{sk} > 0 \right\}.$$

Λόγω της πολυπλοκότητας του αυτό το κριτήριο δεν χρησιμοποιείται στην πράξη εκτός από την περίπτωση όπου υπάρχουν δύο ή περισσότερα j με την ίδια μέγιστη κατά απόλυτη τιμή αρνητική διαφορά $z_j - c_j$.

- (5) Για τις βασικές στήλες κάθε tableau οι αντίστοιχες διαφορές $z_k - c_k$ είναι όλες ίσες με μηδέν. Μερικές φορές όμως συμβαίνει $z_k - c_k = 0$ για κάποια στήλη $\underline{P}_k$ που δεν είναι βασική. Τότε εισάγοντας την $\underline{P}_k$ στη βάση καταλήγουμε σε μία άλλη λύση που δίνει την ίδια προηγούμενη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Έτσι, εάν στο tableau που δίνει την άριστη λύση είναι $z_k - c_k = 0$ για κάποια στήλη $\underline{P}_k$ που δεν είναι βασική αυτό σημαίνει ότι υπάρχει εναλλακτική άριστη βασική εφικτή λύση και επομένως το πρόβλημα Γ.Π. έχει άπειρο πλήθος άριστων λύσεων σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2. Να λυθεί με τον αλγόριθμο Simplex το πρόβλημα Γ.Π. $\max(5x_1 - 4x_2)$ με τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq -6 \\ 3x_1 - 2x_2 &\leq 24 \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ 8. Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι:

$$\begin{aligned} &\max(5x_1 - 4x_2) \\ x_1 &- x_2 + x_3 &&= 6 \\ 3x_1 &- 2x_2 &+ x_4 &= 24 \\ -2x_1 &+ 3x_2 &&+ x_5 = 9 \\ &&&&x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \end{aligned}$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$\max \underline{c}' \underline{x}$$

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

όπου

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας A περιέχει τον 3×3 μοναδιαίο πίνακα, ο οποίος μας δίνει την πρώτη βάση $B = (\underline{P}_3, \underline{P}_4, \underline{P}_5)$. Επομένως, έχουμε την προφανή αρχική βασική εφικτή λύση $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 6, x_4 = 24, x_5 = 9$ ή $\underline{x}_0 = (0, 0, 6, 24, 9)'$ η οποία είναι μη-εκφυλισμένη διότι $r(A) = 3$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο *Simplex*.

1ο tableau: $z_1 - c_1 = -5 < 0$, άρα η στήλη $\underline{P}_1$ μπαίνει στη βάση. Τότε $\min \left\{ \frac{6}{1}, \frac{24}{3} \right\} = \frac{6}{1}$, άρα η στήλη $\underline{P}_3$ φεύγει από τη βάση. Πιλότος είναι το $x_{11} = 1$.

Πάμε στο 2ο tableau με τους τύπους (7), (8) του Βήματος 5.

2ο tableau: $z_2 - c_2 = -1 < 0$, άρα η στήλη $\underline{P}_2$ μπαίνει στη βάση. Τότε $\min \left\{ \frac{6}{1}, \frac{21}{1} \right\} = \frac{6}{1}$, άρα η στήλη $\underline{P}_4$ βγαίνει από τη βάση. Πιλότος είναι το στοιχείο $x'_{22} = 1$. Πάμε στο 3ο tableau με τους τύπους (7), (8) του Βήματος 5.

3ο tableau: $z_k - c_k \geq 0, k = 1, 2, 3, 4, 5$, άρα βρέθηκε η άριστη λύση που είναι: $x_1 = 12, x_2 = 6, x_5 = 15$ ή $\underline{x} = (12, 6, 0, 0, 15)'$. Η αντίστοιχη άριστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι: $z = 36$.

B	$\underline{c}_B$	$\underline{b}$	5	-4	0	0	0	Θ	
$\underline{P}_3$	0	6	1	-1	1	0	0	$\frac{6}{1}$	Γ_1
$\underline{P}_4$	0	24	3	-2	0	1	0	$\frac{24}{3}$	Γ_2
$\underline{P}_5$	0	9	-2	3	0	0	1	-	Γ_3
	z	0	-5	4	0	0	0		Γ_4
$\underline{P}_1$	5	6	1	-1	1	0	0	-	$\Gamma'_1 = \Gamma_1$
$\underline{P}_4$	0	6	0	1	-3	1	0	$\frac{6}{1}$	$\Gamma'_2 = \Gamma_2 - 3\Gamma'_1$
$\underline{P}_5$	0	21	0	1	2	0	1	$\frac{21}{1}$	$\Gamma'_3 = \Gamma_3 - (-2)\Gamma'_1$
	z	30	0	-1	5	0	0		$\Gamma'_4 = \Gamma_4 - (-5)\Gamma'_1$
$\underline{P}_1$	5	12							
$\underline{P}_2$	-4	6	0	1	-3	1	0		$\Gamma''_2 = \frac{\Gamma'_2}{1}$
$\underline{P}_5$	0	15							
	z	36	0	0	2	1	0		$\Gamma''_4 = \Gamma'_4 - (-1)\Gamma''_2$

3. Τεχνητές Μεταβλητές: Η μέθοδος M

Η εφαρμογή του αλγορίθμου Simplex προϋποθέτει αφενός μεν ότι το πρόβλημα Γ.Π. είναι σε κανονική μορφή και αφετέρου ότι ο αντίστοιχος πίνακας A περιέχει τον $m \times m$ μοναδιαίο πίνακα I , ο οποίος μας δίνει και την πρώτη βασική εφικτή λύση. Ενώ κάθε πρόβλημα Γ.Π. μπορεί να τεθεί σε κανονική μορφή με τη χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών, ο μοναδιαίος πίνακας δεν σχηματίζεται πάντοτε από στήλες του A . Σε μία τέτοια περίπτωση θα πρέπει να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα Γ.Π. σε ένα ισοδύναμο που να περιέχει το μοναδιαίο πίνακα και φυσικά να είναι σε κανονική μορφή. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο των τεχνητών μεταβλητών. Βρίσκουμε την άριστη λύση, με την μέθοδο αυτή, εφαρμόζοντας τη μέθοδο Simplex πρώτα σε ένα διαφορετικό πρόβλημα Γ.Π. που είναι σε κανονική μορφή και περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα. Οι περιορισμοί του νέου αυτού προβλήματος Γ.Π. σχηματίζονται από τους περιορισμούς του αρχικού όπου έχουμε προσθέσει σε όσες εξισώσεις χρειάζεται από μία μη-αρνητική μεταβλητή (τεχνητή μεταβλητή) ώστε να δημιουργείται ο μοναδιαίος πίνακας. Η αντικειμενική συνάρτηση του νέου προβλήματος Γ.Π. ορίζεται έτσι ώστε η άριστη λύση του να μην περιέχει τεχνητές μεταβλητές ως βασικές. Έτσι, αφού οι θετικές συντεταγμένες της άριστης λύσης του αντιστοιχούν όλες σε κανονικές μεταβλητές έχουμε αμέσως μία βασική εφικτή και ίσως άριστη λύση του αρχικού προβλήματος. Έστω $\underline{y} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k})'$, όπου $k \leq m$, το διάνυσμα των τεχνητών μεταβλητών και $\tilde{A} \in M_{m \times (n+k)}$ ο επαυξημένος με τις μοναδιαίες στήλες των τεχνητών μεταβλητών πίνακας του A . Ο $\tilde{A}$ περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα. Σύμφωνα με την μέθοδο M ορίζουμε τους συντελεστές $\tilde{c}_i = c_i$, $i = 1, \dots, n$, $\tilde{c}_i = M$, $i = n+1, \dots, n+k$ όπου M αυθαίρετα μικρός αρνητικός αριθμός ($M \ll 0$) στον οποίο δε χρειάζεται να δώσουμε συγκεκριμένη τιμή. Ορίζουμε ως αντικειμενική συνάρτηση του νέου προβλήματος Γ.Π. τη συνάρτηση:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + M x_{n+1} + \dots + M x_{n+k}$$

ή πιο συνοπτικά: $\underline{c}'\underline{x} + \underline{M}'\underline{y}$, όπου $\underline{M} = (M, M, \dots, M)'$ και $M \ll 0$. Έχουμε να λύσουμε το νέο πρόβλημα Γ.Π. $\max(\underline{c}'\underline{x} + \underline{M}'\underline{y})$ με περιορισμούς:

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = \underline{b}, \quad \underline{x} \geq 0, \quad \underline{y} \geq 0$$

Εάν το αρχικό πρόβλημα Γ.Π. έχει εφικτή λύση, έστω $\underline{x}_0$ τότε η $\begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι εφικτή λύση του νέου προβλήματος Γ.Π. και καλύτερη από κάθε άλλη εφικτή λύση που έχει μία τουλάχιστον **τεχνητή** μεταβλητή με θετική τιμή εφόσον $M \ll 0$. Άρα σ' αυτή την περίπτωση η άριστη λύση του νέου προβλήματος Γ.Π. θα έχει όλες τις τεχνητές μεταβλητές ίσες με μηδέν, θα είναι δηλαδή της μορφής $\begin{pmatrix} \underline{\hat{x}} \\ 0 \end{pmatrix}$. Τότε προφανώς η $\underline{\hat{x}}$ είναι άριστη λύση του αρχικού προβλήματος Γ.Π.. Φυσικά, εάν στην άριστη λύση του νέου προβλήματος Γ.Π. υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές με θετική τιμή, αυτό σημαίνει ότι το αρχικό πρόβλημα Γ.Π. δεν έχει εφικτές λύσεις. Κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου Simplex, κάθε τεχνητή **στήλη** που φεύγει από τη βάση μπορεί να διαγράφεται, εφόσον δεν πρόκειται να ξαναγίνει βασική σε επόμενα tableaux.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1. Να λυθεί με την M -μέθοδο το πρόβλημα Γ.Π.

$$\max(2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4)$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_3 - 3x_4 &= 3 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ 9. Το πρόβλημα Γ.Π. είναι σε κανονική μορφή. Με μορφή πινάκων γράφεται:

$$\max \underline{c}' \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0},$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας A περιέχει μόνο την πρώτη στήλη του 3×3 μοναδιαίου πίνακα και έτσι δεν υπάρχει προφανής βασική εφικτή λύση. Εισάγοντας από μία τεχνητή μεταβλητή στη δεύτερη και τρίτη εξίσωση, παίρνουμε το νέο σύστημα περιορισμών:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 6 \\ 2x_3 - 3x_4 + x_6 &= 3 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα με μορφή πινάκων

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = \underline{b}, \quad \text{όπου } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}.$$

Στο νέο σύστημα, ο πίνακας A έχει επεκταθεί στον πίνακα $\tilde{A}$ που περιέχει όλες τις στήλες του 3×3 μοναδιαίου πίνακα και δίνει την αρχική βασική εφικτή λύση: $x_1 = 8, x_2 = x_3 = x_4 = 0, x_5 = 6, x_6 = 3$ ή $\underline{x} = (8, 0, 0, 0, 6, 3)'$. Εισάγοντας τις τεχνητές μεταβλητές x_5, x_6 στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστή M αυθαίρετα μικρό αρνητικό αριθμό και εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο *Simplex* στο νέο πρόβλημα έχουμε:

B	c_B	b	$\underline{P}_1$	$\underline{P}_2$	$\underline{P}_3$	$\underline{P}_4$	$\underline{P}_5$	$\underline{P}_6$	θ	
$\underline{P}_1$	2	8	1	2	1	2	0	0	8	Γ_1
$\underline{P}_5$	M	6	0	1	1	1	1	0	6	Γ_2
$\underline{P}_6$	M	3	0	0	2	-3	0	1	3/2	Γ_3
z		$16 + 9M$	0	$7 + M$	$1 + 3M$	$2 - 2M$	0	0		
$\underline{P}_1$	2	$\frac{13}{2}$	1	2	0	$\frac{7}{2}$	0		$\frac{13}{7}$	$\Gamma'_1 = \Gamma_1 - \Gamma'_3$
$\underline{P}_5$	M	$\frac{9}{2}$	0	1	0	5/2	1		9/5	$\Gamma'_2 = \Gamma_2 - \Gamma'_3$
$\underline{P}_3$	1	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0		-	$\Gamma'_3 = \frac{1}{2}\Gamma_3$
z		$\frac{29}{2} + \frac{9}{2}M$	0	$7 + M$	0	$7/2 + 5M/2$	0			
$\underline{P}_1$	2	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	0	0				$\Gamma''_1 = \Gamma'_1 - \frac{7}{2}\Gamma''_2$
$\underline{P}_4$	2	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	1				$\Gamma''_2 = \frac{2}{5}\Gamma'_2$
$\underline{P}_3$	1	$\frac{21}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0				$\Gamma''_3 = \Gamma'_3 + \frac{3}{2}\Gamma''_2$
z		$\frac{41}{5}$	0	$\frac{28}{5}$	0	0				

Στο τρίτο tableau, όλες οι διαφορές $z_k - c_k$ είναι μη-αρνητικές. Άρα η βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος Γ.Π. είναι η $\underline{x} = (\frac{1}{5}, 0, \frac{21}{5}, \frac{9}{5})'$, και η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $z = \frac{41}{5}$.

4. Η μέθοδος των δύο φάσεων

Έστω $\underline{y} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k})'$ το διάνυσμα των τεχνητών μεταβλητών και $\tilde{A} \in M_{m \times (n+k)}$ ο αντίστοιχος επανυξημένος πίνακας του A . Σύμφωνα με τη μέθοδο των δύο φάσεων ορίζουμε:

$$\tilde{c}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \tilde{c}_i = 1, \quad i = n+1, \dots, n+k$$

δηλαδή ορίζουμε ως αντικειμενική συνάρτηση το άθροισμα των τεχνητών μεταβλητών:

$$x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+k},$$

και το νέο πρόβλημα Γ.Π. είναι: $z_1 = \min \underline{1}'\underline{y}$, $\underline{1}' = (1, 1, \dots, 1)$ με περιορισμούς: $\tilde{A} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = \underline{b}$, $\underline{x} \geq \underline{0}$, $\underline{y} \geq \underline{0}$. Η μέθοδος εφαρμόζεται σε δύο φάσεις, τις παρακάτω:

ΦΑΣΗ I: Βρίσκουμε την άριστη λύση του νέου προβλήματος Γ.Π.. Εφόσον οι τεχνητές μεταβλητές είναι μη-αρνητικές θα είναι $z_1 \geq 0$. Εάν $z_1 = 0$, τότε η άριστη λύση έχει όλες τις τεχνητές μεταβλητές ίσες με μηδέν, δηλαδή είναι της μορφής $\begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{0} \end{pmatrix}$. Η $\underline{x}_0$ είναι η αρχική βασική εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος Γ.Π.. Εάν $z_1 > 0$, αυτό σημαίνει ότι το αρχικό πρόβλημα Γ.Π. δεν έχει εφικτή λύση.

ΦΑΣΗ II: Λύνουμε το αρχικό πρόβλημα Γ.Π. Ξεκινώντας από το τελικό tableau της Φάσης I και διαγράφοντας τις στήλες των τεχνητών μεταβλητών. Φυσικά, ως συντελεστές κόστους θέτουμε τα αρχικά c_i και υπολογίζουμε από την αρχή τη γραμμή των διαφορών $z_j - c_j$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1. Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα Γ.Π. 3.1 με τη μέθοδο των δύο φάσεων.

ΛΥΣΗ 10. Στην πρώτη φάση λύνουμε το πρόβλημα Γ.Π. $z_1 = \min(x_5 + x_6)$ ή $z_1 = -\max(-x_5 - x_6)$ κάτω από τις νέες συνθήκες και στη δεύτερη φάση λύνουμε το αρχικό πρόβλημα.

ΦΑΣΗ I

B	c_B	b	0	0	0	0	-1	-1	θ	
$\underline{P}_1$			$\underline{P}_1$	$\underline{P}_2$	$\underline{P}_3$	$\underline{P}_4$	$\underline{P}_5$	$\underline{P}_6$		
$\underline{P}_1$	0	8	1	2	1	2	0	0	$\frac{8}{1}$	Γ_1
$\underline{P}_5$	-1	6	0	1	1	1	1	0	$\frac{6}{1}$	Γ_2
$\underline{P}_6$	-1	3	0	0	2	-3	0	1	3/2	Γ_3
z		-9	0	-1	-3	2	0	0		Γ_4
$\underline{P}_1$	0	$\frac{13}{2}$	1	2	0	$\frac{7}{2}$	0		$\frac{13}{7}$	$\Gamma'_1 = \Gamma_1 - \Gamma'_3$
$\underline{P}_5$	-1	$\frac{9}{2}$	0	1	0	5/2	1		9/5	$\Gamma'_2 = \Gamma_2 - \Gamma'_3$
$\underline{P}_3$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0		-	$\Gamma'_3 = \frac{1}{2}\Gamma_3$
z		$-\frac{9}{2}$	0	-1	0	-5/2	0			$\Gamma'_4 = \Gamma_4 + 3\Gamma'_3$
$\underline{P}_1$	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	0	0				$\Gamma''_1 = \Gamma'_1 - \frac{7}{2}\Gamma''_2$
$\underline{P}_4$	0	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	1				$\Gamma''_2 = \frac{2}{5}\Gamma'_2$
$\underline{P}_3$	0	$\frac{21}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0				$\Gamma''_3 = \Gamma'_3 + \frac{3}{2}\Gamma''_2$
z		0	0	0	0	0				$\Gamma''_4 = \Gamma'_4 + \frac{5}{2}\Gamma''_2$

Στο πρώτο tableau της Φάσης II είναι $z_k - c_k \geq 0$ για όλα τα k . Άρα, βρήκαμε την άριστη λύση που είναι η: $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{21}{5}$, $x_4 = \frac{9}{5}$ ή $\underline{x} = (\frac{1}{5}, 0, \frac{21}{5}, \frac{9}{5})'$ με $z = \frac{41}{5}$.

ΦΑΣΗ II

B	c_B	b	2	-3	1	2	θ
$\underline{P}_1$			$\underline{P}_1$	$\underline{P}_2$	$\underline{P}_3$	$\underline{P}_4$	
$\underline{P}_1$	2	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	0	0	
$\underline{P}_4$	2	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	1	
$\underline{P}_3$	1	$\frac{21}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	
z		$\frac{41}{5}$	0	$\frac{28}{5}$	0	0	

Δυϊκό πρόβλημα και ανάλυση ευαισθησίας

1. Δυϊκό πρόβλημα

Σε κάθε πρόβλημα Γ.Π. αντιστοιχεί ένα άλλο πρόβλημα Γ.Π., το δυϊκό του, που έχει ξεχωριστή σημασία και ιδιότητες και του οποίου η βέλτιστη λύση συνδέεται άμεσα με τη βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος Γ.Π.. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1. Ένα πρόβλημα Γ.Π. είναι σε ημικανονική μορφή, εάν έχει τη μορφή $(\pm) \max \underline{c}' \underline{x}$ με περιορισμούς $A\underline{x} \leq \underline{b}$, $\underline{x} \geq \underline{0}$, όπου $\underline{c}, \underline{x} \in M_{n \times 1}$, $\underline{b} \in M_{m \times 1}$, $A \in M_{m \times n}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.1. (1) Σε αντίθεση με την κανονική μορφή, στην ημικανονική μορφή το διάνυσμα $\underline{b}$ των σταθερών όρων δεν είναι κατ' ανάγκην μη-αρνητικό. Επίσης δεν έχουμε εξισώσεις αλλά ανισώσεις, της ίδιας φοράς. Έτσι, εάν το αρχικό πρόβλημα περιέχει μία εξίσωση π.χ. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$, την αντικαθιστούμε με το ισοδύναμο σύστημα των ανισώσεων:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \text{ και}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

και μετά αλλάζουμε τη φορά της δεύτερης πολλαπλασιάζοντας την με (-1) .

(2) Από την Παρατήρηση 1 και το γεγονός ότι κάθε πρόβλημα Γ.Π. μπορεί να τεθεί σε κανονική μορφή είναι προφανές ότι κάθε πρόβλημα Γ.Π. μπορεί επίσης να τεθεί σε ημι-κανονική μορφή.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2. Έστω το πρόβλημα Γ.Π. σε ημικανονική μορφή:

$$(\pm) \max \underline{c}' \underline{x}$$

$$A\underline{x} \leq \underline{b} \quad (\Pi)$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

όπου $\underline{c}, \underline{x} \in M_{n \times 1}$, $\underline{b} \in M_{m \times 1}$, $A \in M_{m \times n}$. Ορίζουμε ως δυϊκό πρόβλημα του (Π) , το πρόβλημα Γ.Π.

$$(\pm) \min \underline{b}' \underline{w}$$

$$A' \underline{w} \geq \underline{c} \quad (\Delta)$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

όπου $\underline{w} \in M_{m \times 1}$, $A' \in M_{n \times m}$ είναι ο ανάστροφος του πίνακα A . Το πρόβλημα Γ.Π. (Π) αναφέρεται ως πρωτεύον.

□

2. Οικονομική Ερμηνεία του δυϊκού προβλήματος Γ.Π.

Το δυϊκό πρόβλημα έχει μία ενδιαφέρουσα οικονομική ερμηνεία για την κατηγορία των προβλημάτων Γ.Π. σε ημικανονική μορφή με όλους τους συντελεστές μη-αρνητικούς. Θεωρούμε το πρόβλημα Γ.Π. (Π) με c_j , b_i , $a_{ij} \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m$. Ένα τέτοιο πρόβλημα Γ.Π. μπορεί να ερμηνευθεί ως πρόβλημα παραγωγής στο οποίο ένας παραγωγός έχει τη δυνατότητα να παράγει n διαφορετικά προϊόντα $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ χρησιμοποιώντας m διαφορετικά υλικά $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$. Οι παράμετροι του προβλήματος είναι:

- c_j : το κέρδος από μία μονάδα του προϊόντος Π_j ,
- a_{ij} : η απαιτούμενη ποσότητα από το υλικό Y_i για την παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος Π_j ,
- b_i : διαθέσιμη ποσότητα του υλικού Y_i ,

ενώ οι μεταβλητές είναι

- x_j : η παραγόμενη ποσότητα του προϊόντος Π_j .

Έτσι, η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει το συνολικό κέρδος από την πώληση των προϊόντων. Ο i -περιορισμός εκφράζει την απαίτηση ότι:

$$\begin{pmatrix} \text{η συνολική ποσότητα} \\ \text{του υλικού } Y_i \text{ που} \\ \text{καταναλώνεται} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \text{Διαθέσιμη} \\ \text{ποσότητα} \\ \text{του υλικού } Y_i \end{pmatrix}$$

Οι περιορισμοί μη-αρνητικότητας εκφράζουν τη φυσική απαίτηση οι ποσότητες παραγωγής των προϊόντων να είναι μη-αρνητικές. Το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους από την πώληση των προϊόντων. Έστω ότι κάποιος ενδιαφέρεται να αγοράσει τα υλικά που υπάρχουν στο πρόβλημα και προσπαθεί να διαμορφώσει τις τιμές που θα δώσει για κάθε μονάδα υλικού ώστε να δελεάσει τον παραγωγό. Έστω,

- w_i : η αξία μίας μονάδας του υλικού i .

Για να δελεαστεί ο παραγωγός και να πουλήσει τα υλικά θα πρέπει για κάθε προϊόν j :

$$\begin{pmatrix} \text{Αξία των υλικών για} \\ \text{την παραγωγή μίας} \\ \text{μονάδας του προϊόντος } j \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \text{Τιμή μίας} \\ \text{μονάδας} \\ \text{του προϊόντος } j \end{pmatrix}$$

και όλες οι μοναδιαίες τιμές των υλικών να είναι μη-αρνητικές. Όμως η αξία των υλικών για την παραγωγή μίας μονάδας του προϊόντος j είναι: $a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{mj}w_m$, άρα οι περιορισμοί γίνονται:

$$\begin{aligned} a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m &\geq c_1 \\ a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m &\geq c_2 \\ &\vdots \\ a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m &\geq c_n \\ w_1, w_2, \dots, w_n &\geq 0. \end{aligned}$$

Το ζητούμενο είναι να πληρωθούν τα λιγότερα δυνατά χρήματα στον παραγωγό για την αγορά των υλικών, δηλαδή $\min(b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_mw_m)$. Το πρόβλημα είναι ακριβώς το δυϊκό πρόβλημα Γ.Π. (Δ) του (Π).

Συμπερασματικά, έστω ένα πρόβλημα Γ.Π. για τη μεγιστοποίηση του κέρδους από την παραγωγή n προϊόντων με m υλικά, όπου είναι γνωστές οι n τιμές των μονάδων προϊόντων, οι m διαθέσιμες ποσότητες των υλικών και οι $m \times n$ ποσότητες των υλικών που χρειάζονται για την παραγωγή μίας μονάδας κάθε προϊόντος. Οι n μεταβλητές του προβλήματος Γ.Π. αφορούν τον αριθμό των προϊόντων που πρέπει να παραχθούν. Το δυϊκό πρόβλημα Γ.Π. αφορά τον προσδιορισμό των m τιμών των μονάδων των υλικών ώστε να δελεαστεί ο παραγωγός να πουλήσει τα υλικά. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1. Θεωρούμε ένα εργοστάσιο κατεργασίας μεταλλευμάτων το οποίο παράγει δύο κράματα:

- (1) το Cu-Fe κράμα με τιμή 3.000€ ανά μονάδα.
- (2) το Zn-Fe κράμα με τιμή 5.000€ ανά μονάδα.

Για την παραγωγή μίας μονάδας κράματος απαιτούνται οι μονάδες υλικών που φαίνονται στον πίνακα:

Κράμα \ Μέταλλο	Cu	Zn	Fe
Cu-Fe	1	0	3
Zn-Fe	0	2	2

Οι διαθέσιμες ποσότητες των υλικών Cu, Zn, Fe είναι 4, 12 και 18 μονάδες αντίστοιχα.

ΛΥΣΗ 11. Θέτοντας x_1, x_2 τις παραγόμενες ποσότητες των κραμάτων Cu-Fe, Zn-Fe, το πρόβλημα Γ.Π. που θα πρέπει να λύσει το εργοστάσιο για τη μεγιστοποίηση του κέρδους του είναι το:

$$\max(3x_1 + 5x_2) \leftrightarrow \text{Μεγιστοποίηση κέρδους από προϊόντα}$$

$$x_1 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\text{Απαιτούμενη ποσότητα Cu} \leq \text{Διαθέσιμη ποσότητα Cu}$$

$$2x_2 \leq 12 \Leftrightarrow$$

$$\text{Απαιτούμενη ποσότητα Zn} \leq \text{Διαθέσιμη ποσότητα Zn}$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \Leftrightarrow$$

$$\text{Απαιτούμενη ποσότητα Fe} \leq \text{Διαθέσιμη ποσότητα Fe}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{Ποσότητες των κραμάτων Cu-Fe, Zn-Fe} \geq 0.$$

Θέτοντας w_1, w_2, w_3 τις τιμές αγοράς ανά μονάδα των υλικών $\text{Cu}, \text{Zn}, \text{Fe}$, το δυϊκό πρόβλημα που πρέπει να λύσει κάποιος ο οποίος επιθυμεί την αγορά μεταλλευμάτων-υλικών είναι:

$$\min(4w_1 + 12w_2 + 18w_3) \Leftrightarrow \text{Ελαχιστοποίηση τιμής αγοράς των υλικών}$$

$$w_1 + 3w_3 \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\text{Αξία υλικών για μία μονάδα Cu-Fe} \geq \text{Τιμή μονάδας Cu-Fe}$$

$$2w_2 + 2w_3 \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\text{Αξία υλικών για μία μονάδα Zn-Fe} \geq \text{Τιμή μονάδας Zn-Fe}$$

$$w_1, w_2, w_3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{Τιμές ανά μονάδα υλικών Cu, Zn, Fe} \geq 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2. Να βρεθεί το δυϊκό του προβλήματος Γ.Π.:

$$\max(5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4)$$

$$\begin{aligned}
4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 6 \\
2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 &= 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \quad (\Pi) \\
x_3 &\leq 0 \\
x_4 &\in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

ΛΥΣΗ 12. Αντικαθιστώντας το δεύτερο περιορισμό με το ισοδύναμο σύστημα δύο ανισώσεων και θέτοντας: $x_3 = -x'_3$, $x'_3 \geq 0$, $x_4 = x'_4 - x''_4$, $x'_4, x''_4 \geq 0$, έχουμε την ημικανονική μορφή του προβλήματος.

$$\begin{aligned}
&\max(5x_1 + 3x_2 - 2x'_3 + x'_4 - x''_4) \\
4x_1 + 3x_2 - x'_3 + 2x'_4 - 2x''_4 &\leq 6 \\
2x_1 + 2x_2 - 5x'_3 + x'_4 - x''_4 &\leq 4 \quad (\Pi_1) \\
-2x_1 - 2x_2 + 5x'_3 - x'_4 + x''_4 &\leq -4 \\
x_1, x_2, x'_3, x'_4, x''_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Από τον ορισμό, το δυϊκό του (Π_1) είναι το πρόβλημα Γ.Π.:

$$\min(6w_1 + 4w_2 - 4w_3)$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
4w_1 + 2w_2 - 2w_3 &\geq 5 \\
3w_1 + 2w_2 - 2w_3 &\geq 3 \\
-w_1 - 5w_2 + 5w_3 &\geq -2 \quad (\Delta_1) \\
2w_1 + w_2 - w_3 &\geq 1 \\
-2w_1 - w_2 + w_3 &\geq -1 \\
w_1, w_2, w_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Οι δύο τελευταίοι περιορισμοί μπορούν να αντικατασταθούν από μία ισοδύναμη εξίσωση. Αφού, επίσης τόσο στην αντικειμενική συνάρτηση όσο και στους περιορισμούς οι μεταβλητές w_2, w_3 εμφανίζονται πάντοτε με την μορφή της διαφοράς $w_2 - w_3$ θέτουμε $w_2 - w_3 = w'_2$, $w'_2 \in \mathbb{R}$. Τέλος, πολλαπλασιάζοντας τον τρίτο περιορισμό επί (-1) έχουμε το ισοδύναμο πρόβλημα Γ.Π.:

$$\min(6w_1 + 4w'_2)$$

$$\begin{aligned}
4w_1 + 2w'_2 &\geq 5 \\
3w_1 + 2w'_2 &\geq 3 \\
w_1 + 5w'_2 &\leq 2 \quad (\Delta) \\
2w_1 + w'_2 &= 1 \\
w_1 &\geq 0, \\
w'_2 &\in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.3. Αν το πρωτεύον πρόβλημα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
\min z &= \underline{c}' \underline{x} \\
A \underline{x} &\geq \underline{b} \\
\underline{x} &\geq \underline{0}
\end{aligned}$$

το δυϊκό του θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
\max y &= \underline{b}' \underline{u} \\
A' \underline{u} &\geq \underline{c} \\
\underline{u} &\geq \underline{0}
\end{aligned}$$

όπου, $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)'$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών του δυϊκού προβλήματος και $A' \in M_{n \times m}$ είναι ο ανάστροφος του πίνακα A . Για την αντιστοίχιση πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος ισχύουν τα ακόλουθα:

- Όταν το πρωτεύον είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης, το δυϊκό του είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης.
- Όταν ο πίνακας A των συντελεστών των μεταβλητών στους περιορισμούς του πρωτεύοντος είναι διαστάσεων $m \times n$, ο αντίστοιχος πίνακας στο δυϊκό του είναι ο ανάστροφος A' του πίνακα A , δηλαδή πίνακας διαστάσεων $n \times m$.
- Ο αριθμός των μεταβλητών στο δυϊκό είναι ίσος με τον αριθμό των περιορισμών στο πρωτεύον και ο αριθμός των περιορισμών στο δυϊκό είναι ίσος με τον αριθμό των μεταβλητών στο πρωτεύον. Υπάρχει μία ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ τους, δηλαδή σε κάθε περιορισμό του πρωτεύοντος αντιστοιχεί μία μεταβλητή του δυϊκού και σε κάθε μεταβλητή του πρωτεύοντος αντιστοιχεί ένας περιορισμός του δυϊκού.
- Ο συντελεστής της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού είναι οι σταθεροί όροι στο δεύτερο σκέλος των περιορισμών του πρωτεύοντος.
- Το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτεύον.

Όταν το πρωτεύον δεν είναι διατυπωμένο στην ημι-κανονική μορφή, η δομική αντιστοιχία πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος είναι η ακόλουθη:

Πρωτεύον πρόβλημαΠρόβλημα ελαχιστοποίησης ($\min z$)Περιορισμός i τύπου $\geq$ Περιορισμός i τύπου $\leq$ Περιορισμός i τύπου $=$ Μεταβλητή $x_j \geq 0$ Μεταβλητή $x_j \leq 0$ Μεταβλητή x_j ελεύθερου προσήμουΣυντελεστής c_j αντικειμενικής συνάρτησης z Σταθερά b περιορισμού i

Ας δούμε ένα σχετικό παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4. Έστω το ακόλουθο πρόβλημα Γ.Π.

$$\min z = 2x_1 + x_2$$

υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$2x_1 - x_2 \geq 3$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \in \mathbb{R}$$

Στο παραπάνω πρόβλημα, ο πρώτος περιορισμός είναι ισότητα και ο τρίτος περιορισμός είναι τύπου $\leq$ ενώ η μεταβλητή x_2 είναι ελεύθερη προσήμου, αφού μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θετική ή αρνητική πραγματική τιμή. Το πρωτεύον πρόβλημα δεν είναι σε ημι-κανονική μορφή, συνεπώς το δυϊκό του μπορεί να διατυπωθεί με τη βοήθεια της παραπάνω δομικής αντιστοιχίας πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος, ως εξής:

$$\max y = 2u_1 + 3u_2 + u_3$$

υπό τους περιορισμούς:

$$u_1 + 2u_2 + u_3 \leq 2$$

$$u_1 - u_2 - u_3 = 1$$

$$u_1 \in \mathbb{R}$$

$$u_2 \geq 0$$

$$u_3 \leq 0.$$

Δυϊκό πρόβλημαΠρόβλημα μεγιστοποίησης ($\max y$)Μεταβλητή $u_i \geq 0$ Μεταβλητή $u_i \leq 0$ Μεταβλητή u_i ελεύθερη προσήμουΠεριορισμός j τύπου $\leq$ Περιορισμός j τύπου $\geq$ Περιορισμός j τύπου $=$ Σταθερά περιορισμού j Συντελεστής i αντικειμενικής συνάρτησης y

3. Σχέσεις των λύσεων πρωτεύοντος (Π) και δυϊκού (Δ) προβλήματος Γ.Π.

Ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα. Για την απόδειξή του παραπέμπουμε στο Παράρτημα των παρόντων Σημειώσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1. (1) Εάν το (Π) έχει βέλτιστη λύση, τότε και το (Δ) έχει βέλτιστη λύση και οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεών τους είναι ίσες.

(2) Εάν το (Π) είναι μη-φραγμένο, τότε το (Δ) δεν έχει εφικτές λύσεις.

Ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα που συνδέει τις βέλτιστες τιμές των π.γ.π. (Π) και (Δ). Η απόδειξη του Θεωρήματος παρουσιάζεται στο Παράρτημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2. Εάν $\hat{x}, \hat{w}$ είναι οι άριστες λύσεις των π.γ.π. (Π) και (Δ) αντίστοιχα, τότε:

$$\hat{x}_i(a_{1i}\hat{w}_1 + a_{2i}\hat{w}_2 + \dots + a_{mi}\hat{w}_m - c_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ισχύει επιπλέον το ακόλουθο σημαντικό Πόρισμα, το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα να βρούμε την άριστη λύση του (Δ) όταν γνωρίζουμε την άριστη λύση του (Π) χωρίς να γνωρίζουμε το τελικό tableau της μεθόδου Simplex του (Π), λύνοντας απλά ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.3. Εάν $\hat{x}, \hat{w}$ είναι άριστες λύσεις των (Π) και (Δ) αντίστοιχα και $\hat{x}_i > 0$, τότε η $\hat{w}$ κάνει τον i -περιορισμό του (Δ) ισότητα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.4. (1) Από το Θεώρημα 3.2 και το γεγονός ότι το δυϊκό του (Δ) είναι το (Π), γίνεται φανερό ότι ισχύει και η σχέση:

$$\hat{w}_i(a_{i1}\hat{x}_1 + a_{i2}\hat{x}_2 + \dots + a_{in}\hat{x}_n - b_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(2) Όταν γνωρίζουμε την άριστη λύση του (Π) αλλά όχι και το τελικό tableau του, τότε πάλι μπορούμε να βρούμε την άριστη λύση του (Δ).

Ας δούμε ένα σχετικό παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5. Δίνεται το πρόβλημα Γ.Π.:

$$\begin{aligned} \max(2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_3 - 3x_4 &= 3 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

με άριστη λύση $\hat{x} = (\frac{1}{5}, 0, \frac{21}{5}, \frac{9}{5})'$. Να βρεθεί η άριστη λύση του δυϊκού του.

ΛΥΣΗ 13. Το δυϊκό πρόβλημα Γ.Π. είναι:

$$\begin{aligned} \min(8w_1 + 6w_2 + 3w_3) \\ w_1 &\geq 2 \\ 2w_1 + w_2 &\geq -3 \\ w_1 + w_2 + 2w_3 &\geq 1 \\ 2w_1 + w_2 - 3w_3 &\geq 2 \end{aligned}$$

Δεν γνωρίζουμε το τελικό tableau του πρωτεύοντος (Π) προβλήματος αλλά μόνο τη βέλτιστη λύση του.

Αφού οι θετικές συντεταγμένες της $\underline{x}$ είναι η πρώτη, η τρίτη και η τέταρτη, η άριστη λύση: $\hat{\underline{w}} = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3)'$ του δυϊκού προβλήματος (Δ) θα κάνει τους αντίστοιχους περιορισμούς του ισότητας. Έχουμε δηλαδή το σύστημα:

$$\begin{aligned} \hat{w}_1 &= 2 \\ \hat{w}_1 + \hat{w}_2 + 2\hat{w}_3 &= 1 \\ 2\hat{w}_1 + \hat{w}_2 - 3\hat{w}_3 &= 2 \end{aligned}$$

που έχει λύση $\hat{w}_1 = 2$, $\hat{w}_2 = -\frac{7}{5}$, $\hat{w}_3 = \frac{1}{5}$. Άρα, η άριστη λύση του δυϊκού προβλήματος Γ.Π. είναι η $\hat{\underline{w}} = (2, -\frac{7}{5}, \frac{1}{5})'$. Η βέλτιστη τιμή των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο προβλημάτων είναι $z = \frac{41}{5}$.

4. Δυϊκή μέθοδος Simplex

Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση κάθε προβλήματος Γ.Π. που έχει τεθεί σε ημι-κανονική μορφή. Αποτελείται από δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση βρίσκουμε μία βασική λύση του (Π) με $z_i - c_i \geq 0$ για όλα τα i , δηλαδή βρίσκουμε μία αρχική βασική εφικτή λύση του (Δ). Στη δεύτερη φάση διατηρώντας όλες τις διαφορές $z_i - c_i$ μη-αρνητικές βρίσκουμε μία βασική λύση του (Π) με μη-αρνητικές συντεταγμένες δηλαδή εφικτή και το πετυχαίνουμε αυτό βρίσκοντας την άριστη λύση του δυϊκού για το οποίο έχουμε από την πρώτη φάση μία αρχική βασική εφικτή λύση. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το δυϊκό αλγόριθμο Simplex.

Δυϊκός αλγόριθμος Simplex: Ξεκινάμε από το tableau Simplex στο οποίο η αντίστοιχη βασική λύση **δεν** χρειάζεται να είναι κατ' ανάγκην και εφικτή.

ΦΑΣΗ Ι:

(1) Εξετάζουμε τις διαφορές $z_k - c_k$.

(α') Εάν $z_k - c_k \geq 0$, για όλα τα k , πάμε στην Φάση ΙΙ.

(β') Εάν υπάρχει r : $z_r - c_r < 0$ και $x_{ir} < 0$ για όλα τα i , τότε το πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις ή είναι μη-φραγμένο.

(γ') Εάν οι (1α'), (1β') δεν ισχύουν, τότε διαλέγουμε μία στήλη r με $z_r - c_r < 0$ και μετά ένα θετικό στοιχείο της, έστω το $x_{ir} > 0$. Η στήλη $\underline{P}_i$ φεύγει από τη βάση.

(2) Η στήλη $\underline{P}_j$ που γίνεται βασική ορίζεται από το κριτήριο:

$$P_j : \left| \frac{z_j - c_j}{x_{ij}} \right| = \min \left\{ \begin{array}{l} \min_k \left\{ \left| \frac{z_k - c_k}{x_{ik}} \right| : z_k - c_k > 0, x_{ik} < 0 \right\} \\ \max_k \left\{ \left| \frac{z_k - c_k}{x_{ik}} \right| : z_k - c_k < 0, x_{ik} > 0 \right\} \end{array} \right.$$

- (3) Πάμε στο επόμενο tableau Simplex με το γνωστό τρόπο.
 (4) Πάμε στο Βήμα 1.

ΦΑΣΗ II:

- (1) Εδώ $z_k - c_k \geq 0$ για όλα τα k . Έστω $\underline{x}_0$ η αντίστοιχη βασική λύση.
 (α') Εάν $x_{i0} \geq 0$, για όλα τα i , η $\underline{x}_0$ είναι άριστη λύση.
 (β') Εάν υπάρχει i : $x_{i0} < 0$ και $x_{ik} \geq 0$ για όλα τα k , το πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις.
 (γ') Εάν οι (1α'), (1β') δεν ισχύουν, τότε για κάθε i : $x_{i0} < 0$, υπάρχει k : $x_{ik} < 0$. Διαλέγουμε ένα $x_{i0} < 0$ και η στήλη $\underline{P}_i$ φεύγει από τη βάση.
 (2) Η στήλη $\underline{P}_j$ γίνεται βασική χρησιμοποιώντας το κριτήριο:

$$P_j : \left| \frac{z_j - c_j}{x_{ij}} \right| = \min_k \left\{ \left| \frac{z_k - c_k}{x_{ik}} \right| : z_k - c_k > 0, x_{ik} < 0 \right\}$$

- (3) Πάμε στο επόμενο tableau Simplex με το γνωστό τρόπο.
 (4) Πάμε στο Βήμα 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1. Να λυθεί με το δυϊκό αλγόριθμο Simplex το πρόβλημα Γ.Π.

$$\max(5x_1 - 4x_2)$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 &= 24 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 &= -4 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ 14. Το πρόβλημα είναι σχεδόν σε κανονική μορφή. Επίσης, οι τρεις τελευταίες στήλες του πίνακα των συντελεστών σχηματίζουν τον 3×3 μοναδιαίο πίνακα ο οποίος μας δίνει την αρχική βασική μη εφικτή λύση $\underline{x}_0 = (0, 0, 6, 24, -4)'$.

ΦΑΣΗ I

			5	-4	0	0	0
B	c_B	b	$\underline{P}_1$	$\underline{P}_2$	$\underline{P}_3$	$\underline{P}_4$	$\underline{P}_5$
$\underline{P}_3$	0	6	1	-1	1	0	0
$\underline{P}_4$	0	24	3	-2	0	1	0
$\underline{P}_5$	0	-4	-2	3	0	0	1
	z	0	-5	4	0	0	0
$\underline{P}_3$	0	-2	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0
$\underline{P}_1$	5	8	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
$\underline{P}_5$	0	12	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1
	z	40	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0

Στο πρώτο tableau είναι $z_1 - c_1 = -5 < 0$, $x_{21} = 3 > 0$ άρα η στήλη $\underline{P}_4$ φεύγει από τη βάση. Τώρα, επίσης

$$|\theta| = \min \left\{ \left| \frac{-5}{3} \right|, \left| \frac{4}{-2} \right| \right\} = \left| \frac{5}{3} \right|$$

άρα η στήλη $\underline{P}_1$ γίνεται βασική. Πιλότος είναι το 3. Στο δεύτερο tableau είναι $z_k - c_k \geq 0$ για όλα τα k και επομένως τελειώνει η φάση I.

ΦΑΣΗ II

Είναι $x_{10} = -2 < 0$, άρα η στήλη $\underline{P}_3$ φεύγει από τη βάση. Επίσης είναι: $|\theta| = \min \left\{ \left| \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} \right|, \left| \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}} \right| \right\} = \left| \frac{2}{3} \right|$, άρα η στήλη $\underline{P}_2$ γίνεται βασική. Πιλότος είναι το $-\frac{1}{3}$ και το επόμενο tableau είναι:

$\underline{P}_2$	-4	6	0	1	-3	1	0
$\underline{P}_1$	5	12					
$\underline{P}_5$	0	2					
	z	36	0	0	2	1	10

Εδώ προκύπτει $x_{i0} > 0$, για όλα τα i . Επομένως η αντίστοιχη λύση η οποία είναι $\underline{x} = (12, 6, 0, 0, 2)'$ είναι η άριστη λύση. Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $z = 36$.

5. Ανάλυση Ευαισθησίας

Η ανάλυση ευαισθησίας μελετά τη μεταβολή της άριστης λύσης ενός προβλήματος Γ.Π. όταν μεταβληθούν κάποια από τα αρχικά δεδομένα του. Ας δούμε, για παράδειγμα,

- (1) μεταβολές στους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης και
 - (2) μεταβολές στα δεξιά μέλη των περιορισμών.
- (1) **Μεταβολές στους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης.** Ας δούμε το παράδειγμα που έχουμε επιλύσει γραφικά στο Κεφάλαιο 3.

$$\max z = 150x_1 + 200x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 550 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 1000 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 2000 \\ x_1 &\leq 400 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Έστω ότι ο αντικειμενικός συντελεστής της πρώτης μεταβλητής μεταβάλλεται κατά μία ποσότητα, έστω D . Ο τελικός πίνακας Simplex ήταν:

			150	200	0	0	0	0	
c_B^*	c_B		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$150 + D$	150	x_1	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	
200	200	x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	
0	0	x_5	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	
0	0	x_6	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	
		z_j	150	200	125	25	0	0	93, 75
		$c_j - z_j$	0	0	-125	-25	0	0	
		z_j^*	$150 + D$	200	$125 + \frac{3}{2}D$	$25 - \frac{1}{2}D$	0	0	$93, 75 + 325D$
		$c_j^* - z_j^*$	0	0	$-125 - \frac{3}{2}D$	$-25 + \frac{1}{2}D$	0	0	

Εάν ο συντελεστής της μεταβλητής x_1 μεταβληθεί κατά την ποσότητα D , θα γίνει $150 + D$. Η μεταβολή στον αντικειμενικό συντελεστή επηρεάζει συγκεκριμένα στοιχεία του τελικού πίνακα Simplex που είναι τα στοιχεία της γραμμής $c_j - z_j$ και η τιμή του z , ενώ δεν επηρεάζονται καθόλου οι τιμές των βασικών μεταβλητών. Για να παραμείνει η λύση βέλτιστη, θα πρέπει: $-125 - \frac{3}{2}D \leq 0$ και $-25 + \frac{1}{2}D \leq 0$. Λύνοντας ως προς D θα πρέπει: $D \geq \frac{250}{3}$, $D \leq 50$, δηλαδή έχουμε: $-\frac{250}{3} \leq D \leq 50$. Ομοίως, μπορούμε να εντοπίσουμε το εύρος βελτιστότητας για τον αντικειμενικό συντελεστή της δεύτερης μεταβλητής απόφασης. Ένα εύλογο ερώτημα είναι, τί συμβαίνει στην περίπτωση που μεταβάλλεται ο αντικειμενικός συντελεστής κάποιας μη-βασικής μεταβλητής. Μία τέτοια μεταβολή επηρεάζει μόνο το αντίστοιχο στοιχείο της γραμμής $c_j - z_j$ ενώ δεν επηρεάζει καθόλου το z . Αυτό είναι αναμενόμενο διότι η μεταβλητή δεν είναι βασική.

- (2) **Μεταβολές στα δεξιά μέλη των περιορισμών.** Ας υποθέσουμε ότι το δεξιό μέλος του j -περιορισμού, π.χ. του 1^{ου} περιορισμού $b_1 = 550$ μεταβάλλεται κατά μία ποσότητα D , δηλαδή έχουμε $b_1 = 550 + D$. Ο αρχικός πίνακας Simplex του προβλήματος είναι:

		150	200	0	0	0	0	Δεξιό
c_B		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	μέλος
0	x_3	1	1	1	0	0	0	$550 + D$
0	x_4	1	3	0	1	0	0	1000
0	x_5	2	5	0	0	1	0	2000
0	x_6	1	0	0	0	0	1	400
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	150	200	0	0	0	0	

Στον τελικό πίνακα τα δεξιά μέλη θα μεταβληθούν κατά μία ποσότητα που προκύπτει από το γινόμενο της μεταβολής D επί το στοιχείο του πίνακα που βρίσκεται στη γραμμή του b_i και στη στήλη που αντιστοιχεί στην j -βασική μεταβλητή του αρχικού πίνακα π.χ. για τον πρώτο περιορισμό η πρώτη βασική μεταβλητή στον αρχικό πίνακα είναι η μεταβλητή x_3 , άρα θα εργαστούμε με τη στήλη της

μεταβλητής x_3 στον τελικό πίνακα. Για την τιμή του z η μεταβλητή που θα προκύψει εντοπίζεται ως εξής: Όταν μεταβάλλεται το b_i αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τα στοιχεία της στήλης της περιθώριας μεταβλητής x_i που στην περίπτωση μας είναι τα στοιχεία της στήλης της x_3 . Αυτά τα στοιχεία πολλαπλασιάζονται με τη μεταβολή D και στη συνέχεια προστίθενται στα δεξιά μέλη και στην τιμή του z .

$\underline{c}_B$		150	200	0	0	0	0	Δεξιό
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	μέλος
150	x_1	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$325 + \frac{3}{2}D$
200	x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$225 - \frac{1}{2}D$
0	x_5	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$225 - \frac{1}{2}D$
0	x_6	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$75 - \frac{3}{2}D$
	z_j	150	200	125	25	0	0	$93,75 + 125D$
	$c_j - z_j$	0	0	-125	-25	0	0	

Μπορούμε να εντοπίσουμε το εύρος εφικτότητας για την παράμετρο b_1 . Το εύρος εφικτότητας για τα δεξιά μέλη είναι εκείνο το διάστημα, όπου παραμένουν μη-αρνητικά, ώστε η λύση που δίνεται από αυτά να είναι εφικτή. Θα πρέπει τα δεξιά μέλη να είναι μη-αρνητικά, συνεπώς προκύπτουν οι ακόλουθες τέσσερις σχέσεις:

$$325 + \frac{3}{2}D \geq 0$$

$$225 - \frac{1}{2}D \geq 0$$

$$225 - \frac{1}{2}D \geq 0$$

$$75 - \frac{3}{2}D \geq 0$$

Λύνοντας τις σχέσεις ως προς D λαμβάνουμε τις ανισότητες: $D \geq -\frac{650}{3}$, $D \leq 450$ και $D \leq 50$. Οι τέσσερις ανισώσεις συναληθεύουν στο εξής διάστημα για τη μεταβολή D : $-\frac{650}{3} \leq D \leq 50$. Άρα, η επιτρεπόμενη αύξηση για το b_1 είναι μέχρι 50 μονάδες, ενώ η επιτρεπόμενη μείωση είναι μέχρι και $-\frac{650}{3}$. Το διάστημα εφικτότητας για το b_1 είναι: $-\frac{650}{3} \leq D \leq 50 \Rightarrow \frac{1000}{3} \leq 550 + D \leq 600$ που δίνει $\frac{1000}{3} \leq b_1 \leq 600$. Το διάστημα εφικτότητας υποδεικνύει ότι, εφόσον το δεξιό μέλος του πρώτου περιορισμού (που αρχικά είχε τιμή ίση με 550) μεταβάλλεται μεταξύ $\frac{1000}{3}$ και 600, θα υπάρχει μία εφικτή λύση. Με όμοιο τρόπο, μπορούμε να χειριστούμε όλες τις περιπτώσεις περιορισμών ανεξάρτητα από τη φορά τους. Η ανάλυση ευαισθησίας διεξάγεται αποδοτικά στον ηλεκτρονικό υπολογιστή χρησιμοποιώντας κατάλληλα πακέτα λογισμικού.

Δύο δημοφιλή προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού

1. Εισαγωγή

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε δύο χαρακτηριστικά προβλήματα του Γ.Π., όπως το πρόβλημα μεταφοράς και το πρόβλημα της ανάθεσης ή το πρόβλημα καταμερισμού της εργασίας.

2. Το πρόβλημα της Μεταφοράς

Στο Παράδειγμα 4.4 του Κεφαλαίου 2 είδαμε ένα παράδειγμα προβλήματος μεταφοράς. Το πρόβλημα μεταφοράς είναι μία από τις πρώτες εφαρμογές του Γ.Π.. Είναι το πρόβλημα της οικονομικότερης διακίνησης ενός προϊόντος από ορισμένους σταθμούς παραγωγής (εργοστάσια, βιομηχανίες, αποθήκες) σε ορισμένους σταθμούς προορισμού (αποθήκες, λιμάνια, καταστήματα). Σε m σταθμούς παραγωγής $A_1, A_2, \dots, A_m$ ένα προϊόν υπάρχει σε ποσότητες $a_1, a_2, \dots, a_m$, αντίστοιχα. Το προϊόν πρέπει να παραδοθεί σε n σταθμούς προορισμού $B_1, B_2, \dots, B_n$ που απαιτούν ποσότητες $b_1, b_2, \dots, b_n$, αντίστοιχα. Η συνολική παραγωγή ισούται με τη συνολική ζήτηση, δηλαδή $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \equiv S$. Το κόστος μεταφοράς μίας μονάδας προϊόντος από το σταθμό παραγωγής A_i στον σταθμό προορισμού B_j μετρούμενο σε κατάλληλες χρηματικές μονάδες είναι c_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Ζητάμε να βρεθεί ένα άριστο σχέδιο μεταφοράς, δηλαδή να βρεθούν οι κατάλληλες ποσότητες x_{ij} που πρέπει να μεταφερθούν από τους σταθμούς παραγωγής στους σταθμούς προορισμού ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς και συγχρόνως να ικανοποιούνται οι ανάγκες όλων των σταθμών προορισμού. Τα δεδομένα του προβλήματος παρουσιάζονται συνοπτικά με τη βοήθεια του επόμενου πίνακα.

	B_1	B_2	$\dots$	B_n	
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	$\dots$	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	$\dots$	x_{2n} c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	$\dots$	x_{mn} c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	$\dots$	b_n	S

Στην τελευταία στήλη του πίνακα αναγράφονται οι διαθέσιμες ποσότητες, ενώ στην τελευταία γραμμή οι απαιτούμενες ποσότητες του προϊόντος. Στην πάνω δεξιά γωνία του τετραγώνου (i, j) που αντιστοιχεί στους αριθμούς A_i , B_j αναγράφεται το αντίστοιχο κόστος μεταφοράς c_{ij} ενώ στο κάτω μέρος του τετραγώνου καταχωρείται η αντίστοιχη μεταφερόμενη ποσότητα x_{ij} . Αυτός ο πίνακας αναφέρεται ως tableau σχεδίου μεταφοράς. Έστω x_{ij} η ποσότητα προϊόντος που μεταφέρεται από τον σταθμό παραγωγής A_i στο σταθμό προορισμού B_j . Η

μαθηματική διατύπωση του προβλήματος μεταφοράς είναι:

$$\min \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \right)$$

$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Το πρόβλημα μεταφοράς είναι ένα πρόβλημα Γ.Π. με $m+n$ περιορισμούς και mn μεταβλητές και μάλιστα διατυπωμένο σε κανονική μορφή ως προς τους περιορισμούς. Το πρόβλημα έχει μία κατ' εξοχήν απλή μορφή. Συγκεκριμένα όλοι οι συντελεστές των μεταβλητών x_{ij} στους περιορισμούς είναι 0 ή 1 ενώ κάθε μία από αυτές εμφανίζεται με συντελεστή το 1 σε δύο ακριβώς από τους περιορισμούς, σ' αυτόν που αντιστοιχεί στο σταθμό παραγωγής A_i και σ' αυτόν που αντιστοιχεί στο σταθμό προορισμού B_j . Η ειδική μορφή των περιορισμών επιτρέπει την ανάπτυξη μίας απλής μεθόδου επίλυσης του προβλήματος μεταφοράς, παραλλαγής της μεθόδου Simplex, γνωστή ως μέθοδο μεταφοράς. Παραπέμπουμε στο Βιβλίο [1], σελ. 13-61, Τόμος Β' και στο Βιβλίο [4], σελ. 87-103 για μία αναλυτικότερη παρουσίαση του προβλήματος μεταφοράς και της μεθόδου επίλυσής του.

3. Το πρόβλημα της Ανάθεσης

Το πρόβλημα της ανάθεσης ή πρόβλημα του καταμερισμού εργασίας είναι το εξής. Υπάρχουν m άτομα $A_1, A_2, \dots, A_m$ τα οποία πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για την εκτέλεση m εργασιών $B_1, B_2, \dots, B_m$. Κάθε εργασία απαιτεί ένα άτομο και κάθε άτομο εκτελεί μία εργασία. Έστω c_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, m$ η απόδοση (π.χ.: παραγωγικότητα, ταχύτητα κ.λ.π.) του ατόμου A_i στην εργασία B_j μετρούμενη σε κατάλληλες μονάδες. Πώς πρέπει να κατανεμηθούν τα άτομα στις εργασίες για να μεγιστοποιηθεί η συνολική απόδοση; Ένας τρόπος επίλυσης του προβλήματος είναι να γράψουμε τις $m!$ δυνατές κατανομές των m ατόμων στις m εργασίες, να βρούμε τη συνολική απόδοση καθεμιάς από αυτές και να επιλέξουμε εκείνη με τη μεγαλύτερη συνολική απόδοση. Αυτός ο τρόπος δεν συνιστάται αφού π.χ. για $m = 8$ έχουμε $8! = 40.320$ μεταθέσεις.

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος ανάθεσης: Ορίζουμε τις 0 – 1 μεταβλητές x_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m$ ως:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{εάν το άτομο } A_i \text{ χρησιμοποιείται στην εργασία } B_j \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε έχουμε το πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού:

$$\max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, m, x_{ij} = 0 \text{ ή } 1, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, m.$$

Παρατηρούμε ότι οι περιορισμοί είναι της μορφής του προβλήματος μεταφοράς όταν $m = n$, $a_i = b_j = 1$, $i, j = 1, \dots, m$, με τη μόνη διαφορά ότι η συνθήκη μη-αρνητικότητας των μεταβλητών αντικαθίσταται από τη συνθήκη $x_{ij} = 0$ ή 1. Λόγω της συγκεκριμένης μορφής του προβλήματος έχει αναπτυχθεί ένας ειδικός αλγόριθμος για την εύρεση της βέλτιστης λύσης του, ο λεγόμενος Ουγγρικός αλγόριθμος. Έστω $C = (c_{ij})_{m \times m}$ ο πίνακας απόδοσης του προβλήματος. Η εύρεση της βέλτιστης λύσης ανάγεται στον προσδιορισμό m ανεξάρτητων στοιχείων του C

δηλαδή m στοιχείων του C ένα μόνο σε κάθε γραμμή και στήλη που το άθροισμά τους να είναι μέγιστο. Αυτό ακριβώς επιτυγχάνει ο Ουγγρικός αλγόριθμος. Ισχύει το ακόλουθο Λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 3.1. *Ο μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων μηδενικών ενός τετραγωνικού πίνακα C είναι ίσος με τον ελάχιστο αριθμό ευθειών που απαιτούνται για να διαγράψουμε όλα τα μηδενικά του C .*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2. *Ας εξετάσουμε τον πίνακα:*

$$\begin{pmatrix} 8 & 0^* & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0^* & 6 \\ 1 & 1 & 0^* & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0^* & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c \\ c \\ \\ c \\ c \end{matrix}$$

c

Ο ελάχιστος αριθμός ευθειών που απαιτούνται για να διαγράψουμε (καλύψουμε) όλα τα μηδενικά του πίνακα είναι

4. Μία τέτοια ομάδα ευθειών έχει σημειωθεί με c . Άρα, ο μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων 0 του πίνακα είναι επίσης 4. Μία τέτοια ομάδα από μηδενικά έχει σημειωθεί με αστερίσκους.

Ο Ουγγρικός αλγόριθμος: Τα βήματα του αλγορίθμου για την επίλυση του προβλήματος ανάθεσης είναι τα εξής:

- (1) Αφαιρούμε το μεγαλύτερο c_{ij} κάθε γραμμής από κάθε c_{ij} της αντίστοιχης γραμμής. Στο νέο tableau αφαιρούμε το μεγαλύτερο c_{ij} κάθε στήλης από κάθε c_{ij} της αντίστοιχης στήλης.
- (2) Με τον ελάχιστο αριθμό r ευθειών (οριζοντίων ή/και καθέτων) διαγράφουμε τα μηδενικά του τελευταίου tableau.
 - (α') Εάν $r = m$, τότε το αντίστοιχο tableau δίνει την άριστη λύση.
 - (β') Εάν $r < m$, πάμε στο επόμενο βήμα.
- (3) Αφαιρούμε το μεγαλύτερο μη διαγραφμένο c_{ij} από κάθε μη διαγραφμένο c_{ij} και το προσθέτουμε στα c_{ij} που είναι στη διασταύρωση δύο ευθειών.
- (4) Επιστρέφουμε στο Βήμα 2.

Με βάση το Λήμμα 3.1 και το Βήμα 2 θα υπάρχουν στο τελικό tableau $r = m$ ανεξάρτητα μηδενικά. Στις αντίστοιχες μεταβλητές x_{ij} δίνουμε την τιμή 1 και αυτό το σχέδιο καταμερισμού εργασίας είναι άριστο. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3. *Η απόδοση τριών υποψηφίων A_1, A_2, A_3 για τρεις θέσεις B_1, B_2, B_3 δίνονται στον πίνακα:*

	B_1	B_2	B_3
A_1	30	52	76
A_2	42	36	80
A_3	55	48	60

Πώς πρέπει να κατανεμηθούν οι υποψήφιοι στις θέσεις για να μεγιστοποιηθεί η συνολική απόδοση;

Λύση:

- (1) Εφαρμόζοντας το πρώτο βήμα του αλγορίθμου έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 30 & 52 & 76 \\ 42 & 36 & 80 \\ 55 & 48 & 60 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -46 & -24 & 0 \\ -38 & -44 & 0 \\ -5 & -12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -41 & -12 & 0 \\ -33 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (2) Ο ελάχιστος αριθμός ευθειών με τις οποίες διαγράφουμε όλα τα 0 είναι $r = 2 < m = 3$, άρα το τρίτο tableau δεν δίνει άριστη λύση.
- (3) Από τα μη διεγραμμένα στοιχεία αφαιρούμε το μεγαλύτερο δηλαδή το -12 και το προσθέτουμε στο 0 της θέσης $(3, 3)$. Έτσι σχηματίζεται το tableau

$$\begin{pmatrix} -29 & 0^* & 0 \\ -21 & -20 & 0^* \\ 0^* & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Σ' αυτό το tableau, ο ελάχιστος αριθμός ευθειών με τις οποίες διαγράφουμε όλα τα 0 είναι $r = 3$. Άρα υπάρχουν ακριβώς 3 ανεξάρτητα 0. Μία ομάδα τέτοιων 0 και μάλιστα η μοναδική σημειώνεται με αστερίσκους. Άρα, η μοναδική άριστη λύση είναι: $x_{12} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{31} = 1$, με συνολική απόδοση $R = 52 + 80 + 55 = 187$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΩΝ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1. *Εάν η $\underline{x}$ είναι βασική εφικτή λύση, τότε η $\underline{x}$ είναι κορυφή της F .*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον η $\underline{x}$ είναι βασική εφικτή λύση, θα έχει το πολύ m θετικές συντεταγμένες και έστω χ.π.γ. ότι αυτές είναι οι k πρώτες ($k \leq m$), δηλαδή $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0)'$. Οι αντίστοιχες στήλες $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \dots, \underline{P}_k$ του πίνακα A είναι, από τον ορισμό της βασικής εφικτής λύσης, γραμμικά ανεξάρτητες.

Έστω ότι η $\underline{x}$ δεν είναι κορυφή της F . Τότε, θα υπάρχουν $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in F$ ($\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$), και $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$:

$$\underline{x} = \lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda) \underline{x}_2$$

ή αναλυτικά

$$x_1 = \lambda x_{11} + (1 - \lambda) x_{12} \tag{9}$$

$$\vdots \quad \quad \vdots$$

$$x_k = \lambda x_{k1} + (1 - \lambda) x_{k2}$$

$$0 = \lambda x_{k+11} + (1 - \lambda) x_{k+12} \tag{10}$$

$$\vdots \quad \quad \vdots$$

$$0 = \lambda x_{n1} + (1 - \lambda) x_{n2}.$$

Αφού $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \geq 0$, και $0 < \lambda < 1$, από τις τελευταίες $n - k$ ισότητες, της (10) έπεται ότι

$$x_{j1} = x_{j2} = 0 \quad (j = k + 1, k + 2, \dots, n) \tag{11}$$

δηλαδή τα σημεία $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ έχουν τη μορφή:

$$\underline{x}_i = (\underline{x}_{1i}, \underline{x}_{2i}, \dots, \underline{x}_{ki}, 0, \dots, 0)' \quad (i = 1, 2).$$

Αφού τώρα οι $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ είναι λύσεις του π.γ.π. ισχύει

$$\left. \begin{matrix} A\underline{x}_1 = \underline{b} \\ A\underline{x}_2 = \underline{b} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \sum_{j=1}^k x_{j1} \underline{P}_j = \underline{b} \\ \sum_{j=1}^k x_{j2} \underline{P}_j = \underline{b} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sum_{j=1}^k (x_{j1} - x_{j2}) \underline{P}_j = \underline{0} \tag{12}$$

και επομένως

$$x_{j1} - x_{j2} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (13)$$

λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \dots, \underline{P}_k$. Άρα τελικά $\underline{x}_1 = \underline{x}_2$, που είναι άτοπο. Επομένως η $\underline{x}$ είναι κορυφή της F . $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2. *Εάν η $\underline{x}$ είναι κορυφή της F , τότε η $\underline{x}$ είναι βασική εφικτή λύση.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω χ.π.γ. ότι οι θετικές συντεταγμένες της κορυφής $\underline{x}$ είναι οι k πρώτες, δηλαδή $\underline{x} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k, 0, 0, \dots, 0)'$, όπου $k \leq n$. Αρκεί να δείξουμε ότι τα αντίστοιχα διανύσματα στήλες $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \dots, \underline{P}_k$ του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Έστω ότι είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, όχι όλα μηδέν:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{P}_i = \underline{0} \quad (14)$$

Επίσης, αφού $\underline{x} \in F$,

$$\sum_{i=1}^k x_i \underline{P}_i = \underline{b} \quad (15)$$

Επιλέγοντας αυθαίρετο $\theta > 0$, και σχηματίζοντας τις ισότητες $(15) + \theta(14)$, $(15) - \theta(14)$, έχουμε αντίστοιχα τις σχέσεις

$$\sum_{i=1}^k (x_i + \theta \lambda_i) \underline{P}_i = \underline{b} \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^k (x_i - \theta \lambda_i) \underline{P}_i = \underline{b} \quad (17)$$

Έτσι τα διανύσματα

$$\underline{x}_1 = (x_1 + \theta \lambda_1, x_2 + \theta \lambda_2, \dots, x_k + \theta \lambda_k, 0, 0, \dots, 0)',$$

$$\underline{x}_2 = (x_1 - \theta \lambda_1, x_2 - \theta \lambda_2, \dots, x_k - \theta \lambda_k, 0, 0, \dots, 0)',$$

είναι οι λύσεις του $A\underline{x} = \underline{b}$, δηλαδή είναι λύσεις του π.γ.π. αλλά όχι κατ' ανάγκην εφικτές. Για να είναι εφικτές, θα πρέπει επιπλέον

$$\left. \begin{array}{l} x_i + \theta \lambda_i \geq 0 \\ x_i - \theta \lambda_i \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow -x_i \leq \theta \lambda_i \leq x_i \Leftrightarrow |\theta \lambda_i| \leq x_i \Leftrightarrow \theta \leq \frac{x_i}{|\lambda_i|}, \text{ για κάθε } i : \lambda_i \neq 0 \quad (18)$$

Επομένως, διαλέγοντας θ αρκετά μικρό, θα έχουμε $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \geq 0$, δηλαδή $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in F$. Όμως, τότε

$$\underline{x} = \frac{1}{2} \underline{x}_1 + \frac{1}{2} \underline{x}_2, \quad (19)$$

δηλαδή το $\underline{x}$ δεν είναι κορυφή της F , που είναι άτοπο. Άρα τα διανύσματα $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \dots, \underline{P}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή η $\underline{x}$ είναι βασική εφικτή λύση. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3. *Εάν $z_j - c_j \geq 0 \ \forall \ j = 1, 2, \dots, n$, τότε η μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underline{x}_0$ είναι βέλτιστη.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο, ξεκινώντας από τη λύση $\underline{x}_0$ ελέγχουμε πρώτα εάν αυτή είναι άριστη και σε αντίθετη περίπτωση βρίσκουμε μια καλύτερη βασική εφικτή λύση $\underline{x}_1$, εάν υπάρχει. Θα περιγράψουμε δηλαδή ένα βήμα της μεθόδου Simplex. Προς τούτο χρειαζόμαστε κάποια κριτήρια άριστων λύσεων και αυτά αναπτύσσονται παρακάτω.

Η $\underline{x}_0$ ως μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση έχει ακριβώς m θετικές συντεταγμένες και έστω χ.π.γ. ότι αυτές είναι οι m πρώτες. Έτσι η $\underline{x}_0$ έχει τη μορφή

$$\underline{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, 0, 0, \dots, 0)', x_{i0} > 0 \ (i = 1, 2, \dots, m).$$

Εφόσον η $\underline{x}_0$ είναι λύση του π.γ.π., ισχύει

$$\sum_{i=1}^m x_{i0} \underline{P}_i = \underline{b} \quad (20)$$

και έστω

$$\sum_{i=1}^m x_{i0} c_i = z_0 \quad (21)$$

η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο (λύση) $\underline{x}_0$. Εφ' όσον επιπλέον η $\underline{x}_0$ είναι βασική λύση, οι στήλες $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \dots, \underline{P}_m$ του πίνακα A που αντιστοιχούν στις θετικές συντεταγμένες της, είναι γραμμικά ανεξάρτητες και ακριβώς m , αποτελούν **βάση του διανυσματικού χώρου $M_{m \times 1}$** . Συνεπώς, κάθε στήλη του A μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \dots, \underline{P}_m$, δηλαδή υπάρχουν $x_{ij} \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \underline{P}_i = \underline{P}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (22)$$

Φυσικά για $j \leq m$, είναι $x_{ij} = 1$, ή 0 , για $i = j$, ή $i \neq j$, αντίστοιχα. Έστω

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} c_i = z_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (23)$$

Έστω $\underline{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})'$, τυχούσα εφικτή λύση του π.γ.π.. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$z_0 = \underline{c}' \underline{x}_0 \geq \underline{c}' \underline{y}_0 = z_0^*.$$

Εφόσον η $\underline{y}_0$ είναι λύση του π.γ.π., ισχύει

$$\sum_{j=1}^n y_{j0} \underline{P}_j = \underline{b}. \quad (24)$$

Από (22) και (24) έχουμε

$$\sum_{j=1}^n y_{j0} \sum_{i=1}^m x_{ij} \underline{P}_i = \underline{b},$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{j=1}^n \underline{P}_i \sum_{i=1}^m y_{j0} x_{ij} = \underline{b}. \quad (25)$$

Από τις σχέσεις (20), (25) και λόγω της ανεξαρτησίας των $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \dots, \underline{P}_m$ έπεται ότι

$$x_{i0} = \sum_{j=1}^n y_{j0} x_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (26)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} z_0 &= \sum_{i=1}^m x_{i0} c_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n y_{j0} x_{ij} \right) c_i \\ &= \sum_{j=1}^n y_{j0} \sum_{i=1}^m x_{ij} c_i \\ &= \sum_{j=1}^n y_{j0} z_j. \end{aligned}$$

Αλλά $z_j \geq c_j$, και $y_{j0} \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), επομένως

$$z_0 = \sum_{j=1}^n y_{j0} z_j \geq \sum_{j=1}^n y_{j0} c_j = z_0^*,$$

δηλαδή η $\underline{x}_0$ είναι άριστη λύση. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.4. *Εάν $z_j - c_j < 0$ για ένα τουλάχιστον j , $j = 1, 2, \dots, n$ τότε η μη-εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underline{x}_0$ δεν είναι άριστη.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να βρούμε μια εφικτή λύση $\underline{x}_1$ που να είναι καλύτερη από την $\underline{x}_0$, δηλαδή $\underline{c}' \underline{x}_1 > \underline{c}' \underline{x}_0$. Για ένα συγκεκριμένο j με $z_j - c_j < 0$, σχηματίζουμε τις ισότητες (20)-θ(22) και (21)-θ(23) όπου $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m (x_{i0} - \theta x_{ij}) \underline{P}_i &= \underline{b} - \theta \underline{P}_j \\ \sum_{i=1}^m (x_{i0} - \theta x_{ij}) c_i &= z_0 - \theta z_j\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{i=1}^m (x_{i0} - \theta x_{ij}) \underline{P}_i + \theta \underline{P}_j = \underline{b} \quad (27)$$

$$\sum_{i=1}^m (x_{i0} - \theta x_{ij}) c_i + \theta c_j = z_0 - \theta(z_j - c_j) \quad (28)$$

Έστω το διάνυσμα

$$x(\theta) = (x_{10} - \theta x_{1j}, x_{20} - \theta x_{2j}, \dots, x_{m0} - \theta x_{mj}, 0, \dots, 0, \theta, 0, \dots, 0)' \quad (29)$$

όπου το θ βρίσκεται στη j -οστή θέση. Οι σχέσεις (27), (28) μπορούν τώρα να γραφούν πιο συνοπτικά, ως

$$A \underline{x}(\theta) = \underline{b} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}\underline{c}' \underline{x}(\theta) &= z_0 - \theta(z_j - c_j) \\ &= z_0 + \theta|z_j - c_j|\end{aligned} \quad (31)$$

Από τη σχέση (30) γίνεται φανερό ότι η $\underline{x}(\theta)$ είναι λύση του π.γ.π., ενώ η σχέση (31) δίνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο $\underline{x}(\theta)$. Για να είναι η $\underline{x}(\theta)$ εφικτή λύση, θα πρέπει όλες οι συντεταγμένες της να είναι μη αρνητικές. Έτσι απαιτούμε

$$\theta \geq 0, \text{ και } x_{i0} - \theta x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (32)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- (1) $x_{ij} \leq 0$, για όλα τα i ($i = 1, 2, \dots, m$). Τότε η απαίτηση (32) ικανοποιείται με την επιλογή οποιουδήποτε θετικού αριθμού θ . Επομένως για κάθε $\theta > 0$, η $\underline{x}(\theta)$ είναι εφικτή λύση και καλύτερη από την $\underline{x}_0$ όπως φαίνεται από τη σχέση (31). Μάλιστα σ' αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned}\max \underline{c}' \underline{x} &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \underline{c}' \underline{x}(\theta) \\ &= z_0 + |z_j - c_j| \lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta = \infty,\end{aligned}$$

δηλαδή το π.γ.π. δεν είναι φραγμένο.

- (2) $x_{ij} > 0$, για ένα τουλάχιστον i ($i = 1, 2, \dots, m$). Τότε η απαίτηση (32) ικανοποιείται με την επιλογή οποιουδήποτε θ : $0 \leq \theta \leq \theta_0$, όπου

$$\theta_0 = \min_i \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ij}} : x_{ij} > 0 \right\} > 0 \quad (33)$$

Επομένως για κάθε θ : $0 < \theta \leq \theta_0$, η $\underline{x}(\theta)$ είναι εφικτή λύση και καλύτερη από την $\underline{x}_0$, όπως φαίνεται από τη σχέση (31). Άρα σε κάθε περίπτωση η λύση $\underline{x}_0$ δεν είναι άριστη.

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. Εάν $z_j - c_j < 0$, για ένα τουλάχιστον j , $j = 1, 2, \dots, n$ και η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο, τότε υπάρχει βασική εφικτή λύση $\underline{x}_1$, καλύτερη από την $\underline{x}_0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο, θα ισχύει αναγκαστικά η περίπτωση (2) της απόδειξης του Θεωρήματος 4.4. Διαλέγοντας $\theta = \theta_0$, όπου θ_0 δίνεται από τη σχέση (33), μία τουλάχιστον από τις πρώτες m συντεταγμένες της $\underline{x}(\theta)$ γίνεται μηδέν, και έτσι καταλήγουμε στην εφικτή λύση $\underline{x}_1 = \underline{x}(\theta_0)$, που έχει το πολύ m θετικές συντεταγμένες. Εάν π.χ. $\theta_0 = \frac{x_{10}}{x_{1j}}$, τότε

$$\underline{x}_1 = (0, x_{20} - \theta_0 x_{2j}, \dots, x_{m0} - \theta_0 x_{mj}, 0, \dots, 0, \theta_0, 0, \dots, 0)', \quad (34)$$

Αποδεικνύεται ότι η $\underline{x}_1$ είναι βασική λύση. Επίσης, η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι

$$z_1 = \underline{c}' \underline{x}_1 = z_0 + \theta_0 |z_j - c_j|, \quad (35)$$

που είναι μεγαλύτερη από την τιμή z_0 (και μάλιστα η μεγαλύτερη δυνατή ως προς θ), δηλαδή η $\underline{x}_1$ είναι μια βασική εφικτή λύση, καλύτερη από την $\underline{x}_0$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1. Από την εξέταση των (II) και (Δ) βγαίνουν τα εξής συμπεράσματα, τα οποία μπορούν εύκολα να αποδειχθούν:

- (1) Εάν μια μεταβλητή του ενός δεν έχει περιορισμό στο πρόσημο, ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι εξίσωση και αντίστροφα.
- (2) Εάν μια μεταβλητή του ενός είναι μη θετική, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι ανίσωση με φορά αντίθετη της αναμενόμενης και αντίστροφα. Ως αναμενόμενη φορά των περιορισμών εννοούμε την $\leq$, για πρόβλημα μεγιστοποίησης και τη $\geq$, για πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Επομένως το δυϊκό ενός π.γ.π. μπορεί να βρεθεί αμέσως, χωρίς να φέρουμε πρώτα το πρόβλημα σε ημικανονική μορφή.

Έστω F_x, F_w οι εφικτές περιοχές των δυϊκών π.γ.π. (Π), (Δ) αντίστοιχα. Ισχύουν τα ακόλουθα δύο Θεωρήματα, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.7.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.5. *Εάν $\underline{x} \in F_x$, και $\underline{w} \in F_w$, τότε $\underline{c}'\underline{x} \leq \underline{b}'\underline{w}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού $\underline{x}, \underline{w}$ είναι εφικτές λύσεις των (Π), (Δ) αντίστοιχα,

$$\left. \begin{array}{l} A\underline{x} \leq \underline{b} \\ \underline{w} \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{w}'A\underline{x} \leq \underline{w}'\underline{b} \Rightarrow \underline{w}'A\underline{x} \leq \underline{b}'\underline{w}, \quad (36)$$

$$\left. \begin{array}{l} A'\underline{w} \geq \underline{c} \\ \underline{x} \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x}'A'\underline{w} \geq \underline{x}'\underline{c} \Rightarrow \underline{w}'A\underline{x} \geq \underline{c}'\underline{x}. \quad (37)$$

Από τις σχέσεις (36) και (37), η αλήθεια του θεωρήματος είναι προφανής. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.6. *Εάν $\hat{\underline{x}} \in F_x$, $\hat{\underline{w}} \in F_w$ και $\underline{c}'\hat{\underline{x}} = \underline{b}'\hat{\underline{w}}$, τότε οι $\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{w}}$ είναι άριστες λύσεις των (Π) και (Δ) αντίστοιχα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $\underline{x} \in F_x, \underline{w} \in F_w$ έχουμε από το Θεώρημα 5.5 ότι

$$(1) \quad \underline{c}'\underline{x} \leq \underline{b}'\hat{\underline{w}} = \underline{c}'\hat{\underline{x}} \Rightarrow \underline{c}'\hat{\underline{x}} = \max\{\underline{c}'\underline{x} : \underline{x} \in F_x\}$$

δηλαδή η $\hat{\underline{x}}$ είναι άριστη λύση του (Π).

$$(2) \quad \underline{b}'\underline{w} \geq \underline{c}'\hat{\underline{x}} = \underline{b}'\hat{\underline{w}} \Rightarrow \underline{b}'\hat{\underline{w}} = \min\{\underline{b}'\underline{w} : \underline{w} \in F_w\}$$

δηλαδή η $\hat{\underline{w}}$ είναι άριστη λύση του (Δ). $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.7. (1) *Εάν το (Π) έχει άριστη λύση, τότε και το (Δ) έχει άριστη λύση και οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεών τους είναι ίσες.*

(2) *Εάν το (Π) είναι μη φραγμένο, τότε το (Δ) δεν έχει εφικτές λύσεις.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εισάγοντας από μία περιθώρια μεταβλητή σε κάθε περιορισμό του (Π), το φέρνουμε στην ισοδύναμη σχεδόν κανονική μορφή (με $\underline{b}$ όχι μη αρνητικό κατ' ανάγκην)

$$\max(\underline{c}'\underline{x} + \underline{0}'\underline{y})$$

$$(A : I) \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = \underline{b} \quad (\Pi_1)$$

$$\underline{x} \geq 0, \quad \underline{y} \geq 0,$$

όπου $\underline{y} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})'$, το διάνυσμα των περιθωρίων μεταβλητών και $I = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_m)$ ο $m \times m$ μοναδιαίος πίνακας. Το δυϊκό του (Π_1) είναι το π.γ.π.

$$\min \underline{b}'\underline{w}$$

$$\begin{pmatrix} A' \\ I \end{pmatrix} \underline{w} \geq \begin{pmatrix} \underline{c} \\ \underline{0} \end{pmatrix},$$

δηλαδή το

$$\min \underline{b}' \underline{w}$$

$$A' \underline{w} \geq \underline{c}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0},$$

που είναι ακριβώς το δυϊκό π.γ.π. (Δ) του (Π) .

- (1) Έστω ότι το π.γ.π. (Π) έχει άριστη λύση $\hat{x}$. Τότε η άριστη λύση $\hat{x}_1$ του (Π_1) είναι της μορφής $\hat{x}_1 = (\hat{x}', \hat{y}')$, και έστω ότι οι βασικές στήλες που αντιστοιχούν σ' αυτή είναι οι στήλες $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n + m$), του πίνακα $(A : I)$. Θέτουμε

$$B = (P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m})$$

$$\underline{c}_B = (c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_m})'$$

$$\underline{x}_B = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})',$$

όπου φυσικά $\underline{P}_{n+i} = \underline{e}_i$ και $c_{n+i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Επιλέγοντας ως πρώτη βάση τις στήλες του μοναδιαίου πίνακα, η προφανής αρχική βασική λύση (όχι κατ' ανάγκην εφικτή) δίνεται από το διάνυσμα $\underline{b}$ των σταθερών όρων, και το αρχικό tableau Simplex είναι

$$\begin{array}{c|cc} \underline{b} & A & I \\ \hline 0 & -\underline{c}' & \underline{0}' \end{array}$$

Το tableau που αντιστοιχεί στη βάση B είναι το

$$\begin{array}{c|cc} B^{-1}\underline{b} & B^{-1}A & B^{-1} \\ \hline \underline{c}'_B B^{-1}\underline{b} & \underline{c}'_B B^{-1}A - \underline{c}' & \underline{c}'_B B^{-1} \end{array}$$

Εφόσον, η βάση B αντιστοιχεί στην άριστη λύση, είναι

$$\hat{x}_B = B^{-1}\hat{b},$$

και όλες οι διαφορές $z_j - c_j$ της τελευταίας γραμμής του tableau είναι μη-αρνητικές, δηλαδή

$$\underline{c}'_B B^{-1} A \geq \underline{c}', \quad (38)$$

$$\underline{c}'_B B^{-1} \geq \underline{0}'. \quad (39)$$

Το διάνυσμα $\hat{w} = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_m)'$ που δίνεται από τη σχέση

$$\hat{w}' = \underline{c}'_B B^{-1} \quad (40)$$

είναι άριστη λύση του (Δ) . Πράγματι από τη σχέση (39) είναι

$$\hat{w}' = \underline{c}'_B B^{-1} A \geq \underline{c}',$$

και επομένως

$$A' \hat{w} \geq \underline{c},$$

δηλαδή η $\hat{w}$ ικανοποιεί τους περιορισμούς του (Δ) . Επίσης, από τη σχέση (39) είναι φανερό ότι η $\hat{w}$ δεν έχει αρνητικά στοιχεία. Άρα η $\hat{w}$ είναι εφικτή λύση του (Δ) . Τέλος

$$\underline{b}' \hat{w} = \hat{w}' \underline{b} = \underline{c}'_B B^{-1} \underline{b} = \underline{c}'_B \hat{x}_B = \underline{c}' \hat{x},$$

άρα βάσει του Θεωρήματος 5.6, η $\hat{w}$ είναι άριστη λύση του (Δ) .

(2) Έστω ότι το π.γ.π. (II) είναι μη φραγμένο, δηλαδή

$$\max\{\underline{c}' \underline{x} : \underline{x} \in F_x\} = \infty, \quad (41)$$

και ας υποθέσουμε ότι το π.γ.π. (Δ) έχει εφικτή λύση $\underline{w}$. Τότε από το Θεώρημα 5.5,

$$\underline{b}' \underline{w} = \infty,$$

που είναι άτοπο, αφού τα b_i, w_i ($i = 1, 2, \dots, m$), είναι πεπερασμένα. Άρα το (Δ) δεν έχει εφικτές λύσεις.

□

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 5.7 είναι φανερό ότι εάν γνωρίζουμε ποιές μεταβλητές είναι βασικές στην άριστη λύση του (II), τότε μπορούμε να βρούμε αμέσως την άριστη λύση $\hat{w} = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_m)'$ του (Δ) από την σχέση (40). Το μόνο πρόβλημα είναι ο υπολογισμός του αντίστροφου του βασικού πίνακα B . Όταν όμως γνωρίζουμε το τελικό tableau του (II) το πρόβλημα αυτό δεν υπάρχει διότι οι στήλες $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \dots, \underline{\beta}_m$ του B^{-1} περιέχονται σ' αυτό. Πράγματι συγκρίνοντας το αρχικό και το τελικό tableau του (II) παρατηρούμε ότι η στήλη $\underline{\beta}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) του B^{-1} βρίσκεται στο τελικό tableau, ακριβώς στην ίδια θέση που βρίσκεται η

στήλη $\underline{e}_i$ του μοναδιαίου πίνακα στο πρώτο tableau. Μάλιστα στη συγκεκριμένη περίπτωση, όπως φαίνεται από το τελικό tableau, η συντεταγμένη $\widehat{w}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), της άριστης λύσης, είναι ακριβώς η διαφορά $z_{n+i} - c_{n+i}$ της τελευταίας γραμμής που αντιστοιχεί στην περιθώρια μεταβλητή x_{n+i} . Πιο γενικά, εάν η μοναδιαία στήλη $\underline{e}_i$ είναι η k -οστή στήλη $\underline{P}_k$ του πίνακα A , τότε

$$\widehat{w}_i = z_k = (z_k - c_k) + c_k,$$

όπου $z_k - c_k$ η k -οστή διαφορά της τελευταίας γραμμής του τελικού tableau, δηλαδή αυτή που αντιστοιχεί στη στήλη $\underline{P}_k$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.8. Εάν $\underline{x}$, $\underline{w}$ είναι άριστες λύσεις των (II) και (Δ) αντίστοιχα, τότε

$$\widehat{x}_1(a_{1i}\widehat{w}_1 + a_{2i}\widehat{w}_2 + \dots + a_{mi}\widehat{w}_m - c_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (42)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η σχέση (40) που δίνει την άριστη λύση του (Δ) γράφεται ισοδύναμα

$$\underline{\widehat{w}}' B = \underline{c}'_B.$$

Επομένως εάν η στήλη $\underline{P}_i$ είναι βασική στην άριστη λύση του (II), ισχύει

$$\underline{\widehat{w}}' \underline{P}_i = c_i,$$

ή αναλυτικά

$$a_{1i}\widehat{w}_1 + a_{2i}\widehat{w}_2 + \dots + a_{mi}\widehat{w}_m = c_i$$

Για κάθε i ($i = 1, 2, \dots, n$) διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- (1) Η μεταβλητή x_i δεν είναι βασική στην άριστη λύση $\underline{x}$ του (II). Τότε $\widehat{x}_i = 0$, και η σχέση (42) ισχύει.
- (2) Η μεταβλητή x_i είναι βασική στην άριστη λύση $\underline{x}$ του (II). Τότε $\widehat{x}_i \geq 0$, αλλά εφόσον η στήλη $\underline{P}_i$ είναι βασική, ισχύει η τελευταία σχέση και επομένως και η (42).

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. Εάν $\underline{x}$, $\underline{w}$ είναι άριστες λύσεις των (II) και (Δ) αντίστοιχα, και $\widehat{x}_i > 0$, τότε η $\underline{w}$ κάνει τον i περιορισμό του (Δ) ισότητα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανής.

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2. (1) Από το Θεώρημα 5.8 και το γεγονός ότι το δυϊκό του (Δ) είναι το (II), γίνεται φανερό ότι ισχύει και η σχέση

$$\widehat{w}_1(a_{11}\widehat{x}_1 + a_{12}\widehat{x}_2 + \dots + a_{1n}\widehat{x}_n - b_1) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

- (2) Όταν γνωρίζουμε την άριστη λύση του (II) αλλά όχι και το τελικό *tableau* του, τότε πάλι μπορούμε να βρούμε την άριστη λύση του (Δ) χωρίς τη χρησιμοποίηση της μεθόδου *Simplex* λύνοντας ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων με βάση το Πόρισμα 2 και την προηγούμενη Παρατήρηση.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1. Μια βιομηχανία διαθέτει δύο εργοστάσια E_1, E_2 που παράγουν τρία προϊόντα Π_1, Π_2, Π_3 . Η ωριαία δυναμικότητα των εργοστασίων, δηλαδή ο αριθμός των μονάδων προϊόντων που παράγουν σε μία ώρα λειτουργίας δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	Π_1	Π_2	Π_3
E_1	4	2	3
E_2	3	6	5

Το κόστος ωριαίας λειτουργίας για τα E_1, E_2 είναι 20 και 40 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα ενώ η υπερωριακή λειτουργία τους επιβαρύνει τη βιομηχανία με 30 και 60 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα για κάθε πρόσθετη ώρα απασχόλησης. Απαιτούνται τουλάχιστον 30, 70 και 60 μονάδες από τα προϊόντα Π_1, Π_2 και Π_3 , κάθε μέρα. Εάν η διάρκεια κανονικής λειτουργίας των εργοστασίων είναι το πολύ 8 ώρες και η υπερωριακή απασχόληση δεν επιτρέπεται να υπερβεί τις 3 ώρες την ημέρα, πόσες ώρες πρέπει να λειτουργεί κάθε εργοστάσιο ώστε το συνολικό κόστος να ελαχιστοποιείται; Να γίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.

ΛΥΣΗ 1. Έστω x_i οι ώρες κανονικής λειτουργίας και y_i οι ώρες υπερωριακής λειτουργίας για το εργοστάσιο $E_i, i = 1, 2$ την ημέρα. Τότε οι συνολικές παραγόμενες ποσότητες από κάθε προϊόν είναι:

$$4(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) \quad \text{για το } \Pi_1$$

$$2(x_1 + y_1) + 6(x_2 + y_2) \quad \text{για το } \Pi_2$$

$$3(x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2) \quad \text{για το } \Pi_3.$$

Συνεπώς, η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος ως π.γ.π. είναι:

$$\min(20x_1 + 40x_2 + 30y_1 + 60y_2)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$4(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) \geq 30$$

$$2(x_1 + y_1) + 6(x_2 + y_2) \geq 70$$

$$3(x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2) \geq 60$$

$$x_1, x_2 \leq 8$$

$$y_1, y_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 2. Ένας συνεταιρισμός πορτοκαλοπαραγωγών έχει δύο αποθήκες A_1 και A_2 στις οποίες υπάρχουν 200 και 300 τόνοι πορτοκάλια, αντίστοιχα. Τρεις λαχαναγορές Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 θέλουν 250, 160 και 90 τόνους πορτοκάλια. Το κόστος μεταφοράς σε ευρώ ανά τόνο από κάθε αποθήκη σε κάθε λαχαναγορά δίνεται από τον πίνακα:

	Λ_1	Λ_2	Λ_3
A_1	15	18	16
A_2	17	13	20

Ο συνεταιρισμός θέλει να ελαχιστοποιήσει το κόστος μεταφοράς.

- (1) Να γίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.
- (2) Εάν η λαχαναγορά Λ_1 θέλει μόνο 220 τόνους και αναγκασθεί ο συνεταιρισμός να καταστρέψει τους υπόλοιπους 30 τόνους με κόστος 50 ευρώ τον τόνο, ποιά είναι η αντίστοιχη μαθηματική διατύπωση;
- (3) Εάν η λαχαναγορά Λ_3 χρειάζεται 120 τόνους και για να εκπληρώσει ο συνεταιρισμός τις υποχρεώσεις του αγοράζει πορτοκάλια για την αποθήκη A_2 από τους παραγωγούς με τιμή 8 ευρώ τον τόνο πάνω από την κανονική, ποιά είναι η αντίστοιχη μαθηματική διατύπωση;

ΛΥΣΗ 2. (1) Έχουμε ένα πρόβλημα μεταφοράς του οποίου τα δεδομένα συνοψίζονται στον πίνακα:

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Διαθέσιμες ποσότητες
A_1	15	18	16	200
A_2	17	13	20	300
Απαιτούμενες ποσότητες	250	160	90	500

Έστω x_{ij} , $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, η ποσότητα πορτοκαλιών σε τόνους που στέλνεται από την αποθήκη A_i στη λαχαναγορά Λ_j . Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι:

$$\min(15x_{11} + 18x_{12} + 16x_{13} + 17x_{21} + 13x_{22} + 20x_{23})$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 200 & (A_1) \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 300 & (A_2) \\ x_{11} + x_{21} &= 250 & (\Lambda_1) \\ x_{12} + x_{22} &= 160 & (\Lambda_2) \\ x_{13} + x_{23} &= 90 & (\Lambda_3) \\ x_{ij} &\geq 0, & i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

- (2) Εισάγουμε μία υποθετική λαχαναγορά Λ_4 η οποία απορροφά τους 30 επιπλέον τόνους με κόστος μεταφοράς 50 ευρώ ανά τόνο, ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη αποθήκη. Το αρχικό πρόβλημα είναι

ισοδύναμο με ένα πρόβλημα μεταφοράς των οποίων τα δεδομένα του συνοψίζονται στον πίνακα:

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Διαθέσιμες ποσότητες
A_1	15	18	16	50	200
A_2	17	13	20	50	300
Απαιτούμενες ποσότητες	220	160	90	30	500

Έστω x_{ij} , $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$ η ποσότητα πορτοκαλιών σε τόνους που στέλνονται από την αποθήκη A_i στη λαχαναγορά Λ_j . Στην πραγματικότητα x_{i4} , $i = 1, 2$ είναι η ποσότητα πορτοκαλιών από την αποθήκη A_i που καταστρέφεται. Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι:

$$\min(15x_{11} + 18x_{12} + 16x_{13} + 50x_{14} + 17x_{21} + 13x_{22} + 20x_{23} + 50x_{24})$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 300 \\ x_{11} + x_{21} &= 220 \\ x_{12} + x_{22} &= 160 \\ x_{13} + x_{23} &= 90 \\ x_{14} + x_{24} &= 30 \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

- (3) Ο συνεταιρισμός αγοράζει 30 επιπλέον τόνους για την αποθήκη A_2 με τιμή 8 ευρώ τον τόνο πάνω από την κανονική. Προφανώς το πρόβλημα δεν αλλάζει εάν υποθέσουμε ότι οι 30 τόνοι αγοράζονται με την κανονική τιμή και ενσωματώσουμε τα 8 ευρώ ανά τόνο στο κόστος μεταφοράς από την A_2 στις $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$. Ισοδύναμα, εισάγουμε μία υποθετική αποθήκη A_3 που διαθέτει 30 τόνους και το κόστος μεταφοράς ανά τόνο στις $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ είναι $17 + 8 = 25$, $13 + 8 = 21$, $20 + 8 = 28$, αντίστοιχα. Έτσι το αρχικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με ένα πρόβλημα μεταφοράς που τα δεδομένα του συνοψίζονται στον πίνακα:

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Διαθέσιμες ποσότητες
A_1	15	18	16	200
A_2	17	13	20	300
A_3	25	21	28	30
Απαιτούμενες ποσότητες	250	160	90	500

Έστω x_{ij} , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, η ποσότητα πορτοκαλιών σε τόνους που στέλνεται από την αποθήκη A_i στη λαχαναγορά Λ_j . Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι:

$$\min(15x_{11} + 18x_{12} + 16x_{13} + 17x_{21} + 13x_{22} + 20x_{23} + 25x_{31} + 21x_{32} + 28x_{33})$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{rcccccccl}
 x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & = & 200 \\
 & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & = & 300 \\
 & & & & & & & x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & = & 30 \\
 x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & + & x_{31} & & = & 250 \\
 & x_{12} & & & & & + & x_{22} & & & + & x_{32} & = & 160 \\
 & & x_{13} & & & & & + & x_{23} & & & + & x_{33} & = & 120 \\
 & & & & & & & & & & & & x_{ij} & \geq & 0
 \end{array}$$

για όλα τα $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$.

ΑΣΚΗΣΗ 3. Δίνεται το π.γ.π.:

$$\max(x_1 - x_2)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

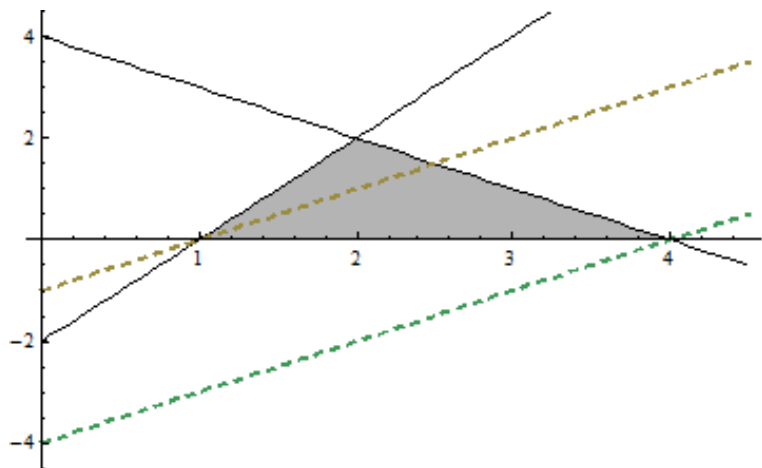
$$2x_1 - x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(1) Να λυθεί γραφικά.

(2) Να γραφεί στην κανονική μορφή και να βρεθούν οι κορυφές του.

ΛΥΣΗ 3. (1) Η εφικτή περιοχή F είναι το τρίγωνο με κορυφές τις $V_1(1, 0)$, $V_2(4, 0)$, $V_3(2, 2)$. Η άριστη λύση δίνεται από τις συντεταγμένες της V_2 , είναι δηλαδή $x_1 = 4$, $x_2 = 0$ με αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 4$.



ΣΧΗΜΑ 1. Η εφικτή περιοχή, η αντικειμενική συνάρτηση και η βέλτιστη λύση.

(2) Η κανονική μορφή του π.γ.π. είναι:

$$\max(x_1 - x_2)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 &= 2 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα με μορφή πινάκων:

$$\max \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

όπου

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Εφόσον $r(A) = 2$, ένας τρόπος για να βρούμε όλες τις κορυφές (βασικές εφικτές λύσεις) είναι να πάρουμε ανά δύο όλες τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A και να λύσουμε τα αντίστοιχα συστήματα, απορρίπτοντας τις λύσεις που έχουν ένα τουλάχιστον αρνητικό στοιχείο. Όλες οι στήλες του A ανά δύο είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επομένως, έχουμε να λύσουμε $\binom{4}{2} = 6$ συστήματα.

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= 4 \\ 2x_1 - x_4 &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_4 &= 6 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_2 &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 &= -2 \\ x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \left. \begin{aligned} x_2 &= 4 \\ -x_2 - x_4 &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 &= 4 \\ x_4 &= -6 \end{aligned}$$

$$(6) \quad \left. \begin{aligned} x_3 &= 4 \\ -x_4 &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= 4 \\ x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Άρα, οι βασικές λύσεις του π.γ.π. είναι:

$$\begin{aligned}\underline{x}_1 &= (2, 2, 0, 0)^T, & \underline{x}_2 &= (1, 0, 3, 0)^T, & \underline{x}_3 &= (4, 0, 0, 6)^T \\ \underline{x}_4 &= (0, -2, 6, 0)^T, & \underline{x}_5 &= (0, 4, 0, -6)^T, & \underline{x}_6 &= (0, 0, 4, -2)^T\end{aligned}$$

Από αυτές μόνο οι τρεις πρώτες έχουν όλα τα στοιχεία τους μη-αρνητικά, είναι δηλαδή εφικτές λύσεις. Άρα οι ζητούμενες κορυφές είναι η $\underline{x}_1 = (2, 2, 0, 0)^T$, $\underline{x}_2 = (1, 0, 3, 0)^T$, $\underline{x}_3 = (4, 0, 0, 6)^T$. Η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει τη μέγιστη τιμή $z = 4$ στην $\underline{x}_3$ που συνεπώς είναι η άριστη λύση.

ΑΣΚΗΣΗ 4. Να λυθεί το π.γ.π.

$$\max(-x_1 + 2x_2 - 3x_3)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \\ 2x_2 - x_3 &\leq 1 \\ x_2 + 2x_4 &\leq 8 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 4\end{aligned}$$

ΛΥΣΗ 4. Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι:

$$\max(-x_1 + 2x_2 - 3x_3)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \\ 2x_2 - x_3 + x_5 &= 1 \\ x_2 + 2x_4 + x_6 &= 8 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 6\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα με μορφή πινάκων

$$\max \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

όπου,

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η πρώτη και οι δύο τελευταίες στήλες του πίνακα A σχηματίζουν τον 3×3 μοναδιαίο πίνακα που μας δίνει την αρχική μη-εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underline{x}_0 = (10, 0, 0, 0, 1, 8)^T$. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο *Simplex* έχουμε τα tableaux:

B	$\underline{c}_B$	$\underline{b}$	$\underline{P}_1$	$\underline{P}_2$	$\underline{P}_3$	$\underline{P}_4$	$\underline{P}_5$	$\underline{P}_6$	Θ	
$\underline{P}_1$	-1	10	1	-1	1	2	0	0	$\frac{10}{2}$	Γ_1
$\underline{P}_5$	0	1	0	2	-1	0	1	0	-	Γ_2
$\underline{P}_6$	0	8	0	1	0	2	0	1	$8/2$	Γ_3
	z	-10	0	-1	2	-2	0	0		Γ_4
$\underline{P}_1$	-1	2	1	-2	1	0	0	-1		$\Gamma'_1 = \Gamma_1 - 2\Gamma'_3$
$\underline{P}_5$	0	1	0	2	-1	0	1	0		$\Gamma'_2 = \Gamma_2$
$\underline{P}_4$	0	4	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$		$\Gamma'_3 = \frac{1}{2}\Gamma_3$
	z	-2	0	0	2	0	0	1		$\Gamma'_4 = \Gamma_4 + 2\Gamma'_3$

Αφού $z_j - c_j \geq 0$ για όλα τα j , βρήκαμε μία άριστη λύση $\underline{x}_1 = (2, 0, 0, 4, 1, 0)^T$. Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $z = -2$. Στο τελικό tableau έχουμε $z_2 - c_2 = 0$, ενώ η $\underline{P}_2$ δεν είναι βασική στήλη (βλέπε Παρατήρηση 2.1, (5), Κεφάλαιο 4). Συνεπώς, η εισαγωγή της $\underline{P}_2$ στη βάση παράγει μία εναλλακτική βέλτιστη βασική εφικτή λύση. Πράγματι, κάνοντας βασική την $\underline{P}_2$, η στήλη $\underline{P}_5$ φεύγει από τη βάση και καταλήγουμε στο tableau

$\underline{P}_1$	-1	3	1	0	0	0	1	-1	$\Gamma''_1 = \Gamma'_1 + 2\Gamma''_2$
$\underline{P}_2$	2	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\Gamma''_2 = \frac{1}{2}\Gamma'_2$
$\underline{P}_4$	0	$\frac{15}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\Gamma''_3 = \Gamma'_3 - \frac{1}{2}\Gamma''_2$
	z	-2	0	0	2	0	0	1	$\Gamma''_4 = \Gamma'_4$

που δίνει την άριστη λύση, $\underline{x}_2 = (3, \frac{1}{2}, 0, \frac{15}{4}, 0, 0)^T$ και $z = -2$. Επομένως, το πρόβλημα έχει άπειρο πλήθος βέλτιστων λύσεων $\underline{x}$ της μορφής

$$\begin{aligned}
 \underline{x} &= \lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda) \underline{x}_2 \\
 &= \lambda(2, 0, 0, 4, 1, 0)^T + (1 - \lambda) \left(3, \frac{1}{2}, 0, \frac{15}{4}, 0, 0 \right)^T \\
 &= \left(3 - \lambda, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda, 0, \frac{15}{4} + \frac{1}{4}\lambda, \lambda, 0 \right)^T, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.
 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5. Να λυθεί το π.γ.π.

$$\min(3x_1 - x_2 + 2x_3)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 9 \\ 5x_2 - x_3 &\leq 1 \\ 4x_1 - x_2 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 3 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

με τη μέθοδο M .

ΛΥΣΗ 5. Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι:

$$-\max(-3x_1 + x_2 - 2x_3)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 9 \\ 5x_2 - x_3 + x_5 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 - x_6 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_7 &= 3 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα με μορφή πινάκων

$$-\max \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

όπου

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_7)^T, \underline{c} = (-3, 1, -2, 0, 0, 0, 0)^T, \underline{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο 4×4 μοναδιαίος πίνακας **δεν** σχηματίζεται από στήλες του πίνακα A και συγκεκριμένα δεν υπάρχει η τρίτη στήλη του. Επομένως, εισάγουμε μία τεχνητή μεταβλητή x_8 , $x_8 \geq 0$, στην τρίτη εξίσωση και έχουμε το νέο σύστημα περιορισμών:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 9 \\ 5x_2 - x_3 + x_5 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 - x_6 + x_8 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_7 &= 3 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών του νέου συστήματος περιέχει τον 4×4 μοναδιαίο πίνακα που δίνει και την αρχική μη-εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underline{x}_0 = (0, 0, 0, 9, 1, 0, 3, 1)^T$.

Θα λύσουμε το πρόβλημα με την M -μέθοδο, δηλαδή θα λύσουμε το π.γ.π.

$$\max(-3x_1 + x_2 - 2x_3 + Mx_8), \quad M \ll 0$$

κάτω από το νέο σύστημα περιορισμών. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Simplex έχουμε:

B	$\underline{c}_B$	$\underline{b}$	-3 $\underline{P}_1$	1 $\underline{P}_2$	-2 $\underline{P}_3$	0 $\underline{P}_4$	0 $\underline{P}_5$	0 $\underline{P}_6$	0 $\underline{P}_7$	M $\underline{P}_8$	Θ	
$\underline{P}_4$	0	9	3	2	-1	1	0	0	0	0	3	Γ_1
$\underline{P}_5$	0	1	0	5	-1	0	1	0	0	0	—	Γ_2
$\underline{P}_8$	M	1	4	-1	0	0	0	-1	0	1	1/4	Γ_3
$\underline{P}_7$	0	3	1	1	1	0	1	0	1	0	3	Γ_4
	z	M	4M+3	-M-1	2	0	0	-M	0	0		Γ_5
$\underline{P}_4$	0	$\frac{33}{4}$	0	$\frac{11}{4}$	-1	1	0	$\frac{3}{4}$	0		$\frac{33}{11}$	$\Gamma'_1 = \Gamma_1 - 3\Gamma'_3$
$\underline{P}_5$	0	1	0	5	-1	0	1	0	0		1/5	$\Gamma'_2 = \Gamma_2$
$\underline{P}_1$	-3	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	0		—	$\Gamma'_3 = \frac{1}{4}\Gamma_3$
$\underline{P}_7$	0	$\frac{11}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	1		$\frac{11}{5}$	$\Gamma'_4 = \Gamma_4 - \Gamma'_3$
	z	$-\frac{3}{4}$	0	-1/4	2	0	0	$\frac{3}{4}$	0			
$\underline{P}_4$	0	$\frac{77}{10}$										$\Gamma''_1 = \Gamma'_1 - \frac{11}{4}\Gamma''_2$
$\underline{P}_2$	1	$\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0			$\Gamma''_2 = \frac{1}{5}\Gamma'_2$
$\underline{P}_1$	-3	$\frac{3}{10}$										$\Gamma''_3 = \Gamma'_3 + \frac{1}{4}\Gamma''_2$
$\underline{P}_7$	0	$\frac{5}{2}$										$\Gamma''_4 = \Gamma'_4 - \frac{5}{4}\Gamma''_2$
	z	$-\frac{7}{10}$	0	0	$\frac{39}{20}$	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{4}$	0			$\Gamma''_5 = \Gamma'_5 + \frac{1}{4}\Gamma''_2$

Αφού $z_j - c_j \geq 0$ για όλα τα j βρήκαμε την άριστη λύση. Η άριστη λύση του αρχικού π.γ.π. είναι η $\underline{x} = (\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, 0, \frac{77}{10}, 0, 0, \frac{5}{2})^T$, με αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = -(-\frac{7}{10}) = \frac{7}{10}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6. Να λυθεί το π.γ.π.

$$\min(8x_1 + 5x_2 + 4x_3)$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 10 \\ x_2 + x_3 &\geq 15 \\ x_1 + x_3 &\geq 12 \\ 20x_1 + 10x_2 + 15x_3 &\leq 300 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

με τη μέθοδο των δύο φάσεων.

ΛΥΣΗ 6. Η κανονική μορφή του π.γ.π. είναι η:

$$-\max(-8x_1 - 5x_2 - 4x_3)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 &= 10 \\ x_2 + x_3 - x_5 &= 15 \\ x_1 + x_3 - x_6 &= 12 \\ 20x_1 + 10x_2 + 15x_3 + x_7 &= 300 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 7. \end{aligned}$$

Ο 4×4 μοναδιαίος πίνακας δεν σχηματίζεται από τις στήλες του πίνακα A . Εισάγουμε τρεις τεχνητές μεταβλητές x_8, x_9 και x_{10} , $x_8, x_9, x_{10} \geq 0$ στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη εξίσωση παίρνοντας το νέο σύστημα περιορισμών:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 + x_8 &= 10 \\ x_2 + x_3 - x_5 + x_9 &= 15 \\ x_1 + x_3 - x_6 + x_{10} &= 12 \\ 20x_1 + 10x_2 + 15x_3 + x_7 &= 300 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \end{aligned}$$

Στην πρώτη φάση θα λύσουμε το πρόβλημα $\min(x_8 + x_9 + x_{10})$ ή ισοδύναμα $-\max(-x_8 - x_9 - x_{10})$ κάτω από τις νέες συνθήκες και στη δεύτερη φάση θα λύσουμε το αρχικό πρόβλημα.

ΦΑΣΗ I

B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	Θ	
$\underline{P}_8$	-1	10	1	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	$10/1$	Γ_1
$\underline{P}_9$	-1	15	0	1	1	0	-1	0	0	0	1	0	-	Γ_2
$\underline{P}_{10}$	-1	12	1	0	1	0	0	-1	0	0	0	1	$\frac{12}{1}$	Γ_3
$\underline{P}_7$	0	300	20	10	15	0	0	0	1	0	0	0	$\frac{300}{20}$	Γ_4
z	-37	-2	-2	-2	1	1	1	0	0	0	0	0		Γ_5
$\underline{P}_1$	0	10	1	1	0	-1	0	0	0		0	0	-	$\Gamma'_1 = \Gamma_1$
$\underline{P}_9$	-1	15	0	1	1	0	-1	0	0		1	0	$\frac{15}{1}$	$\Gamma'_2 = \Gamma_2$
$\underline{P}_{10}$	-1	2	0	-1	1	1	0	-1	0		0	1	$2/1$	$\Gamma'_3 = \Gamma_3 - \Gamma'_1$
$\underline{P}_7$	0	100	0	-10	15	20	0	0	1		0	0	$\frac{100}{15}$	$\Gamma'_4 = \Gamma_4 - 20\Gamma'_1$
z	-17	0	0	-2	-1	1	1	0		0	0	0		$\Gamma'_5 = \Gamma_5 + 2\Gamma'_1$
$\underline{P}_1$	0	10	1	1	0	-1	0	0	0		0	0	$\frac{10}{1}$	$\Gamma''_1 = \Gamma'_1$
$\underline{P}_9$	-1	13	0	2	0	-1	-1	1	0		1		$13/2$	$\Gamma''_2 = \Gamma'_2 - \Gamma''_3$
$\underline{P}_3$	0	2	0	-1	1	1	0	-1	0		0		-	$\Gamma''_3 = \Gamma'_3$
$\underline{P}_7$	0	70	0	5	0	5	0	15	1		0		$\frac{70}{5}$	$\Gamma''_4 = \Gamma'_4 - 15\Gamma''_3$
z	-13	0	-2	0	1	1	-1	0		0				$\Gamma''_5 = \Gamma'_5 + 2\Gamma''_3$
$\underline{P}_1$	0	3.5	1	0	0	-0.5	0.5	-0.5	0					$\Gamma'''_1 = \Gamma''_1 - 2\Gamma'''_2$
$\underline{P}_2$	0	6.5	0	1	0	-0.5	-0.5	0.5	0					$\Gamma'''_2 = \frac{1}{2}\Gamma''_2$
$\underline{P}_3$	0	8.5	0	0	1	0.5	-0.5	-0.5	0					$\Gamma'''_3 = \Gamma''_3 + \Gamma'''_2$
$\underline{P}_7$	0	37.5	0	0	0	7.5	2.5	12.5	1					$\Gamma'''_4 = \Gamma''_4 - 5\Gamma'''_2$
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0					

ΦΑΣΗ II

Στο πρώτο tableau της Φάσης II είναι $z_j - c_j \geq 0$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, 7$ και συνεπώς βρήκαμε τη βέλτιστη λύση $\underline{x} = (3.5, 6.5, 8.5, 0, 0, 0, 37.5)^T$ με αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = -(-94.5) = 94.5$.

ΑΣΚΗΣΗ 7. Να λυθεί το π.γ.π.

$$\max(2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 18$$

$$2x_1 + 12x_2 + x_3 + x_4 \geq 6$$

$$3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 10x_4 \leq -12$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

με το δυϊκό αλγόριθμο Simplex.

ΛΥΣΗ 7. Η ημικανονική μορφή του προβλήματος είναι:

$$\max(2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\leq 18 \\ -2x_1 - 12x_2 - x_3 - x_4 &\leq -6 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 10x_4 &\leq -12 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας από μία περιθώρια μεταβλητή σε κάθε περιορισμό φέρνουμε το πρόβλημα στη σχεδόν κανονική μορφή:

$$\max(2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 &= 18 \\ -2x_1 - 12x_2 - x_3 - x_4 + x_6 &= -6 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 10x_4 + x_7 &= -12 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{aligned}$$

Οι στήλες των περιθωρίων μεταβλητών σχηματίζουν τον 3×3 μοναδιαίο πίνακα που μας δίνει την αρχική βασική αλλά όχι εφικτή λύση $\underline{x}_0 = (0, 0, 0, 0, 18, -6, -12)^T$. Εφαρμόζοντας το δυϊκό αλγόριθμο Simplex έχουμε τα παρακάτω tableaux:

B	$\underline{c}_B$	$\underline{b}$	$\underline{P}_1$	$\underline{P}_2$	$\underline{P}_3$	$\underline{P}_4$	$\underline{P}_5$	$\underline{P}_6$	$\underline{P}_7$	
$\underline{P}_5$	0	18	1	2	2	4	1	0	0	Γ_1
$\underline{P}_6$	0	-6	-2	-12	-1	-1	0	1	0	Γ_2
$\underline{P}_7$	0	-12	3	-2	-4	10	0	0	1	Γ_3
	z	0	-2	-1	-3	-4	0	0	0	Γ_4
$\underline{P}_1$	2	18	1	2	2	4	1	0	0	$\Gamma'_1 = \Gamma_1$
$\underline{P}_6$	0	30	0	-8	3	7	2	1	0	$\Gamma'_2 = \Gamma_2 + 2\Gamma'_1$
$\underline{P}_7$	0	-66	0	-8	-10	-2	-3	0	1	$\Gamma'_3 = \Gamma_3 - 3\Gamma'_1$
	z	36	0	3	1	4	2	0	0	$\Gamma'_4 = \Gamma_4 + 2\Gamma'_1$
$\underline{P}_1$	2	$\frac{24}{5}$								$\Gamma''_1 = \Gamma'_1 - 2\Gamma''_3$
$\underline{P}_6$	0	$\frac{51}{5}$								$\Gamma''_2 = \Gamma'_2 - 3\Gamma''_3$
$\underline{P}_3$	3	$\frac{33}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\Gamma''_3 = -\frac{1}{10}\Gamma'_3$
	z	$\frac{147}{5}$	0	$\frac{11}{5}$	0	$\frac{19}{5}$	$\frac{17}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\Gamma''_4 = \Gamma'_4 - \Gamma''_3$

Στο πρώτο tableau, υπάρχουν αρνητικές διαφορές $z_j - c_j$ άρα εφαρμόζουμε τη Φάση I του αλγορίθμου. Είναι $z_1 - c_1 = -2 < 0$ και $x_{11} = 1 > 0$ άρα η στήλη $\underline{P}_5$ φεύγει από τη βάση. Αφού δεν υπάρχουν θετικές διαφορές $z_j - c_j$ και $\max\left\{\left|-\frac{2}{1}\right|, \left|-\frac{1}{2}\right|, \left|-\frac{3}{2}\right|, \left|-\frac{4}{4}\right|\right\} = \left|-\frac{2}{1}\right|$ στη βάση μπαίνει η στήλη $\underline{P}_1$. Στο δεύτερο tableau όλες

οι διαφορές της τελευταίας γραμμής είναι μη-αρνητικές άρα εφαρμόζουμε τη Φάση II του αλγορίθμου. Είναι $x_{30} = -66 < 0$ και υπάρχει $x_{3j} < 0$ π.χ. $x_{32} = -8 < 0$, άρα η στήλη $\underline{P}_7$ φεύγει από τη βάση αφού $\min \left\{ \left| \frac{3}{-8} \right|, \left| \frac{1}{-10} \right|, \left| \frac{4}{-2} \right|, \left| \frac{2}{-3} \right| \right\} = \left| \frac{1}{-10} \right|$, στη βάση μπαίνει η στήλη $\underline{P}_3$. Στο τρίτο tableau όλα τα στοιχεία της στήλης $\underline{b}$ είναι μη-αρνητικά. Άρα, η αντίστοιχη βασική λύση είναι εφικτή και επομένως βέλτιστη αφού σε όλα τα tableau της Φάσης II οι διαφορές $z_j - c_j$ είναι μη-αρνητικές. Άρα, η άριστη λύση είναι η $\underline{x} = \left(\frac{24}{5}, 0, \frac{33}{5}, 0, 0, \frac{51}{5}, 0 \right)^T$ και η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $z = \frac{147}{5}$.

ΑΣΚΗΣΗ 8. Να βρεθεί το δυικό των ακόλουθων π.γ.π.

(1)

$$\max(10x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 6x_4)$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\leq 70 \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &\leq 60 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 25 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

(2)

$$\min(2800x_1 + 6000x_2 + 1200x_3)$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 15x_1 + 15x_2 + x_3 &\geq 5 \\ 4x_1 - 8x_2 &\geq 5 \\ 12x_1 + 8x_3 &\leq 24 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

(3)

$$\min(3x_1 + x_2 + 2x_3)$$

με περιορισμούς

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_3 &\leq 7 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ 8. Από τον ορισμό του δυικού

(1)

$$\min(70w_1 + 60w_2 + 25w_3)$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 3w_1 + 5w_2 + 5w_3 &\geq 10 \\ 2w_1 + 5w_2 + 6w_3 &\geq 9 \\ 4w_1 + w_2 + 3w_3 &\geq 4 \\ 2w_1 + 3w_2 + w_3 &\geq 6 \\ w_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

(2)

$$\max(5w_1 + 5w_2 + 24w_3)$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 15w_1 + 4w_2 + 12w_3 &\leq 2800 \\ 15w_1 - 8w_2 &\leq 6000 \\ w_1 + 8w_3 &\leq 1200 \\ w_1, w_2 &\geq 0 \\ w_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

(3)

$$\max(5w_1 + 4w_2 + 7w_3 + 4w_4)$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 2w_1 + 4w_2 + 2w_3 + w_4 &\leq 3 \\ w_1 + w_2 + 2w_4 &\leq 1 \\ 3w_1 + w_2 + w_3 &\leq 2 \\ w_1, w_2 &\in \mathbb{R} \\ w_3 &\leq 0 \\ w_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9. Βρείτε το δυϊκό του π.γ.π.

$$\max(x_1 + x_2 + x_3)$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

και στην συνέχεια βρείτε τις βέλτιστες λύσεις και των δύο, πρωτεύοντος και δυϊκού.

ΛΥΣΗ 9. Το δυϊκό είναι:

$$\min(2w_1 + 2w_2)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$2w_1 + 4w_2 \geq 1$$

$$w_1 + 2w_2 \geq 1$$

$$2w_1 + w_2 \geq 1$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

Θα λύσουμε το πρωτεύον του οποίου η κανονική μορφή είναι:

$$\max(x_1 + x_2 + x_3)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Simplex παίρνουμε τα ακόλουθα tableaux:

	B	c_B	b	1	1	1	0	0		Θ	
	$\underline{P}_4$	0	2	2	1	2	1	0	$-\frac{2}{2}$		Γ_1
	$\underline{P}_5$	0	2	4	2	1	0	1	$\frac{2}{4}$		Γ_2
	z	0		-1	-1	-1	0	0			Γ_3
	$\underline{P}_4$	0	1	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{2}{4}$	$\frac{2}{3}$		$\Gamma'_1 = \Gamma_1 - 2\Gamma'_2$
	$\underline{P}_1$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	2		$\Gamma'_2 = \frac{1}{4}\Gamma_2$
	z	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$				$\Gamma'_3 = \Gamma_3 + \Gamma'_2$
	$\underline{P}_3$	1	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-		$\Gamma''_1 = \frac{2}{3}\Gamma'_1$
	$\underline{P}_1$	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\Gamma''_2 = \Gamma'_2 - \frac{1}{4}\Gamma''_1$
	z	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0				$\Gamma''_3 = \Gamma'_3 + \frac{3}{4}\Gamma''_1$
	$\underline{P}_3$	1	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$			$\Gamma'''_1 = \Gamma''_1$
	$\underline{P}_2$	1	$\frac{2}{3}$	2	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$			$\Gamma'''_2 = 2\Gamma''_2$
	z	$\frac{4}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$				$\Gamma'''_3 = \Gamma''_3 + \frac{1}{2}\Gamma'''_2$

Αφού $z_j - c_j \geq 0$ για όλα τα j βρέθηκε η βέλτιστη λύση που είναι η $\underline{x} = (0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$ με αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = \frac{4}{3}$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 3.3 αφού $\hat{x}_2 > 0$ και $\hat{x}_3 > 0$ ο δεύτερος και τρίτος περιορισμός του δυϊκού προβλήματος ως ισότητες θα μας δώσουν την βέλτιστη λύση $\underline{w}$ του δυϊκού. Είναι

$$\left. \begin{aligned} w_1 + 2w_2 &= 1 \\ 2w_1 + w_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow w_1 = w_2 = \frac{1}{3} \text{ άρα η βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι: } \underline{w} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T \text{ και η}$$

αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $z = \frac{4}{3}$ (όπως στο πρωτεύον πρόβλημα).

ΑΣΚΗΣΗ 10. Η βαθμολογία τεσσάρων υποψηφίων A_1, A_2, A_3, A_4 που εξετάσθηκαν για τέσσερις θέσεις B_1, B_2, B_3, B_4 δίνεται από τον επόμενο πίνακα.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	9	8	7	6
A_2	5	4	3	2
A_3	3	4	5	6
A_4	7	8	9	10

Να βρεθεί η καλύτερη τοποθέτησή τους.

ΛΥΣΗ 10. Έστω,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{εάν ο υποψήφιος } A_i \text{ τοποθετείται στη θέση } B_j. \\ 0, & \text{εάν ο υποψήφιος } A_i \text{ δεν τοποθετείται στη θέση } B_j. \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας το πρώτο βήμα του Ουγγρικού αλγορίθμου παίρνουμε τα διαδοχικά tableau:

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0^* & -1 & -3 \\ 0^* & 0 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & 0^* & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0^* \end{pmatrix}$$

Ο ελάχιστος αριθμός r ευθειών με τις οποίες διαγράφουμε όλα τα 0 του τελευταίου tableau είναι 4, δηλαδή ίσος με τον αριθμό m των γραμμών ή στηλών του tableau. Άρα, το tableau αυτό μας δίνει και την άριστη λύση. Υπάρχουν τόσες άριστες λύσεις όσες και οι ομάδες ανεξάρτητων μηδενικών του tableau. Μία τέτοια ομάδα σημειώνεται με αστερίσκους. Έτσι υπάρχουν τέσσερις άριστες λύσεις, οι:

$$x_{11} = x_{22} = x_{33} = x_{44} = 1, \quad x_{ij} = 0 \quad \text{για τα υπόλοιπα } (i, j)$$

$$x_{12} = x_{21} = x_{33} = x_{44} = 1, \quad x_{ij} = 0 \quad \text{για τα υπόλοιπα } (i, j)$$

$$x_{11} = x_{22} = x_{34} = x_{43} = 1, \quad x_{ij} = 0 \quad \text{για τα υπόλοιπα } (i, j)$$

$$x_{12} = x_{21} = x_{34} = x_{43} = 1, \quad x_{ij} = 0 \quad \text{για τα υπόλοιπα } (i, j)$$

Η μέγιστη συνολική απόδοση είναι 28.