ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ #1

#1 (α) $F_X(x)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)=(1-e^{-4x^2})\lim_{y\to\infty}(1-e^{-3y})=1-e^{-4x^2},\ x>0$

$F_Y(y)=\lim_{x\to\infty}F(x,y)=(1-e^{-3y})\lim_{x\to\infty}(1-e^{-4x^2})=1-e^{-3y},\ y>0.$

(β) (i) Έστω τα ενδεχόμενα

A: ο λαμπτήρας A ζει λιγότερο από 500 ώρες, δηλαδή $X<1/2$

και B: ο λαμπτήρας B ζει λιγότερο από 500 ώρες, δηλαδή $Y<1/2$. Ζητάμε την πιθανότητα:

$P(A^c\cap B^c)=P((A\cup B)^c)=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

Είναι $P(A)=P(X<1/2)=F_X(1/2)=1-e^{-4\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1-e^{-1}\cong 63\%$

$P(B)=P(Y<1/2)=F_Y(1/2)=1-e^{-3\frac{1}{2}}=1-e^{-3/2}$

$P(A\cap B)=P(X<1/2,Y<1/2)=F(1/2,1/2)=(1-e^{-1})(1-e^{-3/2})$

και

(ii) Ζητάμε την πιθανότητα: $P(A^c\cup B^c)=P((A\cap B)^c)$

$=1-P(A\cap B)$

(γ) $f_X(x)=F_X'(x)=(1-e^{-4x^2})'=8xe^{-4x^2},\ x>0$

$f_Y(y)=F_Y'(y)=(1-e^{-3y})'=3e^{-3y},\ y>0$

και $f(x,y)=\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=24xe^{-3y}e^{-4x^2},\ x>0,\ y>0.$ ⊠

#2 <u>1ος τρόπος</u>: $P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{n}P(X=i,Y=k-i)$

$\underset{X,Y\text{ ανεξ.}}{=}\sum_{i=0}^{n}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i}$

$=p^k(1-p)^{n+m-k}\underbrace{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}=\binom{n+m}{k}p^k(1-p)^{n+m-k}$

ίσα από γνωστή ταυτότητα της Συνδυαστικής

Άρα $X+Y \sim Bin(n+m, p)$.

<u>2ος τρόπος:</u> $M_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) \overset{X,Y \text{ ανεξ.}}{=\!=\!=} E(e^{tX})E(e^{tY})$

$= M_X(t)M_Y(t) = (pe^t+1-p)^n (pe^t+1-p)^m = (pe^t+1-p)^{n+m}$,

$t \in \mathbb{R}$.

Άρα $X+Y \sim Bin(n+m, p)$. ☒

<u>#3</u> Είναι

$Cov(5X+4, 2-Y) = 5\,Cov(X,2) - 5\,Cov(X,Y) + Cov(4,2) - Cov(4,Y)$

$= -5\,Cov(X,Y) = -5[E(XY) - E(X)E(Y)]$

Για τον υπολογισμό των EX, EY χρειάζονται οι πυκνότητες f_X, f_Y.

Έχουμε:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{2} e^{-(x+y)} I(0<x<2y)\,dy = \frac{3}{2} e^{-x} I(x>0) \int_{\frac{x}{2}}^{\infty} e^{-y} dy$$

$= \frac{3}{2} e^{-\frac{3x}{2}} I(x>0)$, δηλαδή $X \sim$ Εκθετική$(\frac{3}{2})$, όπου I η δείκτρια συνάρτηση.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{2} e^{-(x+y)} I(0<x<2y)\,dx = \frac{3}{2} e^{-y} I(y>0) \int_0^{2y} e^{-x} dx$$

$$= \frac{3}{2}(e^{-y} - e^{-3y}) I(y>0)$$

$E(X) = \frac{2}{3}$, $E(Y) = \int_0^{\infty} y \frac{3}{2}(e^{-y} - e^{-3y})\,dy = \frac{4}{3}$ και

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y)\,dx\,dy = \frac{3}{2}\int_0^{\infty} x e^{-x}\left[\int_{\frac{x}{2}}^{\infty} y e^{-y} dy\right] dx = \frac{10}{9}$$

Άρα $Cov(5X+4, 2-Y) = -5\left(\frac{10}{9} - \frac{2}{3}\frac{4}{3}\right) = -\frac{10}{9}$. ☒

<u>#4</u> (a) $F(x) = P(X \le x) = \int_a^x \theta e^{-\theta(y-a)} dy = 1 - e^{\theta(a-x)}$, $x > a$

$P(\frac{a}{2} < X < a+1) = \int_{a/2}^{a+1} f(x)\,dx = \int_a^{a+1} f(x)\,dx = \int_a^{a+1} \theta e^{-\theta(a-x)} dx =$

$= 1 - e^{-\theta}$

(β) $M(t) = E(e^{tX}) = \int_a^{\infty} e^{tx}\,\theta e^{-\theta(x-a)}\,dx = \frac{\theta}{\theta - t} e^{ta}, \ t<\theta$

(γ) $EX = M'(0) = \frac{1+a\theta}{\theta}$, $var(X) = EX^2 - (EX)^2$

$= M''(0) - (EX)^2 = \frac{1}{\theta^2}$ ☒

#5 Έστω $Y :=$ χρόνος (σε ώρες) μέχρι την απελευθέρωση

και $X :=$ πόρτα που διαλέγει αρχικά

$E[Y] = E[E(Y|X)] = E[Y|X=1]P(X=1) + E(Y|X=2)P(X=2) + E(Y|X=3)P(X=3)$

$= \frac{1}{3}[E(Y|X=1) + E(Y|X=2) + E(Y|X=3)]$

Όμως

$E(Y|X=1) = 3$, $E(Y|X=2) = 5 + EY$, $E(Y|X=3) = 7 + EY$

Συνεπώς $EY = \frac{1}{3}(3 + 5 + EY + 7 + EY) \Rightarrow \underline{EY = 15}$ ☒

#6 $F_{Z_n}(z) = P(n(1-Y_n) \le z) = P(Y_n \ge 1 - \frac{z}{n}) = 1 - P(Y_n < 1 - \frac{z}{n})$

$\overset{X_1,\dots,X_n}{\underset{\text{ανεξ.}}{=\!=}}\ 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i < 1 - \frac{z}{n}) = 1 - [P(X_1 < 1 - \frac{z}{n})]^n$

$= 1 - (1 - \frac{z}{n})^n, \ 0 < z < 1$

Παρατηρούμε ότι $F_{Z_n}(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - e^{-z} = F_Z(z)$,

όπου $Z \sim$ Εκθετική(1) δηλαδή $Z_n \xrightarrow{d} Z$. ☒

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ #2

#1 $P(X_{n+1}=i_{n+1} \mid X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1}, \ldots, X_0=i_0)$

$$= \frac{P(X_{n+1}=i_{n+1}, X_n=i_n, \ldots, X_0=i_0)}{P(X_n=i_n, \ldots, X_0=i_0)}$$

$$\underset{\text{ανεξ.}}{\overset{X_n,\, n=0,1,\ldots}{=}} \frac{P(X_{n+1}=i_{n+1})P(X_n=i_n)\cdots P(X_0=i_0)}{P(X_n=i_n)\cdots P(X_0=i_0)} = P(X_{n+1}=i_{n+1})$$

Άρα, η ακολουθία $X_n, n=0,1,\ldots$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο. Είναι και ομογενής αν οι τ.μ. $X_n, n=0,1,\ldots$ είναι ισόνομες. ☒

#2 Έστω για $n=1,2,\ldots$

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{αν για τη } n\text{-οστή ρίψη χρησιμοποιούμε το } 1^{\text{ο}} \text{ νόμισμα} \\ 2, & \text{αν για τη } n\text{-οστή ρίψη χρησιμοποιούμε το } 2^{\text{ο}} \text{ νόμισμα} \end{cases}$$

Αν γνωρίζουμε ότι $X_n=i$ μπορούμε να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα της X_{n+1} και έτσι δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε τις τιμές των $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$. Επομένως, η $X_n, n=0,1,\ldots$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο. Ο πίνακας P είναι

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

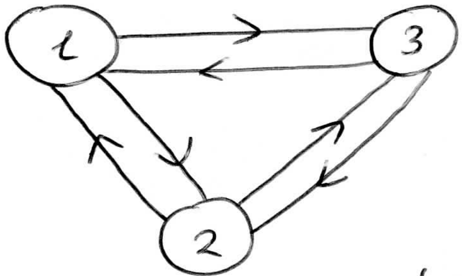
$$P(X_2=1) = P(X_2=1 \mid X_0=1)P(X_0=1) + P(X_2=1 \mid X_0=2)P(X_0=2)$$

$$= \frac{P_{11}^{(2)} + P_{21}^{(2)}}{2} = \frac{1-2(a-b)+a^2-b^2}{2},$$ από τον

τύπο του Παραδείγματος για τον υπολογισμό του πίνακα P^n.

#3 (α) Το διάγραμμα καταστάσεων που αντιστοιχεί στον πίνακα P_1 είναι:

$I=\{1,2,3\}$



Όλες οι καταστάσεις είναι έμμονες θετικές και απεριοδικές. Επικοινωνούν ανά δύο μεταξύ τους. Δηλαδή όλες οι καταστάσεις είναι εργοδικές.

Άρα $M=\phi$ και $E=\{1,2,3\}$.

Για την κατάσταση 1 $f_{11}^{(1)}=0$

$$f_{11}^{(2)}=P_{12}P_{21}+P_{13}P_{31}=2pq$$

$$f_{11}^{(3)}=P_{12}P_{23}P_{31}+P_{13}P_{32}P_{21}=p^3+q^3$$

$$f_{11}^{(4)}=P_{12}P_{23}P_{32}P_{21}+P_{13}P_{32}P_{23}P_{31}=2(pq)^2$$

$$f_{11}^{(5)}=P_{12}P_{23}P_{32}P_{23}P_{31}+P_{13}P_{32}P_{23}P_{32}P_{21}$$

$$=p^4q+q^4p=pq(p^3+q^3)$$

$$f_{11}^{(6)}=P_{12}P_{23}P_{32}P_{23}P_{32}P_{21}+P_{13}P_{32}P_{23}P_{32}P_{23}P_{31}$$

$$=p^3q^3+p^3q^3=2p^3q^3$$

Ο γενικός τύπος είναι: $$f_{11}^{(n)}=\begin{cases}0, & n=1\\ 2(pq)^{n/2}, & n \text{ άρτιος}\\ (pq)^{\frac{n-3}{2}}(p^3+q^3), & n \text{ περιττός}\end{cases}$$

Άρα,

$$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{11}^{(n)}=\sum_{k=1}^{\infty}f_{11}^{(2k)}+\sum_{k=1}^{\infty}f_{11}^{(2k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}2(pq)^k+\sum_{k=1}^{\infty}(p^3+q^3)(pq)^{k-1}=\frac{2pq}{1-pq}+\frac{p^3+q^3}{1-pq}=$$

$$= \frac{p^3+q^3+2pq}{1-pq} = \frac{(p+q)(p^2-pq+q^2)+2pq}{(1-pq)}$$

$$= \frac{p^2-pq+q^2+2pq}{1-pq} = \frac{(p+q)^2-pq}{1-pq} = \frac{1-pq}{1-pq} = 1$$

$\Rightarrow f_{11}=1 \Rightarrow 1$ έμμονη.

Επίσης

$$\mu_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} < \infty$$ διότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n) f_{11}^{(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty}(2n)\, 2(pq)^n = 4\sum_{n=1}^{\infty} n(pq)^n$$

$$= 4pq\sum_{n=1}^{\infty} n(pq)^{n-1} = \frac{4pq}{(1-pq)^2} < \infty$$

Επίσης

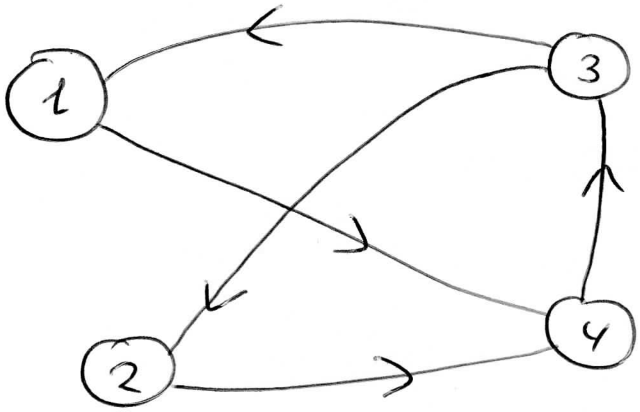
$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1) f_{11}^{(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(pq)^{n-1}(p^3+q^3)$$

$$=(p^3+q^3)\left[2\sum_{n=1}^{\infty} n(pq)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(pq)^{n-1}\right]$$

$$=(p^3+q^3)\left[\frac{2}{(1-pq)^2} + \frac{1}{1-pq}\right] < \infty$$ δηλ.

$\mu_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} < \infty$, άρα η κατάσταση 1 είναι έμμονη, θετική. Αφού επικοινωνεί με τις 2, 3 και οι 2, 3 θα είναι έμμονες, θετικές.

(β) Κατασκευάζουμε το διάγραμμα καταστάσεων που αντιστοιχεί στον πίνακα P_2 και έχουμε:



$I=\{1,2,3,4\}$

$M=\emptyset$

$E=\{1,2,3,4\}$

Όλες οι καταστάσεις είναι έμμονες, θετικές και είναι περιοδικές με περίοδο $d=3$.

$$f_{11}^{(1)}=0,\quad f_{11}^{(2)}=0,\quad f_{11}^{(3)}=P_{14}P_{43}P_{31}=p$$

$$f_{11}^{(4)}=0,\quad f_{11}^{(5)}=0,\quad f_{11}^{(6)}=P_{14}P_{43}P_{32}P_{24}P_{43}P_{31}=pq$$

$$f_{11}^{(7)}=0,\quad f_{11}^{(8)}=0,\quad f_{11}^{(9)}=P_{14}P_{43}P_{32}P_{24}P_{43}P_{32}P_{24}P_{43}P_{31}$$
$$=pq^2$$

$$f_{11}^{(n)}=pq^{\frac{n-3}{3}}=pq^{\frac{n}{3}-1},\quad n=3k,\ k=1,2,\ldots$$

$$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{11}^{(n)}=p+pq+pq^2+\ldots=p(1+q+q^2+\ldots)$$
$$=p\,\frac{1}{1-q}=\frac{p}{p}=1$$

$$\mu_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}n f_{11}^{(n)}=3p+6pq+9q^2p=p(3+6q+9q^2+\ldots)$$

$$3+6q+9q^2+\ldots=3(1+2q+3q^2+\ldots)=3\Sigma_\nu$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma_\nu=1+2q+3q^2+\ldots\\ q\Sigma_\nu=q+2q^2+3q^3+\ldots\end{array}\right\}\Rightarrow \Sigma_\nu-q\Sigma_\nu=1+q+q^2+\ldots$$
$$=\frac{1}{1-q}$$

$$\Rightarrow \Sigma_\nu=\frac{1}{(1-q)^2}$$ Άρα $\mu_{11}=p\,3\,\Sigma_\nu=\dfrac{3p}{(1-q)^2}<\infty$.

Άρα, η 1 είναι έμμονη, θετική. Ομοίως για 2.

$$f_{33}^{(n)} = f_{33}^{(3)} = P_{32}P_{24}P_{43} + P_{31}P_{14}P_{43} = p+q = 1$$

$$\mu_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{33}^{(n)} = 3 < \infty.$$ Άρα 3 έμμονη, θετική

Όμοια $f_{44}^{(n)} = f_{44}^{(3)} = 1$ και $\mu_{44} = 3 < \infty$. Άρα 4 έμμονη, θετική. ⊠

#4 Παρατηρούμε ότι ο πίνακας P_1 είναι διπλά στοχαστικός. Από γνωστό Παράδειγμα στις στάσιμες κατανομές, έπεται ότι: $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 1/3$, $i,j = 1,2,3$ ⊠

#5 Αν $Y_n = 0$ τότε $\delta(Y_n) = 0$ και $Y_{n+1} = X_{n+1}$, ενώ αν $Y_n \neq 0$ τότε $\delta(Y_n) = 1$ και $Y_{n+1} = X_{n+1} + Y_n - 1$. Επειδή η X_{n+1} είναι ανεξάρτητη των $Y_1, \ldots, Y_n$ αν γνωρίζουμε την τιμή της Y_n τότε δεν χρειάζονται οι τιμές των $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ για τον υπολογισμό της δεσμευμένης συνάρτησης πιθανότητας της Y_{n+1}. Επομένως η $Y_n, n = 0,1,2,\ldots$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με πιθανότητες μετάβασης:

$$P_{0j} = P(Y_{n+1} = j \mid Y_n = 0) = P(X_{n+1} = j) = p_j, \; j = 0,1,2,\ldots$$

και για $i = 1,2,\ldots$

$$P_{ij} = P(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i) = P(X_{n+1} = j-i+1) = p_{j-i+1}$$

για $j \geq i-1$

$P_{ij} = 0$ για $j < i-1$. ⊠