ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1. Ασκήσεις στις βασικές αρχές απαρίθμησης

1. (α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν στη σειρά 10 άνθρωποι σε 4 καρέκλες; (β) Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν από τα 10 ψηφία 0,1,2,...,9 εάν (i) επιτρέπονται επαναλήψεις; (ii) δεν επιτρέπονται επαναλήψεις; (iii) το τελευταίο ψηφίο είναι το μηδέν και δεν επιτρέπονται επαναλήψεις;

2. Μία κάλπη περιέχει 10 μπαλάκια από τα οποία 7 είναι μαύρα και 3 είναι άσπρα. Βγάζουμε τυχαία 3 μπαλάκια το ένα μετά το άλλο χωρίς επανατοποθέτηση. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: (i) Τα δύο πρώτα μπαλάκια να είναι μαύρα και το τρίτο άσπρο. (ii) Να βγούνε εναλλάξ χρώματα.

3. Μία πόλη Α συνδέεται με την πόλη Β μέσω δύο διαφορετικών δρόμων ενώ η πόλη Β συνδέεται με την πόλη Γ μέσω τεσσάρων δρόμων. (α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να ταξιδέψει κανείς από την πόλη Α στην πόλη Γ; (β) Αν η επιλογή των δρόμων γίνεται εντελώς τυχαία ποια είναι η πιθανότητα επιλογής κάποιας συγκεκριμένης διαδρόμης;

4. Οι αριθμοί κυκλοφορίας των αυτοκινήτων αποτελούνται από τρία γράμματα και ένα τετραψήφιο αριθμό. Για το πρώτο τμήμα του αριθμού κυκλοφορίας χρησιμοποιούνται μόνο τα 14 ελληνικά γράμματα τα οποία συμπίπτουν με αντίστοιχους λατινικούς χαρακτήρες (Α, Β, Ε, Ζ, Η, Ι, Κ, Μ, Ν, Ο, Ρ, Τ, Υ, Χ) ενώ στην πρώτη θέση του δεύτερου τμήματος δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αριθμός 0 (ώστε να έχουμε τετραψήφιο αριθμό). (α) Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί κυκλοφορίας μπορούν να σχηματιστούν; (β) Πόσοι από τους αριθμούς αυτούς έχουν και τα τρία γράμματα του πρώτου τμήματος διαφορετικά μεταξύ τους; (γ) Ας υποθέσουμε ότι όλοι οι δυνατοί αριθμοί κυκλοφορίας έχουν μοιραστεί σε αυτοκίνητα. Αν διαλέξουμε ένα αυτοκίνητο στην τύχη, ποια είναι η πιθανότητα τα τρία γράμματα του αριθμού να είναι διαφορετικά μεταξύ τους;

5. Ένα μικρό παιδί παίζει με τρεις κύβους που έχουν τα γράμματα Η, Σ, Τ (σε κάθε κύβο έχει σημειωθεί μόνο το ένα από τα τρία γράμματα). (α) Πόσες και ποιες διαφορετικές λέξεις (οι πιο πολλές χωρίς νόημα) μπορεί να φτιάξει το παιδί χρησιμοποιώντας τον κάθε κύβο ακριβώς μία φορά; (β) Αν η τοποθέτηση των τριών κύβων στη σειρά γίνεται εντελώς τυχαία (i) ποια είναι η πιθανότητα η λέξη που θα σχηματιστεί να αρχίζει με Τ; (ii) ποια είναι η πιθανότητα η λέξη που θα σχηματιστεί να έχει νόημα;

6. Σε μία λαχειοφόρο αγορά πουλήθηκαν 10000 λαχνοί αριθμημένοι από το 1 μέχρι το 10000. Κατά την κλήρωση επιλέγεται ένας λαχνός στην τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα ο λαχνός που κερδίζει να είναι πολλαπλάσιο του δύο ή του πέντε;

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΦΥΛΛΑΔΙΟ #1

#1 (α) Στην πρώτη καρέκλα μπορεί να καθίσει οποιοσδήποτε από τους 10, στη δεύτερη οποιοσδήποτε από τους υπόλοιπους 9, στην τρίτη οποιοσδήποτε από τους υπόλοιπους 8 και στην τέταρτη οποιοσδήποτε από τους υπόλοιπους 7.

$$\underset{\sqcup}{10}\ \underset{\sqcup}{9}\ \underset{\sqcup}{8}\ \underset{\sqcup}{7} \overset{ΒΑΑ}{=} 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$$ διαφορετικοί τρόποι.

Ουσιαστικά, δηλαδή ζητείται το πλήθος των δυνατών διατάξεων 10 ανθρώπων σε 4 καρέκλες.

Άρα, με $_{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$

διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν στη σειρά 10 άνθρωποι σε 4 καρέκλες.

(β) (i) Για να είναι τετραψήφιος ο αριθμός το πρώτο ψηφίο δεν μπορεί να είναι μηδέν. Έτσι το 1º ψηφίο μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα 9 ψηφία. Τα άλλα ψηφία του τετραψήφιου αριθμού μπορούν να είναι οποιαδήποτε από τα 10 ψηφία. Άρα, το σύνολο των τετραψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν αν επιτρέπονται επαναλήψεις είναι: $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10$ $= 9\cdot 10^3 = 9.000$ αριθμοί.

(ii) Αρχικά δεχόμαστε ότι το πρώτο ψηφίο μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα ψηφία 1, 2, 3, ..., 9 (όχι όμως το μηδέν). Το δεύτερο ψηφίο μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα 9 ψηφία. Το τρίτο ψηφίο μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα

8 ψηφία. Το τέταρτο ψηφίο μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα 7 ψηφία. Συνεπώς, θα έχουμε: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4.536$ αριθμοί.

Εναλλακτικά: $9 \cdot {}_{9}P_{3} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4.536$ αριθμοί.

(iii) Το τελευταίο ψηφίο πρέπει να είναι μηδέν και το πρώτο επιλέγεται μέσα από 9 ψηφία (όχι το μηδέν). Το δεύτερο ψηφίο επιλέγεται από 8 ψηφία ενώ το τρίτο από 7. Άρα, σχηματίζονται $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ αριθμοί.

Εναλλακτικά: $9 \cdot {}_{8}P_{2} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ αριθμοί.

#2 (i) Η πιθανότητα τα δύο πρώτα μπαλάκια να είναι μαύρα και το τρίτο άσπρο είναι:

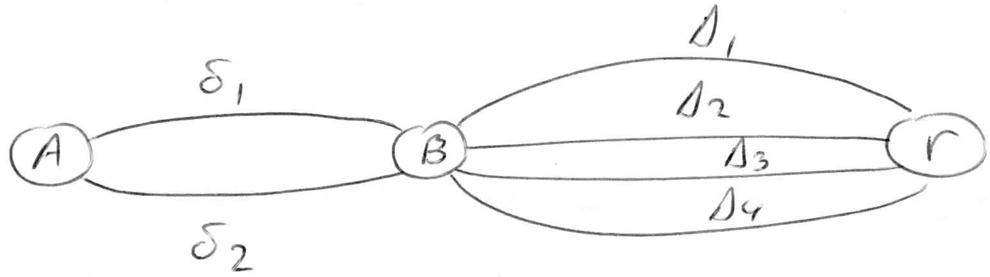
$$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{126}{720} = \frac{7}{40}.$$

(ii) Η πιθανότητα να βγούνε εναλλάξ τα χρώματα ισούται με:

$$(MAM) + (AMA) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8}$$

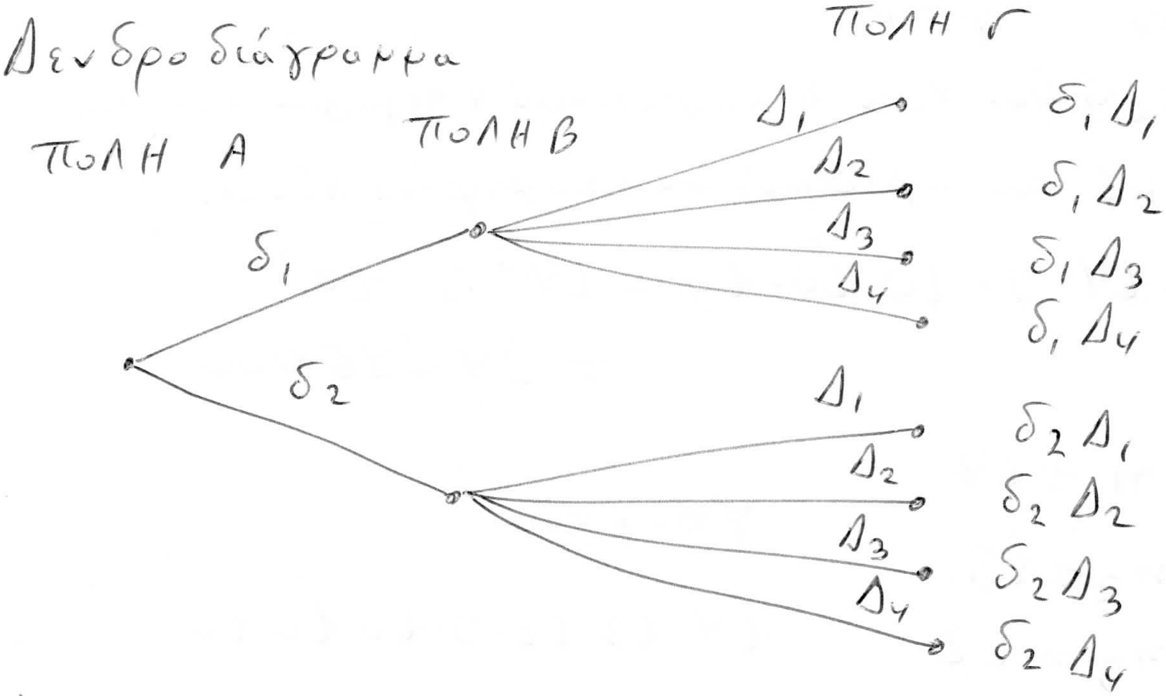
$$= \frac{126}{720} + \frac{42}{720} = \frac{7}{30}.$$

#3 (α) Συμβολίζουμε με δ_1, δ_2 τους δύο δρόμους που συνδέουν τις πόλεις A, B και με $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ τους τέσσερις δρόμους που συνδέουν τις πόλεις B και Γ.



Η επιλογή του δρόμου που θα χρησιμοποιηθεί για τη μετάβαση από την πόλη Α στην πόλη Β μπορεί να γίνει με $n_1 = 2$ τρόπους. Για κάθε επιλογή του δρόμου από την Α στην Β υπάρχουν $n_2 = 4$ τρόποι επιλογής του δρόμου που θα χρησιμοποιηθεί για τη μέταβαση από την πόλη Β στην πόλη Γ. Άρα, κάποιος μπορεί να ταξιδέψει από την πόλη Α στην πόλη Γ με $n_1 n_2 = 2 \cdot 4 = 8$ διαφορετικούς τρόπους.

Δενδροδιάγραμμα



(β) Αφού όλες οι διαδρομές είναι ισοπίθανες και ο δειγματικός χώρος Ω έχει 8 στοιχεία κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο του Ω (δηλαδή κάθε συγκεκριμένη διαδρομή) θα έχει πιθανότητα επιλογής ίση με $1/8$.

#4

Έστω $a_1\ a_2\ a_3 | a_4\ a_5\ a_6\ a_7$ τα επτά σύμβολα που σχηματίζουν τον αριθμό κυκλοφορίας των αυτοκινήτων.

Στοιχείο a_1: $n_1 = 14$ διαφορετικοί τρόποι

a_2: $n_2 = 14$ διαφορετικοί τρόποι (για κάθε επιλογή του a_1)

a_3: $n_3 = 14$

a_4: $n_4 = 9$ $\quad a_4 \in \{1, \ldots, 9\}$ (όχι μηδέν)

a_5: $n_5 = 10$

a_6: $n_6 = 10$

a_7: $n_7 = 10$

Άρα, το πλήθος των διαφορετικών επιλογών για το σχηματισμό του αριθμού κυκλοφορίας είναι:

$$14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 14^3\, 9 \cdot 10^3$$
$$= 24696000$$

(β) a_1: $n_1 = 14$

a_2: $n_2 = 13$

a_3: $n_3 = 12$

a_4: $n_4 = 9$

a_5: $n_5 = 10$

a_6: $n_6 = 10$

a_7: $n_7 = 10$

Υπάρχουν

$$14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$
$$= 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 10^3$$
$$= 1965600$$

αριθμοί κυκλοφορίας στους οποίους τα τρία γράμματα είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

(γ) Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αποτελείται από όλους τους δυνατούς αριθμούς κυκλοφορίας, ενώ το ενδεχόμενο το οποίο μας ενδιαφέρει είναι το

A: τα τρία γράμματα του αριθμού είναι διαφορετικά μεταξύ τους

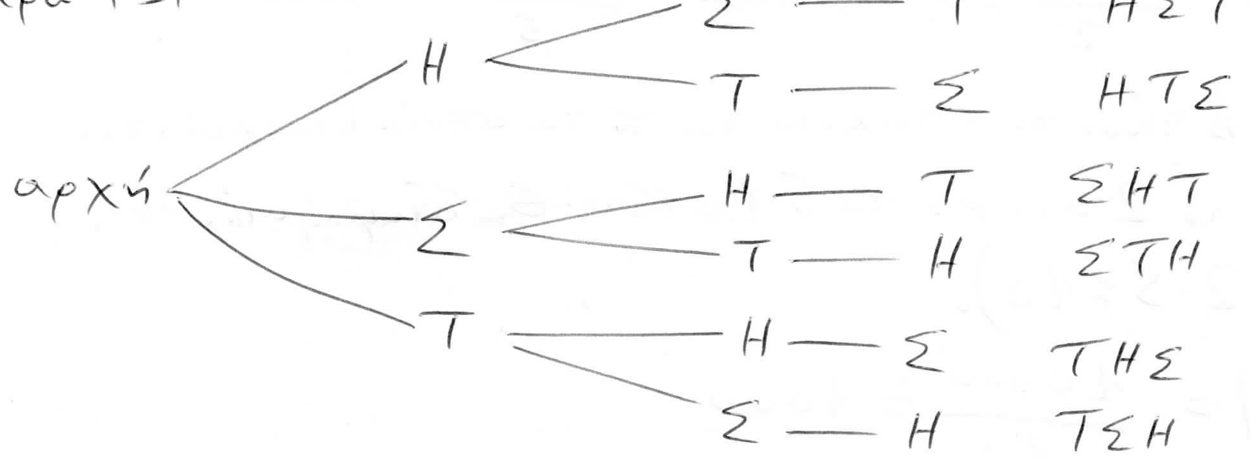
Άρα

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{19656000}{24696000}\cong 0.7959\cong 80\%.$$

#5(α) Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων όπως φαίνεται στο δενδροδιάγραμμα είναι

$\Omega=\{ΗΣΤ, ΗΤΣ, ΣΗΤ, ΣΤΗ, ΤΗΣ, ΤΣΗ\}$

άρα $|\Omega|=6$.



(β) Αφού η τοποθέτηση των κύβων γίνεται εντελώς τυχαία τα 6 απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο Ω θα είναι ισοπίθανα άρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας.

(i) Έχουμε $A=\{ΤΗΣ, ΤΣΗ\}$

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

(ii) Από τις "λέξεις" μόνο 2 έχουν νόημα: η λέξη "ΤΗΣ" και η λέξη "ΣΤΗ". Άρα, το ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει περιέχει δύο στοιχεία και η ζητούμενη πιθανότητα είναι και πάλι ίση με $2/6 = 1/3$.

#6 Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο αριθμός που κερδίζει είναι πολλαπλάσιο του 2 (άρτιος αριθμός)

B: ο αριθμός που κερδίζει είναι πολλαπλάσιο του 5

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 10000\} \Rightarrow |\Omega| = 10000$$

$$|A| = \frac{10000}{2} = 5000, \quad |B| = \frac{10000}{5} = 2000$$

Το $A \cap B$ είναι τα στοιχεία του Ω τα οποία διαιρούνται και με το 2 και με το 5 (οπότε θα διαιρούνται με το $2 \cdot 5 = 10$).

$$|A \cap B| = \frac{10000}{10} = 1000$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{5000}{10000} + \frac{2000}{1000} - \frac{1000}{10000}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = 60\%.$$