ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2. Ασκήσεις στις διατάξεις, στις μεταθέσεις και στους συνδυασμούς

1. Σε τμήμα επισκευών μιας εταιρείας ηλεκτρικών συσκευών υπάρχουν προς επισκευή 10 τηλεοράσεις και 12 βίντεο. Το προσωπικό που διαθέτει η εταιρεία επισκευάζει σε μία μέρα μόνο 6 συσκευές. Αν οι συσκευές που θα επισκευαστούν διαλέγονται τυχαία, να βρεθεί η πιθανότητα σε μία ημέρα (α) να επισκευαστούν 3 τηλεοράσεις και 3 βίντεο, (β) να επισκευαστούν το πολύ 4 τηλεοράσεις.

2. Από 7 άνδρες και 4 γυναίκες με πόσους τρόπους μπορεί να εκλεγεί (α) μία 3-μελής επιτροπή, (β) μία τριμελής επιτροπή αν υπάρχει ιεραρχία (δηλαδή διάταξη 1^{ος} 2^{ος} 3^{ος} κλπ.), (γ) μία 5-μελής επιτροπή αποτελούμενη από 4 άνδρες και 1 γυναίκα ή 3 άνδρες και 2 γυναίκες;

3. (α) Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορούν να σχηματιστούν όχι απαραίτητα με νόημα από τα 10 γράμματα της λέξης ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ; Ποια είναι η πιθανότητα μία τυχαία διάταξη αυτών των 10 γραμμάτων να δώσει τη λέξη ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ; (β) Πέντε κόκκινα μάρμαρα, δύο άσπρα και τρία μπλε τοποθετούνται σε μία ευθεία. Εάν τα μάρμαρα του ίδιου χρώματος είναι τελείως όμοια μεταξύ τους, πόσες διαφορετικές μεταθέσεις των μαρμάρων μπορούμε να έχουμε;

4. Ένας προπονητής ποδοσφαιρικής ομάδας έχει στη διάθεσή του 18 ποδοσφαιριστές από τους οποίους 2 είναι τερματοφύλακες, 6 είναι αμυντικοί, 6 είναι μέσοι και 4 είναι επιθετικοί. Ο προπονητής έχει να επιλέξει ανάμεσα σε τρία συστήματα το 4-4-2, το 3-5-2 και το 4-3-3. Με ποιο σύστημα έχει περισσότερες επιλογές στον καταρτισμό της ενδεκάδας;

5. Σε ένα κιβώτιο παπουτσιών τοποθετούνται ανακατεμένα 10 ζευγάρια παπουτσιών. Αν επιλέξουμε τυχαία 4 παπούτσια, ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχει σε αυτά ένα τουλάχιστον ζευγάρι παπουτσιών;

6. Ένα κουτί περιέχει 8 κόκκινες, 3 άσπρες και 9 μπλε σφαίρες. Εάν βγάλουμε 3 σφαίρες στην τύχη χωρίς επανατοποθέτηση, ποια είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων: (α) Α: και οι τρεις κόκκινες (β) Β: και οι τρεις άσπρες (γ) Γ: δύο κόκκινες και μία μπλε (δ) Δ: τουλάχιστον μία άσπρη (ε) Ε: μία από κάθε χρώμα.

7. Κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τακτοποιηθούν σε ένα οριζόντιο ράφι μίας βιβλιοθήκης 5 βιβλία Μαθηματικών, 3 βιβλία Συνδυαστικής και 4 βιβλία Οικονομικών ώστε τα βιβλία κάθε θεματικής ενότητας να είναι μαζί;

8. Μία ομάδα Ν συνεργατών κάθεται σε ένα στρογγυλό τραπέζι συνεδριάσεων καταλαμβάνοντας όλες τις θέσεις. Ποια είναι η πιθανότητα δύο συγκεκριμένοι άνθρωποι Α και Β να καθίσουν ο ένας δίπλα στον άλλον;

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΦΥΛΛΑΔΙΟ #2

#1 (α) A_3: = 3 τηλεοράσεις από 10 και 3 βίντεο από τα 12

$$|A_3| = \binom{10}{3}\cdot\binom{12}{3} = \frac{10!}{3!7!}\ \frac{12!}{3!9!}$$

$$|\Omega| = \binom{22}{6} = \frac{22!}{6!16!}$$

$$P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = 0.3538 \cong 35\%.$$

(β) Έστω A_i, $i=0,1,2,\dots,6$ το ενδεχόμενο να επισκευαστούν i τηλεοράσεις και $6-i$ βίντεο.

$$P(A_0) = \frac{|A_0|}{|\Omega|} = \frac{\binom{12}{6}}{\binom{22}{6}} = 0.0124, \quad P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{\binom{10}{1}\binom{12}{5}}{\binom{22}{6}} = 0.1062$$

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{\binom{10}{2}\binom{12}{4}}{\binom{22}{6}} = 0.2985$$

$$P(A_4) = \frac{|A_4|}{|\Omega|} = \frac{\binom{10}{4}\binom{12}{2}}{\binom{22}{6}} = 0.1858$$

$P(A_3) = 0.3538$ (από (α)). Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)$

$=0.0124+0.1062+0.2985+0.3538$

$+0.1858=0.9567$.

#2 (α) με $\binom{11}{3}$ τρόπους.

(β) $${}_{11}P_3=\frac{11!}{(11-3)!}=\frac{11!}{8!}=9\cdot 10\cdot 11 \text{ τρόπους}$$

(γ) $\binom{7}{4}\binom{4}{1}$ ή $\binom{7}{3}\binom{4}{2}$ τρόπους

#3 (α) Η λέξη ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ έχει 10 γράμματα

2Σ 3Τ 2Ι 1Α 1Κ 1Η

Οι δυνατές διατάξεις αυτών είναι

$${}_{10}P_{2,3,2,1,1,1}=\frac{10!}{2!3!2!1!1!1!}=151.200$$

Άρα, από τα 10 γράμματα της λέξης ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ μπορούν να σχηματιστούν 151.200 διαφορετικές λέξεις και η πιθανότητα να σχηματιστεί η λέξη ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ είναι $1/151.200$.

(β) Έχουμε 10 μάρμαρα τα οποία χωρίζονται σε 3 υποομάδες ανάλογα με το χρώμα τους ($n_1=5$ κόκκινα $n_2=2$ άσπρα και $n_3=3$ μπλε) με $n_1+n_2+n_3=10$

Άρα, το ζητούμενο είναι οι ${}_{10}P_{5,2,3}$ μεταθέσεις. Δηλαδή

$${}_{10}P_{5,2,3} = \frac{10!}{5!\,2!\,3!} = 2.520$$ διαφορετικές μεταθέσεις των 10 μαρμάρων.

#4 Με το σύστημα 4-4-2 έχουμε:

$$2\binom{6}{4}\binom{6}{4}\binom{4}{2} = 2.700$$ επιλογές

2 τερματοφύλακες, $\binom{6}{4}$ αμυντικοί, $\binom{6}{4}$ μέσοι, $\binom{4}{2}$ επιθετικοί

Με το σύστημα 3-5-2 έχουμε

$$2\binom{6}{3}\binom{6}{5}\binom{4}{2} = 1440$$ επιλογές

Με το σύστημα 4-3-3 έχουμε:

$$2\binom{6}{4}\binom{6}{3}\binom{4}{3} = 2400$$ επιλογές

Άρα, ο προπονητής με το σύστημα 4-4-2 έχει περισσότερες επιλογές στον καταρτισμό της ενδεκάδας.

#5 Θα βρούμε πρώτα το σύνολο των περιπτώσεων που δεν έχουμε ζευγάρι στα 4 παπούτσια.

Α. 4 δεξιά παπούτσια $A = \binom{10}{4}$

Β. 4 αριστερά παπούτσια $B = \binom{10}{4}$

Γ. 3 δεξιά και 1 αριστερό και τα υπόλοιπα 7 αριστερά που δεν είναι ζευγάρι με τα 3 δεξιά που επιλέχτηκαν

$\Gamma = 7\binom{10}{3}$.

Δ. 3 αριστερά και 1 δεξιό από τα υπόλοιπα 7

$$\Delta = 7\binom{10}{3}$$

Ε. 2 δεξιά από τα 10 και 2 αριστερά από τα υπόλοιπα 8, $E = \binom{10}{2}\binom{8}{2}$. Άρα, ο συνολικός αριθμός των περιπτώσεων που δεν έχουμε ζευγάρι στα 4 παπούτσια είναι:

$$A+B+\Gamma+\Delta+E = \binom{10}{4}+\binom{10}{4}+7\cdot\binom{10}{3} + 7\cdot\binom{10}{3}+\binom{10}{2}\binom{8}{2}$$

$$= 2\binom{10}{4} + 2\cdot 7\binom{10}{3} + \binom{10}{2}\binom{8}{2} = 3360$$

Έχουμε συνολικά $\binom{20}{4} = 4845$ τρόπους να επιλέξουμε 4 παπούτσια από τα 20 (χωρίς περιορισμούς). Άρα η πιθανότητα να μην υπάρχει ζευγάρι είναι $\frac{3360}{4845} = 0,69$ και η ζητούμενη πιθανότητα να υπάρχει ένα τουλάχιστον ζευγάρι είναι $1 - 0,69 = 0,31$.

#6 (α) $P(A) = \dfrac{{}_8C_3}{{}_{20}C_3} = \dfrac{14}{285}$

(β) $P(B) = \dfrac{{}_3C_3}{{}_{20}C_3} = \dfrac{1}{1140}$

(γ) $P(\Gamma) = \dfrac{{}_8C_2\,{}_9C_1}{{}_{20}C_3} = \dfrac{21}{95}$

(δ) $P(\text{καμία άσπρη}) = \dfrac{{}_{17}C_3}{{}_{20}C_3} = \dfrac{34}{57}$

$P(\Delta) = P(\text{τουλ. μία άσπρη}) = 1 - \dfrac{34}{57} = \dfrac{23}{57}$

(ε) $P(E) = \dfrac{({}_8C_1)({}_3C_1)({}_9C_1)}{{}_{20}C_3} = \dfrac{18}{95}$

#7 Τα βιβλία Μαθηματικών ταυτοποιούνται σε σειρά κατά 5! τρόπους, τα βιβλία Στατιστικής κατά 3! τρόπους και τα βιβλία Οικονομικών κατά 4! τρόπους ενώ οι τρεις θεματικές ενότητες (ομάδες) κατά 3! τρόπους. Άρα, έχουμε συνολικά

$5!\,3!\,4!\,3! = 103.680$ (μεταθέσεις) διαφορετικούς τρόπους ταυτοποίησης των 12 βιβλίων ώστε να τοποθετηθούν κατά θεματική ενότητα.

#8 Ο συνολικός αριθμός των πιθανών περιπτώσεων είναι ίσος με τις μεταθέσεις Ν ατόμων δηλαδή Ν!. Ο Α μπορεί να καθίσει σε Ν θέσεις, ο Β σε δύο κάθε φορά (δεξιά του και αριστερά του) και οι υπόλοιποι στις $N-2$ θέσεις που απομένουν με $(N-2)!$ διαφορετικούς τρόπους. Άρα, οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι $2N(N-2)!$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{2N(N-2)!}{N!} = \frac{2}{N-1}.$$