ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3. Ασκήσεις στο Διωνυμικό Θεώρημα

1. Αν ν, r, k είναι θετικοί ακέραιοι με $0 \le r \le k \le \nu$, να αποδειχτούν οι επόμενες ταυτότητες:

(α) $(k)_r \binom{\nu}{k} = (\nu)_r \binom{\nu - r}{k - r}$ (β) $\nu \binom{\nu}{k} = k \binom{\nu+1}{k+1} + \binom{\nu}{k+1}$.

2. Χρησιμοποιώντας το τρίγωνο του Pascal, δείξτε ότι, για οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους ν, k με $1 \le k \le \nu$, ισχύει $\binom{\nu+1}{k+1} = \sum_{j=k}^{\nu} \binom{j}{k}$.

3. Εφαρμόζοντας την ταυτότητα της προηγούμενης άσκησης για $k = 1$ και $k = 2$, δείξτε ότι: $1 + 2 + \ldots + \nu = \sum_{j=1}^{\nu} j = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ και $1^2 + 2^2 + \ldots + \nu^2 = \sum_{j=1}^{\nu} j^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$.

4. Αν ν, k είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχτούν οι επόμενες ταυτότητες:

(α) $\begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu - 1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu \\ k - 1 \end{bmatrix}$, (β) $\begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix} = \frac{\nu + k - 1}{\nu - 1} \begin{bmatrix} \nu - 1 \\ k \end{bmatrix}$.

5. Ποιος είναι ο συντελεστής του όρου $x^8 y^{12}$ στο ανάπτυγμα $(3x + 4y)^{20}$;

6. Αν r, ν είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $r \le \nu$ και $x \in \Re$, να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$S = \sum_{k=r}^{\nu} \binom{\nu}{k} \binom{k}{r} x^k.$$

7. Με τη βοήθεια του αθροίσματος της προηγούμενης άσκησης, να υπολογιστούν τα αθροίσματα $S_1 = \sum_{k=0}^{\nu} k \binom{\nu}{k} p^k q^{\nu-k}$ και $S_2 = \sum_{k=0}^{\nu} k(k-1) \binom{\nu}{k} p^k q^{\nu-k}$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΦΥΛΛΑΔΙΟ #3

#1 (α)

$$(\kappa)_r \binom{\nu}{\kappa} = \frac{\kappa!}{(\kappa-r)!}\,\frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!} = \frac{\nu!}{(\kappa-r)!\,(\nu-\kappa)!}$$

$$(\nu)_r \binom{\nu-r}{\kappa-r} = \frac{\nu!}{(\nu-r)!}\,\frac{(\nu-r)!}{(\kappa-r)!\,[(\nu-r)-(\kappa-r)]!}$$

$$= \frac{\nu!}{(\kappa-r)!\,(\nu-\kappa)!}$$

(β) Αντικαθιστώντας τους διωνυμικούς συντελεστές στο δεύτερο μέλος παίρνουμε:

$$\kappa\binom{\nu+1}{\kappa+1} + \binom{\nu}{\kappa+1} = \kappa\,\frac{(\nu+1)!}{(\kappa+1)!\,(\nu-\kappa)!} + \frac{\nu!}{(\kappa+1)!\,(\nu-\kappa-1)!}$$

$$= \frac{\kappa\,\nu!\,(\nu+1)}{(\kappa+1)!\,(\nu-\kappa)!} + \frac{\nu!\,(\nu-\kappa)}{(\kappa+1)!\,(\nu-\kappa)!}$$

$$= \frac{\nu!\,[\kappa(\nu+1)+\nu-\kappa]}{(\kappa+1)!\,(\nu-\kappa)!} = \frac{\nu!\,(\nu\kappa+\nu)}{(\kappa+1)!\,(\nu-\kappa)!}$$

$$= \frac{\nu!\,\nu(\kappa+1)}{(\kappa+1)\kappa!\,(\nu-\kappa)!} = \nu\,\frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!} = \nu\binom{\nu}{\kappa}.$$

#2 Από το τρίγωνο του Pascal

$$\binom{j}{\kappa+1} = \binom{j-1}{\kappa} + \binom{j-1}{\kappa+1}$$

Παίρνουμε διαδοχικά για $j=\nu+1, \nu, \nu-1, \dots, \kappa+3, \kappa+2$

$$\binom{\nu+1}{\kappa+1}=\binom{\nu}{\kappa}+\binom{\nu}{\kappa+1}$$

$$\binom{\nu}{\kappa+1}=\binom{\nu-1}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa+1}$$

$$\binom{\nu-1}{\kappa+1}=\binom{\nu-2}{\kappa}+\binom{\nu-2}{\kappa+1}$$

$$\dots$$

$$\binom{\kappa+3}{\kappa+1}=\binom{\kappa+2}{\kappa}+\binom{\kappa+2}{\kappa+1}$$

$$\binom{\kappa+2}{\kappa+1}=\binom{\kappa+1}{\kappa}+\binom{\kappa+1}{\kappa+1}.$$

Αν προσθέσουμε όλες αυτές τις ισότητες κατά μέλη, θα προκύψει μετά τις απλοποιήσεις των ομοίων όρων

$$\binom{\nu+1}{\kappa+1}=\binom{\nu}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa}+\binom{\nu-2}{\kappa}+\dots+\binom{\kappa+2}{\kappa}$$
$$+\binom{\kappa+1}{\kappa}+\binom{\kappa+1}{\kappa+1}$$

ή ακόμη, αντικαθιστώντας τον τελευταίο όρο του αθροίσματος με το $1=\binom{\kappa}{\kappa}$

$$\binom{\nu+1}{\kappa+1}=\binom{\nu}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa}+\dots+\binom{\kappa+2}{\kappa}+\binom{\kappa+1}{\kappa}$$
$$+\binom{\kappa}{\kappa}=\sum_{j=\kappa}^{\nu}\binom{j}{\kappa}.$$

#3 Η ταυτότητα που βρήκαμε για $\kappa=1$ και $\kappa=2$ παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{j=1}^{\nu}\binom{j}{1}=\binom{\nu+1}{2}, \quad \sum_{j=2}^{\nu}\binom{j}{2}=\binom{\nu+1}{3}$$

αντίστοιχα. Από την πρώτη ισότητα προκύπτει άμεσα ότι

$$1+2+\dots+\nu=\sum_{j=1}^{\nu} j=\binom{\nu+1}{2}=\frac{\nu(\nu+1)}{2!}$$
$$=\frac{\nu(\nu+1)}{2},$$

ενώ η δεύτερη δίνει $\displaystyle\sum_{j=2}^{\nu}\frac{j(j-1)}{2}=\binom{\nu+1}{3}$.

ή ισοδύναμα

$$\sum_{j=1}^{\nu} j(j-1)=\sum_{j=2}^{\nu} j(j-1)=2\binom{\nu+1}{3}$$
$$=2\,\frac{(\nu+1)\nu(\nu-1)}{3!}$$
$$=\frac{\nu(\nu+1)(\nu-1)}{3}.$$

Γράφοντας την τελευταία ισότητα στη μορφή:

$$\frac{\nu(\nu+1)(\nu-1)}{3}=\sum_{j=1}^{\nu} j(j-1)=\sum_{j=1}^{\nu} j^2-\sum_{j=1}^{\nu} j$$
$$=\sum_{j=1}^{\nu} j^2-\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

καταλήγουμε στον τύπο:

$$\sum_{j=1}^{\nu} j^2 = \frac{\nu(\nu+1)(\nu-1)}{3} + \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$= \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

#4 (α) Αντικαθιστώντας τους δύο προσθετέους του δεξιού μέλους με βάση τον τύπο:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \binom{\alpha+\beta-1}{\beta} = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{\beta!\,(\alpha-1)!}$$

βρίσκουμε

$$\begin{bmatrix} \nu-1 \\ \kappa \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu \\ \kappa-1 \end{bmatrix} = \frac{((\nu-1)+\kappa-1)!}{\kappa!((\nu-1)-1)!}$$

$$+ \frac{(\nu+(\kappa-1)-1)!}{(\kappa-1)!(\nu-1)!} = \frac{(\nu+\kappa-2)!}{\kappa!\,(\nu-2)!} + \frac{(\nu+\kappa-2)!}{(\kappa-1)!\,(\nu-1)!}$$

$$= \frac{(\nu+\kappa-2)!(\nu-1)}{\kappa!\,(\nu-2)!\,(\nu-1)} + \frac{(\nu+\kappa-2)!\,\kappa}{(\kappa-1)!\,\kappa\,(\nu-1)!}$$

$$= \frac{(\nu+\kappa-2)!\,[(\nu-1)+\kappa]}{\kappa!\,(\nu-1)!}$$

$$= \frac{(\nu+\kappa-2)!\,(\nu+\kappa-1)}{\kappa!\,(\nu-1)!} = \frac{(\nu+\kappa-1)!}{\kappa!\,(\nu-1)!} = \begin{bmatrix} \nu \\ \kappa \end{bmatrix}.$$

(β) Έχουμε:

$$\frac{\nu+k-1}{\nu-1}\begin{bmatrix}\nu-1\\ k\end{bmatrix} = \frac{\nu+k-1}{\nu-1}\cdot\frac{((\nu-1)+k-1)!}{k!\,((\nu-1)-1)!}$$

$$=\frac{(\nu+k-1)(\nu+k-2)!}{k!\,(\nu-2)!\,(\nu-1)} = \frac{(\nu+k-1)!}{k!\,(\nu-1)!} = \begin{bmatrix}\nu\\ k\end{bmatrix}.$$

#6 Ισχύει: $\binom{\nu}{k}\binom{k}{r} = \binom{\nu}{r}\binom{\nu-r}{k-r}$

άρα το άθροισμα για το οποίο ενδιαφερόμαστε παίρνει τη μορφή:

$$S' = \sum_{k=r}^{\nu}\binom{\nu}{r}\binom{\nu-r}{k-r}x^k = \binom{\nu}{r}\sum_{k=r}^{\nu}\binom{\nu-r}{k-r}x^k$$

Με αλλαγή μεταβλητής $k-r=j$, βρίσκουμε:

$$S' = \binom{\nu}{r}\sum_{j=0}^{\nu-r}\binom{\nu-r}{j}x^{r+j} = \binom{\nu}{r}x^r\sum_{j=0}^{\nu-r}\binom{\nu-r}{j}x^j$$

και από το διωνυμικό θεώρημα προκύπτει ότι

$$S' = \binom{\nu}{r}x^r(1+x)^{\nu-r}.$$

#7 Για τον υπολογισμό των αθροισμάτων S_1, S_2 αρκεί να θέσουμε $x = p/q$ και να θεωρήσουμε τις ειδικές περιπτώσεις $r=1$, $r=2$, οπότε προκύπτει:

$$\sum_{k=1}^{\nu} \binom{\nu}{k} k \frac{p^k}{q^k} = \nu \frac{p}{q} \left(\frac{p+q}{q}\right)^{\nu-1}$$

$$\sum_{k=2}^{\nu} \binom{\nu}{k} \frac{k(k-1)}{2} \frac{p^k}{q^k} = \frac{\nu(\nu-1)}{2} \left(\frac{p}{q}\right)^2 \left(\frac{p+q}{q}\right)^{\nu-2}$$

ή ισοδύναμα αφού $p+q=1$

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\nu} k \binom{\nu}{k} p^k q^{\nu-k} = \sum_{k=1}^{\nu} k \binom{\nu}{k} p^k q^{\nu-k} = \nu p$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\nu} k(k-1) \binom{\nu}{k} p^k q^{\nu-k} = \sum_{k=2}^{\nu} k(k-1) \binom{\nu}{k} p^k q^{\nu-k}$$

$$= \nu(\nu-1) p^2. \quad \boxtimes$$

#5 Σύμφωνα με το διωνυμικό θεώρημα

$$(3x+4y)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} (3x)^k (4y)^{20-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{20} \left\{ \binom{20}{k} 3^k 4^{20-k} \right\} x^k y^{20-k}$$

Για $k=8$ βρίσκουμε τον συντελεστή του όρου $x^8 y^{12}$

$$\binom{20}{8} 3^8 4^{12}.$$