

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4. Ασκήσεις στην αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού και στις Γεννήτριες Συναρτήσεις

1. Έστω ότι 100 φοιτητές εξετάζονται σε 3 θέματα. 100 απάντησαν σωστά σε τουλάχιστον ένα θέμα, 70 απάντησαν σωστά σε τουλάχιστον δύο θέματα, 10 απάντησαν σωστά σε τουλάχιστον τρία θέματα. Κάθε θέμα το γνώριζε ο ίδιος αριθμός φοιτητών. Ποιος είναι ο αριθμός των φοιτητών που δε γνωρίζουν το πρώτο θέμα;

2. Από τους μουσικούς μιας ορχήστρας, οι 12 παίζουν έγχορδο όργανο, 7 παίζουν πνευστό και 10 παίζουν κρουστό. Γνωρίζουμε επίσης ότι τρεις παίζουν και έγχορδο και πνευστό, τέσσερις παίζουν και πνευστό και κρουστό όργανο, 2 παίζουν έγχορδο και κρουστό ενώ υπάρχει ένας που παίζει και τα τρία είδη οργάνων. Πόσοι είναι οι μουσικοί;

3. Πόσοι από τους $n = 70$ αριθμούς $1, \dots, 70$ δε διαιρούνται ούτε με 2, ούτε με 3, ούτε με 11;

4. Πόσοι ακέραιοι αριθμοί μεταξύ 1 και 300 διαιρούνται (α) με τουλάχιστον έναν εκ των 3, 5, 7; (β) διαιρούνται με το 3, με το 5 αλλά όχι με το 7; (γ) διαιρούνται με το 5 αλλά δε διαιρούνται ούτε με το 3 ούτε με το 7;

5. Να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \sum_{k=0}^v (3k^2 - 2k + 1) \binom{v}{k} 5^k$.

6. Να υπολογιστεί το άθροισμα $\sum_{k=0}^v \frac{1}{k+1} \binom{v}{k} 3^k$.

7. Να υπολογιστεί το άθροισμα $\sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

ΦΥΛΛΑΔΙΟ #4 ΑΥΞΕΙΣ ΑΣΥΗΞΕΩΝ

#1 Έστω $A_i := \# \text{φοιτητών που γυρνίζουν το θέμα } i$
 $i=1, 2, 3$

Ζήταρε $|A'_i| = N(A'_i)$

0 = όλοι οι φοιτητές

$$N(0) = 100 \quad N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 100$$

$$N(A_1 \cap A_2 \cup A_1 \cap A_3 \cup A_2 \cap A_3) = 70$$

$$N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 10$$

Από την αρχή εγχειρισμού - απομειωμού

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 100$$

$$= N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - (N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + N(A_2 \cap A_3)) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$\Rightarrow 3N(A_1) - (N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + N(A_2 \cap A_3)) = 90 \quad (1)$$

Επίσης

$$70 = N(A_1 \cap A_2 \cup A_1 \cap A_3 \cup A_2 \cap A_3)$$

$$= N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + N(A_2 \cap A_3) - 2N(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$\Rightarrow N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + N(A_2 \cap A_3) = 90 \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow N(A_1) = 60$$

$$N(A'_1) = N(0) - N(A_1) = 100 - 60 = 40$$

$$\Rightarrow \boxed{N(A'_1) = 40}$$

#2 Έστω α: έχω ροδό, β: πνευστώ, γ: υρονσώ

-2-

$$N(A) = 12, N(B) = 7, N(\gamma) = 10, N(A \cap B) = 3$$

$$N(A \cap \gamma) = 2, N(B \cap \gamma) = 4, N(A \cap B \cap \gamma) = 1$$

$$N = N(A \cup B \cup \gamma) = N(A) + N(B) + N(\gamma)$$

$$- N(A \cap B) - N(A \cap \gamma) - N(B \cap \gamma) + N(A \cap B \cap \gamma)$$

$$\Rightarrow \underline{N = 21}$$

$$\#3 \text{ Έστω } \mathcal{O} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 70\} \quad N(\mathcal{O}) = 70 = |\mathcal{O}|$$

$$A_2 = \{x \in \mathcal{O} : 2 \mid x\} = \{x \in \mathcal{O} \mid x = \pi_2 \cdot 2\}$$

$$A_3 = \{x \in \mathcal{O} : 3 \mid x\} = \{x \in \mathcal{O} \mid x = \pi_2 \cdot 3\}$$

$$A_{11} = \{x \in \mathcal{O} : 11 \mid x\} = \{x \in \mathcal{O} \mid x = \pi_2 \cdot 11\}$$

$$A_2 \cup A_3 \cup A_{11} = \{x \in \mathcal{O} \mid 2 \mid x \text{ ή } 3 \mid x \text{ ή } 11 \mid x\}$$
$$= \{x \in \mathcal{O} \mid x = \pi_2 \cdot 2 \text{ ή } x = \pi_2 \cdot 3 \text{ ή } x = \pi_2 \cdot 11\}$$

και άρα οι ανήκοντες που είναι μικρότεροι ή ίσοι του

70 και δε διαιρούνται με κανένα από τα 2, 3, 11

είναι ακριβώς τα στοιχεία του συνόλου $(A_2 \cup A_3 \cup A_{11})'$ που το πλάθος τους είναι:

$$|(A_2 \cup A_3 \cup A_{11})'| = |\mathcal{O}| - |A_2 \cup A_3 \cup A_{11}|$$

$$= |\mathcal{O}| - |A_2 \cup (A_3 \cup A_{11})|$$

$$= |\mathcal{O}| - |A_2| - |A_3 \cup A_{11}| + |A_2 \cap (A_3 \cup A_{11})|$$

$$= |\mathcal{O}| - |A_2| - |A_3| - |A_{11}| + |A_3 \cap A_{11}| + |(A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_{11})|$$

$$\begin{aligned}
 &= |A_1| - |A_2| - |A_3| - |A_{11}| + |A_3 \cap A_{11}| \\
 &\quad + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_{11}| - |A_2 \cap A_3 \cap A_{11}| \\
 &= 70 - \left[\frac{70}{2} \right] - \left[\frac{70}{3} \right] - \left[\frac{70}{11} \right] \\
 &\quad + \left[\frac{70}{33} \right] + \left[\frac{70}{6} \right] + \left[\frac{70}{22} \right] - \left[\frac{70}{66} \right]
 \end{aligned}$$

οπω $[x]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του x .

$$= 70 - 35 - 23 - 6 + 2 + 11 + 3 - 1$$

$= 21$. Άρα 21 αριθμοί δεν διαρρέονται
ούτε με 2, ούτε με 3, ούτε με 11.

#4 Έστω

$$\begin{aligned}
 A &= \{n \mid 1 \leq n \leq 300, 3 \mid n\} \\
 B &= \{n \mid 1 \leq n \leq 300, 5 \mid n\} \\
 C &= \{n \mid 1 \leq n \leq 300, 7 \mid n\}
 \end{aligned}$$

(α) Ψάχνουμε $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$
 $- [|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|]$
 $+ |A \cap B \cap C|$

$$|A \cap B| = \left[\frac{300}{15} \right] = 20$$

$$|A \cap B \cap C| = \left[\frac{300}{105} \right] = 2$$

$$|A \cap C| = \left[\frac{300}{21} \right] = 14$$

$$|B \cap C| = \left[\frac{300}{35} \right] = 8$$

$$|A \cup B \cup C| = 100 + 60 + 42 - 20 - 14 - 8 + 2 = 162.$$

(β) Για αυτό το ερώτημα ζητάμε $|(A \cap B) \setminus C|$

$$|(A \cap B) \setminus C| = |A \cap B| - |A \cap B \cap C| = 20 - 2 = 18.$$

(γ) Για το τρίτο ερώτημα θα πρέπει να βρούμε:

$$|B|(A \cup C) = |B| - |B \cap (A \cup C)|$$

$$|B \cap (A \cup C)| = |(B \cap A) \cup (B \cap C)|$$

$$= |B \cap A| + |B \cap C| - |(B \cap A) \cap (B \cap C)|$$

$$= |B \cap A| + |B \cap C| - |B \cap A \cap C|$$

$$= 20 + 8 - 2 = 26$$

$$\text{Άρα } |B|(A \cup C) = |B| - 26 = 60 - 26 = 34.$$

#5 Είναι

$$3u^2 - 2u + 1 = A_0(u)_0 + A_1(u)_1 + A_2(u)_2$$

$$= A_0 + A_1 u + A_2 u(u-1)$$

$$= A_2 u^2 + (A_1 - A_2)u + A_0$$

$$A_2 = 3$$

$$A_1 - A_2 = -2$$

$$A_0 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} A_2 = 3 \\ A_1 - A_2 = -2 \\ A_0 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_2 = 3 \\ A_1 = 1 \\ A_0 = 1 \end{array}$$

$$S' = 3 \sum_{u=0}^v (u)_2 \binom{v}{k} 5^k + 1 \sum_{u=0}^v (u)_1 \binom{v}{k} 5^k$$

$$+ \sum_{u=0}^v (u)_0 \binom{v}{k} 5^k$$

$$= 3 \cdot 5^2 \sum_{u=0}^v (u)_2 \binom{v}{k} 5^{k-2} + 1 \cdot 5 \sum_{u=0}^v (u)_1 \binom{v}{k} 5^{k-1} \\ + \sum_{u=0}^v (u)_0 \binom{v}{k} 5^k$$

$$\begin{aligned} (*) &= 75 (v)_2 6^{v-2} + 5 (v)_1 6^{v-1} + 6^v \\ &= 75 v(v-1) 6^{v-2} + 5v 6^{v-1} + 6^v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \text{ Ισχύει ότι } & \sum_{u=0}^v \frac{u(u+1) \cdots (u+r+1)}{(k)_r} \binom{v}{k} t^{k-r} \\ &= \frac{v(v-1) \cdots (v-r+1)}{(v)_r} (1+t)^{v-r} (*) \end{aligned}$$

#6

$$\sum_{u=0}^v \binom{v}{k} t^k = (1+t)^v$$

$$\Rightarrow \sum_{u=0}^v \binom{v}{k} \int_0^k t^k dt = \int_0^k (1+t)^v dt$$

$$\Rightarrow \sum_{u=0}^v \binom{v}{k} \frac{t^{u+1}}{u+1} = \frac{(1+k)^{v+1} - 1}{v+1}$$

$$\stackrel{1/k}{\Rightarrow} \sum_{u=0}^v \frac{1}{u+1} \binom{v}{k} k^k = \frac{(1+k)^{v+1} - 1}{(v+1)k}$$

$$\stackrel{u=3}{\Rightarrow} \sum_{u=0}^v \frac{1}{u+1} \binom{v}{k} 3^k = \frac{4^{v+1} - 1}{3(v+1)}$$

-6-

$$\underline{\#7} \quad \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \quad |t| < 1$$

$$\xRightarrow{d/dt} \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}, \quad |t| < 1$$

$$\xRightarrow{\cdot t} \sum_{n=0}^{\infty} n t^n = \frac{t}{(1-t)^2}, \quad |t| < 1$$

$$\underline{t = 1/3} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1/3}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}$$

