Σημειώσεις για το μάθημα:

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΙΙ

Διδάσκων: Θ. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΣ

e-mail: dimitheo@aegean.gr

Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ: Γιατί καταφεύγουμε στα διαστήματα εμπιστοσύνης;

Στις μέρες μας, η Στατιστική έχει γίνει απαραίτητη σε όλους σχεδόν τους επιστημονικούς κλάδους. Βασικές έννοιες της Στατιστικής έχουν εισχωρήσει και ενσωματωθεί στη Φυσική, στη Χημεία, στη Βιολογία, στην Ιατρική, στη Μετεωρολογία, στα Οικονομικά και αλλού. Μπορούμε να γράψουμε ότι η Στατιστική συνιστά ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων, τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους και την εξαγωγή των αντίστοιχων συμπερασμάτων. Ο κλάδος της Στατιστικής που ασχολείται με τον πρώτο στόχο καλείται Σχεδιασμός Πειραμάτων ενώ για το δεύτερο στόχο φροντίζει η Περιγραφική Στατιστική. Η Στατιστική Συμπερασματολογία παρέχει τα μέσα για την κατάλληλη ανάλυση των στατιστικών στοιχείων και την εξαγωγή συμπερασμάτων. Χωρίζεται σε δύο μεγάλα μέρη τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους: την Εκτιμητική και τους Ελέγχους Υποθέσεων. Η Εκτιμητική, με τη σειρά της, διαιρείται στη Σημειο-Εκτιμητική και στα Διαστήματα Εμπιστοσύνης.

Στο μάθημα Στατιστική Ι μελετήθηκε το πρόβλημα της Σημειο-Εκτιμητικής.

Άγνωστες ποσότητες οι οποίες είτε έχουν κάποια άμεση φυσική ερμηνεία είτε είναι "παράμετροι" μοντέλων που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή κάποιων φαινομένων εκτιμώνται (ή προσεγγίζονται) <u>σημειακά</u>. Για παράδειγμα, τέτοιες ποσότητες μπορεί να είναι:

- ο μέσος αριθμός e-mail που λαμβάνουμε στον υπολογιστή μας τα **Σαββατοκύριακα**,
- ο ελάχιστος χρόνος ζωής (ή η "εγγύηση") μίας συγκεκριμένης ηλεκτρικής συσκευής,
- η πιθανότητα να μην μπει γκολ κατά το πρώτο δεκάλεπτο ενός ποδοσφαιρικού **αγώνα κλπ.**

Έστω λοιπόν ότι υπάρχει κάποια άγνωστη ποσότητα την οποία ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε. Η ποσότητα αυτή καλείται παράμετρος (parameter) και έχει μία σταθερή αλλά άγνωστη σε εμάς τιμή.

Η Στατιστική Ι ασχολείται με μεθόδους που οδηγούν σε εκτιμήσεις των τιμών μίας ή περισσότερων παραμέτρων. Η εκτίμηση των άγνωστων τιμών των παραμέτρων πραγματοποιείται με την κατασκευή κατάλληλων συναρτήσεων (των στατιστικών συναρτήσεων) ενός τυχαίου δείγματος. Για κάθε συγκεκριμένο τυχαίο δείγμα (τ.δ., random sample) αυτές οι συναρτήσεις δίνουν μία μοναδική τιμή ως εκτίμηση μίας παραμέτρου, για ένα πληθυσμό.

Χρησιμοποιώντας αυτές τις μεθόδους (π.χ. μέθοδος ροπών, μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας κλπ.) κάνουμε μία σημειακή εκτίμηση της παραμέτρου (δηλ. κάνουμε εκτίμηση της παραμέτρου σε σημείο).

Οι <u>παράμετροι</u> εμφανίζονται συνήθως ως <u>άγνωστες σταθερές</u> στις συναρτήσεις πυκνότητας (ή στις συναρτήσεις πιθανότητας) μίας συνεχούς (ή μιας διακριτής) τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X. Η τ.μ. X συνήθως περιγράφει ένα υπο-μελέτη χαρακτηριστικό ενός πληθυσμού.

Για παράδειγμα, αν η τ.μ. X αναπαριστά το ύψος των ανδρών μίας πόλης για την οποία μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε το μέσο ύψος (δηλαδή τη μέση (αναμενόμενη) τιμή του πληθυσμού των ανδρών μίας πόλης) και αν υποθέσουμε ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την παράμετρο μ. Αν η τ.μ. $X \sim Bin(n, p)$ (Διωνυμική κατανομή) τότε $P\{X=x\} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots, n$.

Η παράμετρος n συνήθως είναι γνωστή και η προς εκτίμηση παράμετρος είναι η "πιθανότητα" **επιτυχίας** p. Στην πράξη γνωρίζουμε τη συναρτησιακή μορφή της $f_X(x)$ (συνάρτηση πυκνότητας ή συνάρτηση πιθανότητας) και οι παράμετροι των κατανομών μας είναι άγνωστοι. Έχουν μία σταθερή αλλά άγνωστη σε εμάς τιμή. Οι παράμετροι περιγράφουν ένα υπό-μελέτη χαρακτηριστικό ενός πληθυσμού.

Για παράδειγμα, το ποσοστό του πληθυσμού που ψηφίζει ένα συγκεκριμένο κόμμα, τις βαθμολογίες των φοιτητών ενός έτους σε ένα συγκεκριμένο μάθημα κλπ.

Για την εκτίμηση σε σημείο, συλλέγουμε κάποια αριθμητικά δεδομένα $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geq 1$ τα οποία συσχετίζονται με την ποσότητα που μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε. Αυτά τα δεδομένα αποτελούν παρατηρηθείσες τιμές τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ από κάποια <u>από κοινού</u> <u>κατανομή</u> που εξαρτάται από μία άγνωστη παράμετρο θ. Αν οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. λέμε ότι αποτελούν ένα τυχαίο δείγμα (τ.δ.) από αυτήν την κατανομή.

Μία συνάρτηση των δεδομένων που δεν εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο θ καλείται στατιστική συνάρτηση (σ.σ.). Μία σ.σ. $d(\underline{X}) = d(X_1, \ldots, X_n)$ που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της παραμέτρου θ ή μίας συνάρτησής της $g(\theta)$ καλείται εκτιμητής (ή εκτιμήτρια) της $g(\theta)$ (ή του θ).

Η εκτίμηση της άγνωστης τιμής μίας παραμέτρου σε σημείο έχει βασικά μειονεκτήματα:

- Δεν παρέχει καμία πληροφορία για την ακρίβεια της εκτίμησης.
- Η εκτιμήτρια μίας παραμέτρου σε σημείο δηλαδή η τιμή της για συγκεκριμένο τδ. σίγουρα θα διαφέρει από την πραγματική τιμή της παραμέτρου θ.
- Μία μέση τιμή δείγματος που βασίζεται σε 100 παρατηρήσεις θα έχει σίγουρα μεγαλύτερη ακρίβεια στην προς εκτίμηση άγνωστη τιμή μίας παραμέτρου σε σχέση με αυτήν που βασίζεται σε 5 παρατηρήσεις.

Συνεπώς, μπορούμε να βελτιώσουμε την "πληροφορία" που μας δίνει η σημειακή εκτίμηση με το να διαθέτουμε και το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης.

Για τους παραπάνω λόγους, είναι προτιμότερο να μιλάμε για ένα φάσμα πιθανών τιμών για την προς εκτίμηση άγνωστη τιμή της παραμέτρου παρά για μία και μόνη συγκεκριμένη τιμή. Ο καθορισμός ενός φάσματος (διαστήματος) πιθανών τιμών για την προς εκτίμηση άγνωστη τιμή της παραμέτρου επιτυγχάνεται με την κατασκευή ενός <u>διαστήματος εμπιστοσύνης</u> (confidence intervals).

Β. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΕΛΕΓΧΟΥΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Οι έλεγχοι υποθέσεων αποτελούν ένα από τα βασικότερα πεδία της Στατιστικής. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα φάρμακο με το οποίο, αν γίνει θεραπεία, αναμένεται να εμφανιστούν τα πρώτα αποτελέσματα βελτίωσης, για τους ασθενείς, μέσα σε περίπου δέκα ημέρες. Έστω ότι ανακαλύπτεται ένα καινούργιο φάρμακο για την ίδια ασθένεια και η κατασκευαστική εταιρεία ισχυρίζεται ότι φέρνει αποτελέσματα σε συντομότερο χρονικό διάστημα. Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X εκφράζει το χρόνο (σε ημέρες) μέσα στον οποίο εμφανίζονται τα πρώτα αποτελέσματα βελτίωσης των ασθενών στους οποίους χορηγούνται τα φάρμακα. Έστω ότι $X \sim N(\mu, 4)$. Αν ο πληθυσμός των ασθενών στους οποίους χορηγούνται τα φάρμακα είναι μεγάλος, η μελέτη ολόκληρου του πληθυσμού είναι οικονομικά ασύμφορη ή και πρακτικά αδύνατη. Για το λόγο αυτό, μελετούμε ένα μέρος του πληθυσμού, λαμβάνοντας ένα τ.δ. μεγέθους n, $X_1, \ldots, X_n$, όπου με X_i, $i=1,\ldots,n$ συμβολίζουμε την τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά το χρόνο (σε ημέρες) μέσα στον οποίο, εμφανίζονται τα πρώτα αποτελέσματα βελτίωσης του ασθενούς i, στον οποίο χορηγούνται τα φάρμακα. Με βάση το τυχαίο δείγμα (τ.δ.) $X_1, \ldots, X_n$ μεγέθους n από την κανονική κατανομή $N(\mu, 4)$, επιθυμούμε να ελέγξουμε τον ισχυρισμό της κατασκευαστικής εταιρείας. Εάν ο μέσος χρόνος μέσα στον οποίο, εμφανίζονται τα πρώτα αποτελέσματα βελτίωσης των ασθενών του πληθυσμού, από τη χρήση του πρώτου φαρμάκου, είναι $\mu = 10$ ημέρες, επιθυμούμε να ελέγξουμε, αν πράγματι, σύμφωνα με τον ισχυρισμό της κατασκευαστικής εταιρείας, για το δεύτερο φάρμακο, ο αντίστοιχος μέσος χρόνος είναι μικρότερος δηλαδή εάν $\mu<10$. Σ' αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι κάνουμε έναν <u>έλεγχο υποθέσεων</u>. Ελέγχουμε την υπόθεση $H_0: \mu=10$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1: \mu<10$.

ΥΛΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Στο μάθημα Στατιστική ΙΙ μελετάμε λεπτομερώς τα Διαστήματα Εμπιστοσύνης και τους Ελέγχους Υποθέσεων. Η κατασκευή των διαστημάτων εμπιστοσύνης προϋποθέτει τη γνώση των κατανομών στατιστικών συναρτήσεων δειγμάτων τα οποία προέρχονται από διάφορες κατανομές όπως π.χ. την κανονική κατανομή, την κατανομή t-student, την κατανομή F και την κατανομή χ^2_n. Το Λήμμα Neyman-Pearson και η ιδιότητα του Μονότονου Λόγου Πιθανοφανειών κατέχουν κεντρικό ρόλο στους Ελέγχους Υποθέσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Δαριανού Χ. και Κούτρα Μ., Εισαγωγή στη Στατιστική, Μέρος Ι, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2003.
2. Ηλιόπουλου Γ., Βασικές Μέθοδοι Εκτίμησης Παραμέτρων με σημείο και με διάστημα, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλη, Αθήνα, 2006.
3. Κολύβα Φ. Μαχαίρα, Μπόρα Ε. Σέντα, Στατιστική Θεωρία Εφαρμογές, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1995.
4. Κολύβα Φ. Μαχαίρα, Μαθηματική Στατιστική, Τόμος Ι, Εκτιμητική, Τόμος ΙΙ, Έλεγχοι Υποθέσεων, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1998.
5. Παναρέτου Ι., Ξεκαλάκη Ε., Εισαγωγή στη Στατιστική Σκέψη, Τόμος ΙΙ, Εισαγωγή στις Πιθανότητες και την Στατιστική

Συμπερασματολογία, Αθήνα, 2003.

6. Ρούσσα Γρ. Γεωργίου, Στατιστική Συμπερασματολογία, Τόμος Ι, Εκτιμητική, Τόμος ΙΙ, Έλεγχος Υποθέσεων, Εκδόσεις Ζήτη, Μεταγλώττιση: Δρ. Γεώργιος Δ. Σταματέλος, Θεσσαλονίκη, 1997.

Τα παραπάνω βιβλία, προτείνονται, μεταξύ άλλων, για περαιτέρω μελέτη.

Κεφάλαιο 1: Κατανομή και Χαρακτηριστικά Τυχαίου Δείγματος

Εισαγωγή: Τα φαινόμενα ή οι πληθυσμοί περιγράφονται με τη βοήθεια των τ.μ. και των κατανομών τους που τις περισσότερες φορές δεν είναι τέλεια γνωστές. Η μελέτη μίας κατανομής επιτυγχάνεται με τη μελέτη όλων των στοιχείων του πληθυσμού ή του φαινομένου που περιγράφει κάτι το οποίο τις περισσότερες φορές είναι αδύνατο πρακτικά είτε λόγω κόστους είτε λόγω έλλειψης χρόνου. Για να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για την κατανομή χρησιμοποιούμε έναν αριθμό ανεξάρτητων παρατηρήσεων όσον το δυνατόν αντιπροσωπευτικότερων του πληθυσμού ή του φαινομένου που μελετάμε.

Ορισμός 1.1 Τυχαίο δείγμα (τ.δ.) $\underset{\sim}{X}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ανεξάρτητων δοκιμών $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ της ίδιας τ.μ. X. Ο αριθμός n καλείται μέγεθος του δείγματος.

Τα αποτελέσματα των n δοκιμών σημειώνονται με $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και δεν είναι τ.μ. ενώ το τ.δ. $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ είναι τ.μ.

Αν ο πληθυσμός είναι άπειρος, τότε οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισχύει:

$$f_{\underset{\sim}{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n), \text{ όπου}$$

$f_{\underset{\sim}{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι η κοινή κατανομή του τ.δ. $\underset{\sim}{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ και $f_{X_i}(x_i)$, $i=1,\ldots,n$ είναι η κατανομή της τ.μ. X_i.

Στο εξής, θα υποθέσουμε ότι το δείγμα μας είναι τυχαίο, δηλαδή οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ θα είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και συνεπώς θα ισχύει: $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$.

Χαρακτηριστικά δείγματος

Διατεταγμένο δείγμα

Θεωρούμε ένα τ.δ. $\underset{\sim}{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ από μία τ.μ. X και το διατάσσουμε κατά αύξουσα σειρά μεγέθους. Το δείγμα που προκύπτει καλείται διατεταγμένο δείγμα και ισχύει ότι:

$$\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)} = \max\{X_1,\ldots,X_n\}.$$

Οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και μας ενδιαφέρει η κοινή κατανομή των τ.μ. $Y_1 = X_{(1)}, \ldots, Y_n = X_{(n)}$.
Οι τ.μ. $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ είναι γνωστές ως διατεταγμένες στατιστικές (order statistics) που αντιστοιχούν στις τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$.

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των διατεταγμένων στατιστικών $Y_1, \ldots, Y_n$ είναι:

$$f_{\underset{\sim}{Y}}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{cases} n!\, f(y_1)\cdots f(y_n), & a < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

για κάθε δοθέν a, b με $a < b$ και f να είναι η κοινή συνάρτηση πυκνότητας των $Y_1, \ldots, Y_n$.

Θα κάνουμε την απόδειξη για $n=3$. Με παρόμοιο τρόπο, γίνεται η απόδειξη για οποιαδήποτε τιμή του n.
Δηλαδή, θα δείξουμε ότι: Όταν $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)} \Rightarrow Y_1 \leq Y_2 \leq Y_3$ τότε

$$f_{\underset{\sim}{Y}}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 3!\, f(y_1) f(y_2) f(y_3), & a < y_1 < y_2 < y_3 < b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Για $n=3$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των X_1, X_2, X_3 είναι:

$f_{\underset{\sim}{X}}(x_1, x_2, x_3) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2)\, f_{X_3}(x_3)$. Αν επιπλέον οι X_1, X_2, X_3 είναι και ισόνομες τότε: $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) = f(x_1) f(x_2) f(x_3)$ όπου f η κοινή συνάρτηση πυκνότητας των τ.μ. X_1, X_2, X_3.

Όλα τα διαστήματα που περιέχουν ισότητα των διατεταγμένων στατιστικών (μεταβλητών) έχουν αντίστοιχη πιθανότητα μηδέν.

Έστω π.χ. $P[a < X_1 = X_2 < b,\ a < X_3 < b]$. Η πιθανότητα αυτή είναι:

$$P[a < X_1 = X_2 < b,\ a < X_3 < b] = \int_a^b \int_a^b \int_{x_2}^{x_2} f(x_1) f(x_2) f(x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$= 0$, διότι $\displaystyle\int_{x_2}^{x_2} f(x_1)\, dx_1 = 0$

Άρα, το σύνολο $\mathcal{A}$, όπου $f(x_1) f(x_2) f(x_3) > 0$ είναι η ένωση των εξής έξι διαστημάτων:

$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3);\ a < x_1 < x_2 < x_3 < b\}$

$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3);\ a < x_2 < x_1 < x_3 < b\}$

$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3);\ a < x_1 < x_3 < x_2 < b\}$

$A_4 = \{(x_1, x_2, x_3);\ a < x_2 < x_3 < x_1 < b\}$

$A_5 = \{(x_1, x_2, x_3);\ a < x_3 < x_1 < x_2 < b\}$

$A_6 = \{(x_1, x_2, x_3);\ a < x_3 < x_2 < x_1 < b\}$

διότι $3! = 6$ είναι όλες οι δυνατές μεταθέσεις των x_1, x_2, x_3.

Θέτουμε $y_1 = \min\{x_1, x_2, x_3\}$, $y_2 =$ ενδιάμεση τιμή των x_1, x_2, x_3,

$y_3 = \max\{x_1, x_2, x_3\}$. Οι συναρτήσεις αυτές ορίζουν "1-1" μετασχηματισμό που απεικονίζει καθένα από τα σύνολα

$A_1, A_2, \dots, A_6$ στο $B = \{(y_1, y_2, y_3) ; a < y_1 < y_2 < y_3 < b\}$.

Οι αντίστροφες συναρτήσεις είναι:

Όσον αφορά το σύνολο A_1: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$

A_2: $x_2 = y_1$, $x_1 = y_2$, $x_3 = y_3$

A_3: $x_1 = y_1$, $x_3 = y_2$, $x_2 = y_3$

A_4: $x_2 = y_1$, $x_3 = y_2$, $x_1 = y_3$

A_5: $x_3 = y_1$, $x_1 = y_2$, $x_2 = y_3$

A_6: $x_3 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_1 = y_3$

Συνεπώς έχουμε: (Βλέπε ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, Μετασχηματισμοί τ.μ. με χρήση Ιακωβιανής)

$$J_{A_1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Ομοίως

$$J_{A_2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \text{ κλπ.}$$

Για όλες τις Ιακωβιανές ισχύει ότι $|J_{A_1}| = |J_{A_2}| = \dots = |J_{A_6}| = 1$.

Συνεπώς, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τριών διατεταγμένων στατιστικών $Y_1 = \min\{X_1, X_2, X_3\}$, $Y_2 =$ ενδιάμεση τιμή των $\{X_1, X_2, X_3\}$, $Y_3 = \max\{X_1, X_2, X_3\}$ είναι:

$$g(y_1, y_2, y_3) = |J_{A_1}| f(y_1) f(y_2) f(y_3) + |J_{A_2}| f(y_2) f(y_1) f(y_3)$$

$$+|J_{A_3}|\, f(y_1)f(y_3)f(y_2) + |J_{A_4}|\, f(y_3)f(y_1)f(y_2)$$

$$+|J_{A_5}|\, f(y_2)f(y_3)f(y_1) + |J_{A_6}|\, f(y_1)f(y_2)f(y_3)$$

$$= 3!\, f(y_1)f(y_2)f(y_3) \boxtimes$$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας της μεγαλύτερης διατεταγμένης στατιστικής Y_n. Έστω $g_n(y_n)$ η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. Y_n. Θα δείξουμε ότι η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της Y_n μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης κατανομής $F(x)$ και της συνάρτησης πυκνότητας $f(x)$ της τ.μ. X.

Εάν $a<y_n<b$, τότε η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της Y_n είναι:

$$g_n(y_n)=\int_a^{y_n}\int_a^{y_{n-1}}\cdots\int_a^{y_3}\int_a^{y_2} n!\, f(y_1)\cdots f(y_n)\, dy_1\, dy_2\cdots dy_{n-2}\, dy_{n-1}$$

$$=\int_a^{y_n}\int_a^{y_{n-1}}\cdots\int_a^{y_3} n!\left(\int_a^{y_2} f(y_1)\,dy_1\right) f(y_2)\cdots f(y_n)\, dy_2\, dy_3\cdots dy_{n-2}\, dy_{n-1}$$

$$=\int_a^{y_n}\int_a^{y_{n-1}}\cdots\int_a^{y_3} n!\, F(y_2)\, f(y_2)\cdots f(y_{n-1})\, f(y_n)\, dy_2\, dy_3\cdots dy_{n-2}\, dy_{n-1}$$

$$=\int_a^{y_n}\int_a^{y_{n-1}}\cdots\; n!\left(\int_a^{y_3} F(y_2)\, f(y_2)\, dy_2\right) f(y_3)\cdots f(y_n)\, dy_3\cdots dy_{n-2}\, dy_{n-1}$$

Όμως

$$\int_a^{y_3} F(y_2)\, f(y_2)\, dy_2=\int_a^{y_3} F(y_2)\, dF(y_2) = \left[\frac{F^2(y_2)}{2}\right]_a^{y_3} =$$

$$= \frac{F^2(y_3)-F^2(a)}{2} = \frac{F^2(y_3)}{2}.$$

Άρα

$$g_n(y_n)=\int_a^{y_n}\int_a^{y_{n-1}}\cdots\int_a^{y_4} n!\,\frac{F^2(y_3)}{2} f(y_3) f(y_4)\cdots f(y_n)\,dy_3\cdots dy_{n-2}\,dy_{n-1}$$

$$=\int_a^{y_n}\int_a^{y_{n-1}}\cdots\int_a^{y_5} n!\left[\int_a^{y_4}\frac{F^2(y_3)}{2} f(y_3)\,dy_3\right] f(y_4)\cdots f(y_n)\,dy_4\cdots dy_{n-1}$$

Όμως

$$\int_a^{y_4}\frac{F^2(y_3)}{2} f(y_3)\,dy_3=\frac{1}{2}\int_a^{y_4}F^2(y_3)\,dF(y_3)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{F^3(y_3)}{3}\right]_a^{y_4}=\frac{1}{2\cdot 3}\left[F^3(y_3)\right]_a^{y_4}=$$

$$=\frac{1}{3!}\left[F^3(y_4)-F^3(a)\right]=\frac{1}{3!}F^3(y_4)$$

Άρα

$$g_n(y_n)=\int_a^{y_n}\int_a^{y_{n-1}}\cdots\int_a^{y_5} n!\,\frac{1}{3!}F^3(y_4) f(y_4)\cdots f(y_n)\,dy_4\cdots dy_{n-1}$$

Ομοίως, θα προκύψει

$$g_n(y_n)=n!\,\frac{1}{(n-1)!}F^{n-1}(y_n) f(y_n)=n\left[F(y_n)\right]^{n-1} f(y_n)$$

Συνεπώς,

$$g_n(y_n)=\begin{cases} n\left[F(y_n)\right]^{n-1} f(y_n), & a<y_n<b \\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι:

$$g_1(y_1)=\begin{cases} n\left[1-F(y_1)\right]^{n-1} f(y_1), & a<y_1<b \\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$g_1(y_1)=\int_{y_1}^{b}\int_{y_2}^{b}\cdots\int_{y_{n-2}}^{b}\int_{y_{n-1}}^{b} n!\, f(y_1)\, f(y_2)\cdots f(y_n)\, dy_n\cdots dy_3\, dy_2$$

$$=\int_{y_1}^{b}\int_{y_2}^{b}\cdots\int_{y_{n-2}}^{b} n!\, f(y_1)\, f(y_2)\cdots f(y_{n-1})\left[\int_{y_{n-1}}^{b} f(y_n)\, dy_n\right] dy_{n-1}\cdots dy_3\, dy_2$$

Όμως $1-F(x)=F(b)-F(x)=\int_a^b f(w)\,dw-\int_a^x f(w)\,dw=\int_x^b f(w)\,dw$

Άρα $\displaystyle\int_{y_{n-1}}^{b} f(y_n)\, dy_n = 1-F(y_{n-1})$

Συνεπώς

$$g_1(y_1)=\int_{y_1}^{b}\int_{y_2}^{b}\cdots\int_{y_{n-2}}^{b} n!\, f(y_1)\, f(y_2)\cdots f(y_{n-1})\left[1-F(y_{n-1})\right] dy_{n-1}\cdots dy_3\, dy_2$$

$$=\int_{y_1}^{b}\int_{y_2}^{b}\cdots\int_{y_{n-3}}^{b} n!\, f(y_1) f(y_2)\cdots\left(\int_{y_{n-2}}^{b} f(y_{n-1})\left[1-F(y_{n-1})\right] dy_{n-1}\right) dy_{n-2}\cdots dy_2$$

Αλλά

$$\int_{y_{n-2}}^{b} f(y_{n-1})\left[1-F(y_{n-1})\right] dy_{n-1}$$

$$=-\int_{y_{n-2}}^{b}\left[1-F(y_{n-1})\right] d\left(1-F(y_{n-1})\right)=-\left[\frac{\left[1-F(y_{n-1})\right]^2}{2}\right]_{y_{n-2}}^{b}$$

$$= -\left\{ \frac{[1-F(b)]^2 - [1-F(y_{n-2})]^2}{2} \right\} = \frac{[1-F(y_{n-2})]^2}{2}$$

Έτσι, έχουμε:

$$g_1(y_1) = \int_{y_1}^{b}\int_{y_2}^{b}\cdots\int_{y_{n-3}}^{b} n!\, f(y_1) f(y_2)\cdots f(y_{n-2}) \frac{[1-F(y_{n-2})]^2}{2} dy_{n-2}\cdots dy_2$$

Συνεχίζοντας να ολοκληρώνουμε ομοίως, έχουμε τελικά:

$$g_1(y_1) = \frac{n!}{(n-1)!}[1-F(y_1)]^{n-1} f(y_1) = n[1-F(y_1)]^{n-1} f(y_1)$$

Για να υπολογίσουμε μία ενδιάμεση διατεταγμένη τ.μ. Y_k αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$g_k(y_k) = \int_a^{y_k}\int_a^{y_{k-1}}\cdots\int_a^{y_2}\int_{y_k}^{b}\int_{y_{k+1}}^{b}\cdots\int_{y_{k-1}}^{b} n!\, f(y_1) f(y_2)\cdots f(y_n)\, dy_n\cdots dy_{k+1}\, dy_1\cdots dy_{k-1}$$

και προκύπτει

$$g_k(y_k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(F(y_k)\right)^{k-1}[1-F(y_k)]^{n-k} f(y_k), & a<y_k<b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ένας άμεσος συλλογισμός που μας οδηγεί στην περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της διατεταγμένης στατιστικής Y_k είναι ο εξής. Για να είναι ίση με y_k η τ.μ. Y_k θα πρέπει **k-1 από τις n τιμές των τ.μ.** $X_1, \ldots, X_n$ να είναι μικρότερες από y_k, $n-k$ τιμές να είναι μεγαλύτερες από y_k και ακριβώς μία τιμή να είναι ίση με y_k. Η συνάρτηση πυκνότητας οποιουδήποτε συνόλου τιμών των τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ τέτοιου ώστε $k-1$ τιμές να είναι όλες μικρότερες από y_k, $n-k$ τιμές να είναι όλες μεγαλύτερες από y_k και ακριβώς μία τιμή να είναι ίση με y_k είναι $[F(y_k)]^{k-1}[1-F(y_k)]^{n-k}f(y_k)$.

Επειδή υπάρχουν $\binom{n}{k-1,n-k,1} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!\,1!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}$ διαφορετικοί τρόποι ώστε ένα σύνολο n τιμών των τ.μ. $X_1,\ldots,X_n$ να είναι τέτοιο ώστε $k-1$ τιμές του να είναι όλες μικρότερες από y_k, $n-k$ τιμές του να είναι όλες μεγαλύτερες από y_k και ακριβώς μία τιμή του να είναι ίση με y_k, καταλήγουμε ότι η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. Y_k είναι:

$$g_k(y_k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!(k-1)!}[F(y_k)]^{k-1}[1-F(y_k)]^{n-k}f(y_k), & a<y_k<b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας οποιουδήποτε δύο διατεταγμένων τ.μ. Y_i, Y_j με $Y_i<Y_j$ εκφράζεται με τη βοήθεια των $F(x)$ και $f(x)$ χρησιμοποιώντας παρόμοιους συλλογισμούς:

$$g_{ij}(y_i,y_j) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}[F(y_i)]^{i-1}[F(y_j)-F(y_i)]^{j-i-1} \\ \qquad [1-F(y_j)]^{n-j}f(y_i)f(y_j), \\ \qquad\qquad a<y_i<y_j<b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

<u>Άσκηση 1</u> Έστω τ.μ. τ.ω. $Y_1<Y_2<Y_3<Y_4$ και

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να βρεθεί η πιθανότητα $P[Y_3 > 1/2]$.

Λύση

Είναι $g_{Y_3}(y_3) = \begin{cases} \dfrac{4!}{(4-3)!\,(3-1)!}[F(y_3)]^{3-1}[1-F(y_3)]^{4-3} f(y_3), & 0<y_3<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Είναι

$$F(x) = \int_0^x 2w\,dw = 2\left[\frac{w^2}{2}\right]_0^x = \begin{cases} x^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα $g_{Y_3}(y_3) = \begin{cases} \dfrac{4!}{1!\,2!}(y_3^2)^2(1-y_3^2)\,2y_3, & 0<y_3<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

και

$$g_{Y_3}(y_3) = \begin{cases} 24\cdot y_3^5(1-y_3^2), & 0<y_3<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και, μετά από πράξεις

$$P\left[Y_3 > \frac{1}{2}\right] = \int_{1/2}^{1} 24\,y_3^5(1-y_3^2)\,dy_3 = \frac{243}{256}.$$

Άσκηση 2 Έστω τ.μ. $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_5$ που αποτελούν διατεταγμένες στατιστικές από ένα τ.δ. μεγέθους $n=5$ από μία κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0<x<\infty \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Δείξτε ότι, $Z_1 = Y_2$ και $Z_2 = Y_4 - Y_2$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Σημείωση: Έστω X_1, X_2 τ.μ. με από κοινού σπυκνότητας $f(x_1, x_2)$. Τότε X_1, X_2 είναι στοχαστικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν η $f(x_1, x_2)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο μιας μη-αρνητικής συνάρτησης του x_1 μόνο και μιας μη-αρνητικής συνάρτησης του x_2 μόνο. Δηλαδή $f(x_1,x_2) \equiv g(x_1)\, h(x_2)$ όπου $g(x_1) > 0$, $x_1 \in \mathcal{A}_1$ και $g(x_1) = 0$, αλλού και $h(x_2) > 0$, $x_2 \in \mathcal{A}_2$ και $h(x_2) = 0$ αλλού.

Είναι για $n = 5$, $i = 2$, $j = 4$

$$g_{Y_2,Y_4}(y_2,y_4) = \begin{cases} \dfrac{5!}{(2-1)!\,(4-2-1)!\,(5-4)!} [F(y_2)]^{2-1} [F(y_4) - F(y_2)]^{4-2-1} \\ \quad [1 - F(y_4)]^{5-4} f(y_2) f(y_4), \quad 0 < y_2 < y_4 < 6 \\ 0, \quad \text{αλλού} \end{cases}$$

$$g_{Y_2,Y_4}(y_2,y_4) = \frac{5!}{1!\,1!\,1!} F(y_2)[F(y_4) - F(y_2)][1 - F(y_4)] f(y_2) f(y_4)$$

$$0 < y_2 < y_4 < 6$$

$$F(x) = \int_0^x e^{-w}\,dw = -\int_0^x e^{-w}\,d(-w) = \left[-e^{-w}\right]_0^x$$

$$= -e^{-x} + e^0 = 1 - e^{-x}, \quad x > 0$$

Άρα

$$g_{Y_2,Y_4}(y_2,y_4) = 120 \cdot (1 - e^{-y_2})\left[(1 - e^{-y_4}) - (1 - e^{-y_2})\right]$$
$$[1 - (1 - e^{-y_4})]\, e^{-y_2} e^{-y_4}$$

Συνεπώς

$$g_{Y_2,Y_4}(y_2,y_4) = \begin{cases} 120(1 - e^{-y_2})(e^{-y_2} - e^{-y_4})\, e^{-2y_4 - y_2}, & 0 < y_2 < y_4 < \infty \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Είναι $Z_1 = Y_2$, $Z_2 = Y_4 - Y_2 \Rightarrow Y_2 = Z_1$, $Y_4 = Z_1 + Z_2$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial y_4}{\partial z_1} & \dfrac{\partial y_4}{\partial z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Άρα $h_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = |J|\, g_{Y_2,Y_4}(z_1, z_1+z_2)$

$$= \begin{cases} 120(1-e^{-z_1})(e^{-z_1} - e^{-(z_1+z_2)})\, e^{-2(z_1+z_2)-z_1} & 0 < z_1 < z_1+z_2 < 6 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Για τον πρώτο κλάδο έχουμε:

$$h_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = 120\left(e^{-z_1} - e^{-z_1-z_2} - e^{-2z_1} + e^{-2z_1-z_2}\right)e^{-3z_1-2z_2}$$

$$= 120\, e^{-4z_1-2z_2} - e^{-4z_1-3z_2} - e^{-5z_1-2z_2} + e^{-5z_1-3z_2}$$

$$= 120\, e^{-4z_1}e^{-2z_2} - e^{-4z_1}e^{-3z_2} - e^{-5z_1}e^{-2z_2} + e^{-5z_1}e^{-3z_2}$$

$$= 120\, e^{-4z_1}e^{-2z_2}(1-e^{-z_2}) - e^{-5z_1}e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})$$

$$= 120\left(e^{-4z_1}e^{-2z_2} - e^{-5z_1}e^{-2z_2}\right)(1-e^{-z_2})$$

$$= 120\, e^{-4z_1}e^{-2z_2}(1-e^{-z_1})(1-e^{-z_2})$$

Συνεπώς

$$h_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = \begin{cases} \underbrace{120\, e^{-4z_1}(1-e^{-z_1})}_{=f_1(z_1)}\ \underbrace{e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})}_{f_2(z_2)} & 0 < z_1 < z_1+z_2 < 6 \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases}$$

Είναι $h_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2)=\begin{cases} f_1(z_1)f_2(z_2), & 0<z_1<z_1+z_2<6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

άρα οι τ.μ. Z_1, Z_2 είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. ☒

<u>Άσκηση 3</u> Έστω Y_1, Y_2, Y_3 διατεταγμένες στατιστικές τυχαίου δείγματος μεγέθους $n=3$ από κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$. Να βρεθεί η κατανομή του εύρους του δείγματος $Z_1=Y_3-Y_1$.

<u>Λύση</u> Είναι $F(x)=x,\ 0<x<1$

Για $n=3,\ i=1,\ j=3$

$$g_{Y_1,Y_3}(y_1,y_3)=\begin{cases} \dfrac{3!}{0!\,1!\,0!}[F(y_1)]^0[F(y_3)-F(y_1)][1-F(y_3)]^0 f(y_1)f(y_3) & 0<y_1<y_3<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$g_{Y_1,Y_3}(y_1,y_3)=\begin{cases} 6(y_3-y_1), & 0<y_1<y_3<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επιπλέον, θέτουμε $\left.\begin{array}{l} Z_1=Y_3-Y_1 \\ Z_2=Y_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Y_1=Z_2-Z_1 \\ Y_3=Z_2 \end{array}$

και $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial z_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial z_2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$

Συνεπώς $g_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2)=|-1|\,6(z_2-z_2+z_1)=6z_1,\quad 0<z_1<z_2<1$

Άρα $h_{Z_1}(z_1)=\displaystyle\int_{z_1}^{1}6z_1\,dz_2=\begin{cases} 6z_1(1-z_1), & 0<z_1<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

<u>Άσκηση 4</u> Έστω $Y_1 < Y_2 < Y_3$ διατεταγμένες στατιστικές από τυχαίο δείγμα μεγέθους $n=3$ από κατανομή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = 2x$, $0<x<1$ και $f(x)=0$, αλλού. Δείξτε ότι $Z_1 = Y_1/Y_2$, $Z_2 = Y_2/Y_3$ και $Z_3 = Y_3$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

<u>Λύση</u>

Είναι

$$g_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3) = \begin{cases} 3!f(y_1)f(y_2)f(y_3) = 6\cdot 2y_1 2y_2 2y_3 = 48y_1y_2y_3 & 0<y_1<y_2<y_3<1 \\ 0, \text{ αλλού} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} Z_1 = Y_1/Y_2 \\ Z_2 = Y_2/Y_3 \\ Z_3 = Y_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Y_1 = Z_1 \cdot Z_2 Z_3 \\ Y_2 = Z_2 Y_3 \\ Y_3 = Z_3 \end{array}$$

και

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_1}{\partial z_2} & \frac{\partial y_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial z_1} & \frac{\partial y_2}{\partial z_2} & \frac{\partial y_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial z_1} & \frac{\partial y_3}{\partial z_2} & \frac{\partial y_3}{\partial z_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_2 z_3 & z_1 z_3 & z_1 z_2 \\ 0 & z_3 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= z_2 z_3^2$$

Άρα $g_{Z_1,Z_2,Z_3}(z_1,z_2,z_3) = |z_2 z_3^2|\, 48\, z_1 z_2 z_3 z_2 z_3 z_3$

$$= 48 z_1 z_2^3 z_3^5 = f_1(z_1) f_2(z_2) f_3(z_3), \quad 0<z_1<1,$$

$0<z_2<1,\ 0<z_3<1$

και $f_1(z_1)=4 z_1$, $f_2(z_2)=z_2^3$, $f_3(z_3)=z_3^5$. Συνεπώς, οι τ.μ. Z_1, Z_2, Z_3 είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Άσκηση 5 Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από ομοιόμορφη κατανομή $U(a,b)$. Να βρεθεί η κατανομή των παρακάτω στατιστικών συναρτήσεων:

(α) $T_1(\underset{\sim}{x})=X_{(1)}=\min\{X_1,\dots,X_n\}$

(β) $T_2(\underset{\sim}{x})=X_{(n)}=\max\{X_1,\dots,X_n\}$

(γ) $T_3(\underset{\sim}{x})=\frac{1}{2}\left(X_{(1)}+X_{(n)}\right)$

(δ) $T_4(\underset{\sim}{x})=X_{(n)}-X_{(1)}$

Λύση (α) Η κατανομή της τ.μ. $Y_1=X_{(1)}$ θα είναι:

$$g_1(y_1)=n\left[1-F(y_1)\right]^{n-1}f(y_1)$$

Είναι $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$, $a\le x\le b$ και $f(x)=0$, αλλού

και
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$$

Άρα
$$g_1(y_1)=\begin{cases} n\left[1-\dfrac{y_1-a}{b-a}\right]^{n-1}\dfrac{1}{b-a}, & a\le y_1\le b\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

(β)
$$g_n(y_n)=\begin{cases} n\left[\dfrac{y_n-a}{b-a}\right]^{n-1}\dfrac{1}{b-a}=n\dfrac{(y_n-a)^{n-1}}{(b-a)^n}, & a\le y_n\le b\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

(γ) Για να βρούμε τη συνάρτηση πυκνότητας της στατιστικής συνάρτησης $\dfrac{Y_1+Y_n}{2}$ (αλλά και του εύρους του δείγματος ερώτημα (δ)) χρειαζόμαστε την $g_{Y_1,Y_n}(y_1,y_n)$.

Για $n=n$, $i=1$, $j=n$

έχουμε

$$g_{Y_1,Y_n}(y_1,y_n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(1-1)!\,(n-1-1)!\,(n-n)!}\,[F(y_1)]^{0}\,[F(y_n)-F(y_1)]^{n-1-1}\,[1-F(y_n)]^{n-n}\,f(y_1)f(y_n), & a\le y_1\le y_n\le b\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

$$g_{Y_1,Y_n}(y_1,y_n)=\begin{cases}n(n-1)\left(\dfrac{y_n-a}{b-a}-\dfrac{y_1-a}{b-a}\right)^{n-2}\dfrac{1}{(b-a)^2}, & a\le y_1\le y_n\le b\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

$$g_{Y_1,Y_n}(y_1,y_n)=\begin{cases}n(n-1)\dfrac{(y_n-y_1)^{n-2}}{(b-a)^n}, & a\le y_1\le y_n\le b\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

Συνεπώς αν θέσουμε

$$\left.\begin{aligned}Z_1&=Y_1\\ Z_2&=\frac{Y_1+Y_n}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}Y_1&=Z_1\\ Y_n&=2Z_2-Z_1\end{aligned}$$

$$a\le z_1\le 2z_2-z_1\le b$$

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial z_2}\\ \dfrac{\partial y_n}{\partial z_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial z_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2$$

$$h_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2)=\begin{cases}2n(n-1)\dfrac{(2z_2-z_1-z_1)^{n-2}}{(b-a)^n}, & 0\le z_1<z_2\le b\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

$$h_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = \begin{cases} 2n(n-1)\dfrac{(2z_2-2z_1)^{n-2}}{(b-a)^n}, & a \le z_1 < z_2 \le b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα

$$f_{Z_2}(z_2) = \int_a^{z_2} 2n(n-1)\frac{(2z_2-2z_1)^{n-2}}{(b-a)^n}\, dz_1$$

$$= \frac{2^{n-1} n(n-1)}{(b-a)^n}\int_a^{z_2} (z_2-z_1)^{n-2}\, dz_1$$

$$= -\frac{2^{n-1} n(n-1)}{(b-a)^n}\int_a^{z_2} (z_2-z_1)^{n-2}\, d(z_2-z_1)$$

$$= -\frac{2^{n-1} n(n-1)}{(b-a)^n}\left[\frac{(z_2-z_1)^{n-1}}{n-1}\right]_a^{z_2}$$

$$= -\frac{2^{n-1} n}{(b-a)^n}\left\{\left[(z_2-z_2)^{n-1} - (z_2-a)^{n-1}\right]\right.$$

$$= -\frac{2^{n-1} n}{(b-a)^n}\left[-(z_2-a)^{n-1}\right] = \frac{2^{n-1} n(z_2-a)^{n-1}}{(b-a)^n},$$

$$a < z_2 < b$$

(ε) Για να βρούμε την κατανομή του εύρους $Y_n - Y_1$

Θέτουμε: $\left.\begin{aligned} Z_1 &= Y_1 \\ Z_2 &= Y_n - Y_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} Y_1 &= Z_1 \\ Y_n &= Z_1 + Z_2 \end{aligned}$ $\quad a \le z_1 < z_1 + z_2 \le b$

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial y_n}{\partial z_1} & \frac{\partial y_n}{\partial z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Άρα

$$h_{z_1,z_2}(z_1,z_2)=\begin{cases} n(n-1)\dfrac{(z_1+z_2-z_1)^{n-2}}{(b-a)^n}, & a\le z_1<z_1+z_2\le b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$h_{z_1,z_2}(z_1,z_2)=\begin{cases} n(n-1)\dfrac{z_2^{n-2}}{(b-a)^n}, & a\le z_1<z_1+z_2\le b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και άρα

$$f_{z_2}(z_2)=\int_a^{b-z_2} n(n-1)\frac{z_2^{n-2}}{(b-a)^n}\,dz_1$$

$$=n(n-1)\frac{z_2^{n-2}}{(b-a)^n}(b-z_2-a)$$

Άρα

$$f_{z_2}(z_2)=\frac{n(n-1)z_2^{n-2}(b-a-z_2)}{(b-a)^n}, \quad 0<z_2<b-a.$$

Στατιστικά Δείγματος

Ορισμός: Έστω τ.δ. $\underset{\sim}{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ από τ.μ. X. Κάθε συνάρτηση του δείγματος $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ που δεν περιέχει άγνωστες παραμέτρους καλείται στατιστική συνάρτηση (στ.σ.).

Με τη βοήθεια των στ. σ. μπορούμε να ορίσουμε τα στατιστικά δείγματος σε αναλογία με τις παραμέτρους του πληθυσμού από τον οποίον προέρχεται.

(i) Ο Δειγματικός μέσος: $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

(ii) Η Δειγματική ροπή r-τάξης: $m'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r$, $r = 2, 3, \ldots$

(Η δειγματική ροπή $1^{ης}$ τάξης είναι ο δειγματικός μέσος).

(iii) Η Δειγματική **κεντρική** ροπή r-τάξης

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^r, \quad r = 2, 3, \ldots$$

Για $r = 2$ έχουμε τη δειγματική διασπορά

$$S'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

Όμως, πολλές φορές αντί για τη S'^2 παίρνουμε την

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

που αποτελεί <u>αμερόληπτη</u> εκτιμήτρια της διασποράς του πληθυσμού. Η ποσότητα S' ή S καλείται δειγματική τυπική απόκλιση.

(iv) Αν $\underset{\sim}{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ και $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι τ.δ. από τις τ.μ. X και Y τότε:

η δειγματική συνδιασπορά είναι:

$$S'_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) \quad \text{ή} \quad S_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

(v) ο δειγματικός Συντελεστής Συσχέτισης είναι:

$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2}}$$

Μελέτη της κατανομής της μέσης τιμής και της διασποράς

Θεώρημα 1 Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ένα τ.δ. από την κανονική κατανομή. Τότε η κατανομή της δειγματικής μέσης τιμής $\overline{X}$ είναι κανονική και μάλιστα $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Απόδειξη Η χαρακτηριστική συνάρτηση της μέσης τιμής $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι:

$$\phi_{\overline{X}}(t) = E(e^{it\overline{X}}) = E\left(e^{it\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}\right) = E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{i\frac{t}{n}X_i}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[E\, e^{i\frac{t}{n}\cdot X_i}\right] = \prod_{i=1}^{n}\phi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right)$$

Όμως $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ άρα σύμφωνα με γνωστό αποτέλεσμα από "Πιθανότητες II" είναι $\phi_{X_i}(t) = e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

Συνεπώς

$$\phi_{\overline{X}}(t) = \prod_{i=1}^{n}\phi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{i\frac{t}{n}\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{n}\right)^2}$$

$$= e^{it\mu - \frac{1}{2}t^2\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}$$ που είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Άρα $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. ⊗

Θεώρημα 2 Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τ.δ. από κατανομή με συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και $E[X_i]=\mu$, $var(X_i)=\sigma^2<\infty$.

Τότε: $$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0,1),$$ όπου με d συμβολίζουμε τη σύγκλιση κατά κατανομή.

Σημείωση: Λέμε ότι η ακολουθία τ.μ. X_n, $n=1,2,\ldots$ συγκλίνει κατά κατανομή στη X αν και μόνο αν $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$, για κάθε σημείο συνέχειας της συνάρτησης κατανομής $F_X(x)$ της X, όπου $F_{X_n}(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της ακολουθίας X_n, $n=1,2,\ldots$

Απόδειξη Είναι άμεση από το Κ.Ο.Θ. διότι:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1), \text{ όπου } S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Συνεπώς
$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma\sqrt{n}}{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \sim N(0,1).$$

Θεώρημα 3 Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τ.δ. από κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Τότε οι τ.μ. $\overline{X}$ και S^2 είναι ανεξάρτητες και η τ.μ. $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$ και η τ.μ. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3, παραπέμπουμε στο βιβλίο 4, Τόμος Ι, σελ. 23-25.

Θεώρημα 4 Αν $\underset{\sim}{X}$, $\underset{\sim}{Y}$ τ.δ. μεγέθους n από τις κατανομές $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ και τα δείγματα είναι ανεξάρτητα τότε $\overline{X}-\overline{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}\right)$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4 είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1 και του αποτελέσματος σύμφωνα με το οποίο αν οι τ.μ. X_1 και X_2 ακολουθούν τις κατανομές $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, αντίστοιχα και είναι ανεξάρτητες, τότε:

$$X_1 \pm X_2 \sim N(\mu_1 \pm \mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

Θεώρημα 5 Αν $\underset{\sim}{X}$ τ.δ. μεγέθους n από κατανομή $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ με δειγματική διασπορά S_1^2 και $\underset{\sim}{Y}$ τ.δ. μεγέθους m από κατανομή $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ με δειγματική διασπορά S_2^2 και τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα τότε: $$\frac{\frac{S_1'^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2'^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{n-1,m-1}.$$ (Η απόδειξη παραλείπεται).

<u>Θεώρημα 6</u> Αν $\underset{\sim}{X}$ και $\underset{\sim}{Y}$ είναι δύο ανεξάρτητα τ.δ. από πληθυσμούς $N(\mu_1,\sigma^2)$ και $N(\mu_2,\sigma^2)$, αντίστοιχα, τότε η τ.μ.

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1'^2+(m-1)S_2'^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

όπου $\overline{X}$ είναι η μέση τιμή, $S_1'^2$ είναι η διασπορά και n το μέγεθος του δείγματος $\underset{\sim}{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$, $\overline{Y}$ είναι η μέση τιμή, $S_2'^2$ είναι η διασπορά και m το μέγεθος του δείγματος $\underset{\sim}{Y}=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_m)$.

<u>Απόδειξη</u>

Είναι $\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m}\right)$

Συνεπώς $$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m}}}\sim N(0,1)$$

Όμως $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(n-1)S_1'^2}{\sigma^2}\sim \chi^2_{n-1}\\[2ex] \dfrac{(m-1)S_2'^2}{\sigma^2}\sim \chi^2_{m-1}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(n-1)S_1'^2}{\sigma^2}+\frac{(m-1)S_2'^2}{\sigma^2}\sim \chi^2_{n+m-2}$$

Επομένως, $$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\Bigg/\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S_1'^2+(m-1)S_2'^2}{\sigma^2}}{n+m-2}}\sim t_{n+m-2}$$

διότι αν $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2_n$ και οι X, Y είναι ανεξάρτητες (βλέπε ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ), έπεται ότι: $\dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_n$. ⊠

<u>Θεώρημα 7</u> Έστω X, Y ανεξάρτητες τ.μ. τέτοιες ώστε $X \sim \chi^2_n$ και $Y \sim \chi^2_m$ τότε $W = \dfrac{X/n}{Y/m} \sim F_{n,m}$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 7, παραπέμπουμε στο Βιβλίο 4, σελ. 315-316, Τόμος Ι.

<u>Άσκηση 6</u> Έστω $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από κατανομή $f_X(x)$. Να βρεθεί η κατανομή της στ.σ. $T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ όταν η κατανομή της X είναι:

(α) Gamma(a, β) (β) Γεωμετρική (γ) Bernoulli (δ) Poisson.

<u>Λύση</u> Οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες σαν στοιχεία του τ.δ. $\underset{\sim}{X}$. Συνεπώς, η ροπογεννήτρια του αθροίσματος $T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ισούται με το γινόμενο των ροπογεννητριών των τ.μ. X_i δηλαδή $M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$.

Αν $X \sim$ Gamma$(a,\beta) \Rightarrow f_X(x) = \dfrac{\beta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\beta x}$, $x > 0$

και $M_X(t) = \left(1 - \dfrac{t}{\beta}\right)^{-a}$

Άρα $M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \dfrac{t}{\beta}\right)^{-a} =$

$= \left(1 - \dfrac{t}{\beta}\right)^{-na} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Gamma(na, β).

(β) Αν $X \sim$ Γεωμετρική$(p) \Rightarrow P\{X = x\} = p(1-p)^{x-1}$
$x = 1, 2, \dots$

και $M_X(t)=\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$. Άρα $M_{\sum_{i=1}^{n}X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$

$=\left(\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^n$. Η τελευταία ισότητα δίνει τη ροπογεννήτρια της Αρνητικής Διωνυμικής (n,p). Έστω ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την εμφάνιση της n-οστής επιτυχίας.
Η τ.μ. X λέμε ότι ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p και γράφουμε $X\sim Nb(n,p)$.
Είναι $P\{X=x\}=\binom{x-1}{n-1}p^n(1-p)^{x-n}$, $x=n,n+1,\ldots$
Συνεπώς $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim Nb(n,p)$.

(γ) $X\sim Bin(1,p)\equiv Bernoulli(p)\Rightarrow P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x}$, $x=0,1$.
Είναι $M_X(t)=\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$

Άρα

$$M_{\sum_{i=1}^{n}X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}(1-p+pe^t)$$

$=(1-p+pe^t)^n$. Άρα $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim Bin(n,p)$, διότι η τελευταία ισότητα δίνει τη ροπογεννήτρια μιας τ.μ. $X\sim Bin(n,p)$.

(δ) $X\sim Poisson(\lambda)\Rightarrow P\{X=x\}=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$, $x=0,1,2,\ldots$
και $M_{\sum_{i=1}^{n}X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}e^{\lambda(e^t-1)}=e^{n\lambda(e^t-1)}$.

Άρα $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim Poisson(n\lambda)$, διότι η τελευταία ισότητα δίνει τη ροπογεννήτρια μιας τ.μ. $X\sim Poisson(n\lambda)$, $\lambda>0$.

Άσκηση 7

Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τ.δ. από κατανομή Gamma(a,β), $a\in \mathbb{N}$, $\beta>0$. Να δειχθεί ότι η τ.μ. $Z_1 = 2\beta \sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί την κατανομή χ^2_{2an}.

Λύση Σύμφωνα με την Άσκηση 6, η τ.μ. $Z_2=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Gamma(na,β). Έστω $Z_1 = 2\beta Z_2$.

Είναι $M_{Z_1}(t) = E(e^{tZ_1}) = E(e^{t2\beta Z_2}) = E(e^{t'Z_2})$

όπου $t' = 2t\beta$ $\qquad = \left(1-\frac{t'}{\beta}\right)^{-na} =$

$$= \left(1-\frac{2\cancel{\beta}t}{\cancel{\beta}}\right)^{-na} = (1-2t)^{-na}$$

Η ροπογεννήτρια μιας $X\sim \chi^2_n$ είναι $M_X(t) = (1-2t)^{-n/2}$

Είναι $M_{Z_1}(t) = (1-2t)^{-na} = (1-2t)^{-\frac{2na}{2}}$

Συνεπώς, $Z_1 \sim \chi^2_{2na}$.

Άσκηση 8

Θεωρούμε δύο ανεξάρτητα τ.δ. $\underset{\sim}{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ και $\underset{\sim}{Y}=(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ από κατανομές Gamma$(1,\beta_1)$ και Gamma$(1,\beta_2)$, αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι η τ.μ. $W = \frac{\beta_1 \overline{X}}{\beta_2 \overline{Y}}$, όπου $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ και $\overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$, ακολουθεί την $F_{2n,2m}$.

Λύση Σύμφωνα με την Άσκηση 7 η τ.μ.

$Z_1 = 2\beta_1 \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$ και $Z_2 = 2\beta_2 \sum_{i=1}^{m} Y_i \sim \chi^2_{2m}$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 7, η τ.μ. $W = \frac{Z_1}{2n} \Big/ \frac{Z_2}{2m} \sim F_{2n,2m}$.

Άσκηση 9

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-\beta x} dx$, $a>0$, $\beta>0$

(β) $\int_0^{1} x^{a-1}(1-x)^{\beta-1} dx$, $a>0$, $\beta>0$.

Λύση (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση πυκνότητας της Gamma(a,β). Είναι $f_X(x)=\frac{\beta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\beta x}$, $x>0$, $a>0$, $\beta>0$.

Όμως $\int_0^{\infty} f_X(x)\,dx=1$

Άρα $\int_0^{\infty} \frac{\beta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\beta x} = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\Gamma(a)}{\beta^a}$

όπου $\Gamma(a)=\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ (συνάρτηση Gamma) που έχει τις εξής ιδιότητες: $a>0$

$\Gamma(a)=(a-1)\Gamma(a-1)$, $\Gamma(a)=(a-1)!$, $a\in\mathbb{N}$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

(β) Η συνάρτηση πυκνότητας της Beta(a,β) είναι:

$$f_X(x)=\frac{\Gamma(a+\beta)}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad x\in(0,1), a>0, \beta>0$$

Είναι

$$\int_0^1 f_X(x)\,dx=1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{\Gamma(a+\beta)}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}dx=1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(\beta)}{\Gamma(a+\beta)}.$$

<u>Άσκηση 10</u> Αν X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες τ.μ. από τις κατανομές $\text{Gamma}(a_1, \beta)$ και $\text{Gamma}(a_2, \beta)$, αντίστοιχα. Τότε, οι τ.μ. $Y_1 = X_1 + X_2$ και $Y_2 = \dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ είναι επίσης ανεξάρτητες και έχουν κατανομή $\text{Gamma}(a_1+a_2, \beta)$ και $\text{Beta}(a_1, a_2)$.

<u>Λύση</u> Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τ.μ. X_1, X_2 αφού είναι ανεξάρτητες είναι:

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) =$$

$$= \frac{\beta^{a_1}}{\Gamma(a_1)} x_1^{a_1-1} e^{-\beta x_1} \frac{\beta^{a_2}}{\Gamma(a_2)} x_2^{a_2-1} e^{-\beta x_2}$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό:

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_2 \\ Y_2 &= \frac{X_1}{X_1+X_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} X_1 &= Y_1 Y_2 \\ X_2 &= Y_1 - Y_1 Y_2 \end{aligned}$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1-y_2 & -y_1 \end{vmatrix} = -y_1 y_2 - y_1(1-y_2) = -y_1 y_2 - y_1 + y_1 y_2$$
$$= -y_1$$

Άρα

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) = |J| \, f_{(X_1,X_2)}(y_1 y_2, y_1(1-y_2))$$

$$= \frac{\beta^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} (y_1 y_2)^{a_1-1} (y_1(1-y_2))^{a_2-1} e^{-\beta y_1} y_1$$

$$= \frac{\beta^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1+a_2)} y_1^{a_1+a_2-1} e^{-\beta y_1} \frac{\Gamma(a_1+a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} y_2^{a_2-1}(1-y_2)^{a_2-1}$$

$= g_{Y_1}(y_1)\, g_{Y_2}(y_2),\ y_1>0,\ 0<y_2<1$, δηλαδή οι τ.μ. Y_1, Y_2 είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν τις κατανομές Gamma(a_1+a_2, β) και Beta(a_1, a_2), αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

<u>Εισαγωγή</u> Έστω X τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας, αν είναι συνεχής ή με συνάρτηση πιθανότητας, αν είναι διακριτή $f_X(x)$. Στη Θεωρία Πιθανοτήτων γνωρίζουμε την $f_X(x)$ και ζητάμε την πιθανότητα να συμβεί κάποιο γεγονός που προσδιορίζεται με τη βοήθεια της τ.μ. X. Συνήθως, η συνάρτηση πυκνότητας (ή πιθανότητας) $f_X(x)$ εξαρτάται από άγνωστες σταθερές που ονομάζονται παράμετροι, π.χ.

(α) στην κατανομή Poisson(λ), $\lambda>0$, αν $X \sim$ Poisson(λ) τότε

$P\{X=k\} = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k=0,1,2,\ldots$, η παράμετρος είναι η ποσότητα λ.

(β) στη διωνυμική κατανομή Bin(n,p), αν $X \sim$ Bin(n,p), τότε $P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k=0,1,2,\ldots,n$

Η παράμετρος n συνήθως θεωρείται γνωστή και η παράμετρος που μας ενδιαφέρει είναι η πιθανότητα "επιτυχίας" p.

(γ) στην κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, αν $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, τότε $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Οι παράμετροι είναι οι ποσότητες μ, σ^2.

(δ) στην κατανομή Gamma(a,β), αν $X \sim$ Gamma(a,β), τότε $f_X(x) = \dfrac{\beta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\beta x}$, οι παράμετροι είναι οι ποσότητες a και β.

Στην πράξη συνήθως γνωρίζουμε τη συναρτησιακή μορφή της $f_X(x)$, όμως οι παράμετροι είναι άγνωστοι και το πρόβλημά μας είναι να εκτιμήσουμε αυτές τις παραμέτρους. Αυτό είναι το αντικείμενο της Παραμετρικής Στατιστικής. Τις άγνωστες παραμέτρους της κατανομής προσπαθούμε να τις προσδιορίσουμε με τη βοήθεια τυχαίων δειγμάτων. Η συνάρτηση πυκνότητας (ή πιθανότητας) θα συμβολίζεται με $f(x;\theta)$, αν εξαρτάται από μία μόνο άγνωστη παράμετρο και με $f(x;\underset{\sim}{\theta})$ αν εξαρτάται από περισσότερες άγνωστες παραμέτρους, όπου $\underset{\sim}{\theta}$ είναι το διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων, $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$. Το πεδίο ορισμού της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$ συμβολίζεται με $\Theta \subseteq \mathbb{R}^r$, $r \geq 1$ και καλείται <u>παραμετρικός χώρος</u>, π.χ.

για την κατανομή Poisson(λ), $\theta = \lambda$, $\Theta = (0, \infty)$

για τη διωνυμική κατανομή Bin(n,p), $\theta = p$, $\Theta = (0,1)$.

<u>Διαστήματα Εμπιστοσύνης</u> Θα ασχοληθούμε με την εκτίμηση μίας ή περισσότερων παραμέτρων, όχι μέσω στατιστικών συναρτήσεων αλλά με διαστήματα των οποίων τα άκρα είναι τυχαίες μεταβλητές. Τα διαστήματα **επιλέγ**ονται έτσι ώστε η πιθανότητα να περιέχουν την άγνωστη τιμή της παραμέτρου να είναι $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

<u>Ορισμός (Τυχαίο Διάστημα)</u>: Ένα διάστημα με μήκος πεπερασμένο ή άπειρο του οποίου ένα τουλάχιστον άκρο είναι τ.μ. καλείται τυχαίο διάστημα.

<u>Παράδειγμα 1</u> Έστω $\overline{X}$ ο δειγματικός μέσος τυχαίου δείγματος μεγέθους n από κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, $\sigma^2>0$. Τότε $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$. Ποια η πιθανότητα το τυχαίο διάστημα $\left(\overline{X}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ να περιέχει την παράμετρο μ, όποιες κι αν είναι οι τιμές των μ, $\sigma^2>0$ και n;

<u>Λύση</u> Τα ενδεχόμενα $\overline{X}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ και $-2<\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}<2$ είναι ισοδύναμα και συνεπώς έχουν την ίδια πιθανότητα. Όμως, $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$.

Άρα, η πιθανότητα το τυχαίο διάστημα $\left(\overline{X}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ να περιέχει την παράμετρο μ είναι:

$$P\left(\overline{X}-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right)=P\left(-2<\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}<2\right)$$

$$=\Phi(2)-\Phi(-2)=\Phi(2)-(1-\Phi(2))=2\Phi(2)-1,$$ όπου $\Phi(x)$ η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$ και $2\Phi(2)-1=$ $=0.954$, από πίνακες της $N(0,1)$.

Φαίνεται ότι αυτή η πιθανότητα <u>δεν</u> εξαρτάται από τις τιμές μ, σ^2 και n. Το μήκος του διαστήματος είναι $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ (σταθερή συνάρτηση του $\overline{x}$). Το μήκος αυτό είναι γνωστό αν είναι γνωστά το σ και το n.

<u>Ορισμός (Διάστημα Εμπιστοσύνης)</u> Θεωρούμε τις στ.σ. $L(\underset{\sim}{X})$ και $U(\underset{\sim}{X})$ τέτοιες ώστε $L(\underset{\sim}{X})\leq U(\underset{\sim}{X})$ και έναν αριθμό α τ.ω. $\alpha\in(0,1)$. Το τυχαίο διάστημα $[L(\underset{\sim}{X}),U(\underset{\sim}{X})]$

για το οποίο ισχύει $P_\theta[L(\underset{\sim}{X}) \leq \theta \leq U(\underset{\sim}{X})] = 1-\alpha \;\; \forall \theta \in \Theta$ καλείται διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) για την παράμετρο θ με συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.) $1-\alpha$ ή πιο απλά $(1-\alpha)100\%$ δ.ε. Οι στ.σ. $L(\underset{\sim}{X})$ και $U(\underset{\sim}{X})$ είναι γνωστές ως <u>ανώτερο</u> και <u>κατώτερο</u> <u>όριο</u> <u>εμπιστοσύνης</u> αντίστοιχα και εξαρτώνται από το συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$ και την τιμή του τ.δ. $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Για δοσμένο α, το σύνολο των διαστημάτων εμπιστοσύνης για τα διάφορα δείγματα προσδιορίζει ένα πεδίο στο οποίο θα βρίσκεται η πραγματική τιμή της παραμέτρου θ και καλείται <u>ζώνη</u> <u>εμπιστοσύνης.</u>

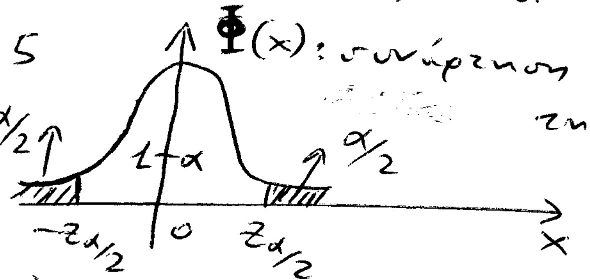
<u>Παράδειγμα 2</u> Ας υποθέσουμε ότι ένα μηχάνημα εμφιάλωσης ποτού γεμίζει τις φιάλες με ποσότητα X gr ποτού, όπου X είναι τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\sigma^2 = 5^2$ και μέση τιμή μ άγνωστη. Έστω $\mu = \theta$. Παίρνουμε ένα τ.δ. $n = 25$ φιαλών που μας δίνει $\overline{x} = 485$gr. Να βρεθεί ένα 95% δ.ε. για την άγνωστη τιμή της παραμέτρου θ.

<u>Λύση</u> Γνωρίζουμε ότι αν Z, τ.μ. $\sim N(0,1)$, τότε:

$$P[-1.96 < Z < 1.96] = 0.95$$

όπου $-1.96 = -z_{\alpha/2}$ και

$1.96 = z_{\alpha/2}$, όπου $\alpha = 0.05$



$\Phi(x)$: συνάρτηση πυκνότητας της $N(0,1)$.

και $$Z = \frac{\overline{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)}{\sigma} \overset{(*)}{\sim} N(0,1), \text{ καθώς } n \to \infty$$ (n μεγάλο)

(Προσεγγιστικά από το Κ.Ο.Θ)

Έχουμε, διαδοχικά: $$P\left[-1.96 < \frac{(\overline{X}-\theta)\sqrt{n}}{\sigma} < 1.96\right] = 0.95$$

(*) Συνήθως, θεωρούμε $n \geq 30$.

$$\Rightarrow P\left[\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 0.95$$

Αν συμβολίσουμε το τ.δ. ως $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, τότε:

$$U(\underset{\sim}{X}) = \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 486.96\,gr$$

$$L(\underset{\sim}{X}) = \bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 483.04\,gr$$

Άρα, το ζητούμενο 95% δ.ε. για την παράμετρο $\mu = \theta$ είναι: (483.04, 486.96).

<u>Ερμηνείες του Διαστήματος Εμπιστοσύνης</u>

Εάν το πείραμα επαναληφθεί πολλές φορές, παίρνοντας κάθε φορά τυχαίο δείγμα μεγέθους n και υπολογίζοντας κάθε φορά τα όρια $\left\{\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$, θα περιμέναμε η σχετική συχνότητα των διαστημάτων που περιέχουν την παράμετρο μ, να πλησιάζει το $1-\alpha$.

Στο Παράδειγμα 2, θα περίμενε κανείς ότι η ερμηνεία του διαστήματος που βρήκαμε είναι η εξής: Η πιθανότητα η μέση τιμή μ της ποσότητας ποτού ανά μπουκάλι να είναι μεταξύ του διαστήματος που βρήκαμε είναι 0.95. Όμως αυτό το συμπέρασμα είναι λάθος διότι αν είχαμε πάρει κάποιο άλλο δείγμα θα βρίσκαμε κάποιο άλλο 95% δ.ε. Συνεπώς η σωστή ερμηνεία είναι η εξής: Εάν επαναλάβουμε το πείραμα πολλές φορές παίρνοντας κάθε φορά τυχαίο δείγμα μεγέθους n, θα υπολογίσουμε αντίστοιχα 0.95 δ.ε. Το 95% αυτών των διαστημάτων θα περιέχουν την άγνωστη μέση τιμή μ.

Παρατηρήσεις

1η Η εύρεση του δ.ε. προϋποθέτει πολύ καλή γνώση της κατανομής που ακολουθεί η στ.σ. με την οποία εκτιμάται η παράμετρος θ.

2η Στο Παράδειγμα 2 είδαμε ότι το 95% δ.ε. για μία τ.μ. που ακολουθεί κανονική κατανομή $N(0,1)$ είναι $(-1.96, +1.96)$. Αυτό το διάστημα δεν είναι μοναδικό διότι τα διαστήματα $(-\infty, 1.64)$ και $(-1.64, \infty)$ έχουν και αυτά πιθανότητα 0.95. Προφανώς, καλύτερο διάστημα είναι αυτό με το μικρότερο μήκος.

3η Η εύρεση του δ.ε. με το ελάχιστο μήκος είναι μερικές φορές πολύ δύσκολη. Γι' αυτό, πολλές φορές, παίρνουμε το δ.ε. που ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$P(\theta > U(\underset{\sim}{X})) = P(\theta < L(\underset{\sim}{X})) = \alpha/2.$$

4η Εάν επαναλάβουμε το τυχαίο πείραμα πολλές φορές λαμβάνοντας κάθε φορά τυχαίο δείγμα μεγέθους n το δ.ε. αλλάζει και έτσι υπολογίζουμε αντίστοιχα 95% δ.ε.

5η Ένα δ.ε. παρέχει μία ασφαλέστερη εκτίμηση της άγνωστης τιμής μίας παραμέτρου ενός πληθυσμού.

6η Η κατασκευή ενός δ.ε. βασίζεται σε ένα τ.δ. από αυτόν τον πληθυσμό και στην κατανομή της εκτιμήτριας της παραμέτρου δηλαδή της στ.σ. Για το λόγο αυτό ένα δ.ε. λαμβάνει υπόψη όλα τα δυνατά δείγματα που θα μπορούσαν να επιλεγούν.

7η Τα δ.ε. παρέχουν ένα φάσμα πιθανών τιμών για την παράμετρο λαμβάνοντας υπόψη τη σημειακή εκτίμηση,

το τυπικό σφάλμα και τον συντελεστή εμπιστοσύνης
δηλαδή την πιθανότητα το φάσμα τιμών να περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου.

Τα βασικά συστατικά για την κατασκευή ενός δ.ε.

1ο Επιλογή τ.δ. μεγέθους n από ένα πληθυσμό με άγνωστη παράμετρο θ.

2ο Είναι γνωστή η κατανομή του σημειακού εκτιμητή της παραμέτρου ή κάποιας σχετικής σ.τ.μ.

3ο Ξεκινώντας από αυτήν την κατανομή και χρησιμοποιώντας κατάλληλα θεωρήματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων λαμβάνουμε μία κατάλληλη συνάρτηση που περιέχει την παράμετρο και στοιχεία του δείγματος και για την οποία γνωρίζουμε την κατανομή.

4ο Με γνωστή την κατανομή της συνάρτησης και αφού επιλέξουμε τον συντελεστή εμπιστοσύνης και υπολογίσουμε τη δειγματική διασπορά (η οποία σε κάποιες περιπτώσεις είναι γνωστή), μετά από πράξεις, καταλήγουμε στο ζητούμενο δ.ε. Το δ.ε. που θα προκύψει παρέχει ένα φάσμα πιθανών τιμών της παραμέτρου που μας ενδιαφέρει.

Μετά από την επιλογή ενός τ.δ. μεγέθους n από έναν πληθυσμό παρατηρήσεων (μετρήσεων) που σχετίζονται με μία άγνωστη παράμετρο θ, η διαδικασία κατασκευής ενός δ.ε. απαντάει στα εξής ερωτήματα:

1ο Πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την "πληροφορία" που μας δίνει το δείγμα για να εκτιμήσουμε την άγνωστη παράμετρο και να πάρουμε αποφάσεις για τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού που μας ενδιαφέρουν;

Απάντηση: Καθορίζουμε την κατανομή της στ.σ. του δείγματος.

2ο Πόση εμπιστοσύνη μπορούμε να έχουμε στις εκτιμήσεις και κατ' επέκταση στις αποφάσεις που παίρνουμε;

Απάντηση: Καθορισμός του συντελεστή εμπιστοσύνης.

3ο Πως μπορούμε να εκφράσουμε αυτήν την εμπιστοσύνη;

Απάντηση: Καθορισμός ενός Δ.Ε.

Μέθοδος Κατασκευής ενός Δ.Ε.

Ορισμός (Αντιστρεπτή Ποσότητα): Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ τ.δ. από κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας (ή πιθανότητας) $f(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\theta})$. Έστω $g(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\theta})$ μία τυχαία συνάρτηση του τ.δ. $\underset{\sim}{X}$ και της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$. Αν η κατανομή της τ.μ. $g(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\theta})$ είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$, τότε η συνάρτηση $g(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\theta})$ καλείται αντιστρεπτή.

Παράδειγμα 3 Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ τ.δ. από κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$. Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αντιστρεπτές.

$$g_1(\underset{\sim}{x};\theta)=\frac{\bar{x}-\theta}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1),\ \text{όταν } \sigma^2 \text{ γνωστό.}$$

$$g_2(\underset{\sim}{x};\theta)=\frac{\bar{x}-\theta}{s}\sqrt{n}\sim t_{n-1},\ \text{όταν } \sigma^2 \text{ άγνωστο.}$$

$$g_3(\underset{\sim}{x};\theta)=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim \chi^2_{n-1},\ \text{όταν } \mu,\sigma^2 \text{ άγνωστα.}$$

Θεώρημα 8 Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ τ.δ. από τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας $f(\underset{\sim}{x};\theta)$. Έστω επίσης η αντιστρεπτή συνάρτηση $g(\underset{\sim}{x};\theta)$, $\underset{\sim}{x}\in\mathbb{R}^n$, $\theta\in\Theta$. Αν η $g(\underset{\sim}{x};\theta)$ είναι συνεχής $\forall(\underset{\sim}{x};\theta)$ και γνήσια μονότονη ως προς θ $\forall\underset{\sim}{x}$, τότε το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ υπολογίζεται από τη σχέση: $P(z_1\le g(\underset{\sim}{x};\theta)\le z_2)=1-\alpha$.

Απόδειξη Για δεδομένο δείγμα $\underset{\sim}{x}$ η $g(\underset{\sim}{x};\theta)$ είναι συνάρτηση μόνο του θ. Θέτουμε $y(\theta)=g(\underset{\sim}{x};\theta)$. Η $y(\theta)$ είναι αντιστρεπτή. Έτσι

$$P(z_1\le g(\underset{\sim}{x};\theta)\le z_2)=P(z_1\le y(\theta)\le z_3)$$

$$=P\left(y^{-1}(z_1)\le\theta\le y^{-1}(z_2)\right)=1-\alpha.\ \boxtimes$$

Σημείωση: Η κατασκευή δ.ε. για παραμέτρους που σχετίζονται με διακριτές τ.μ. είναι σπάνια. Για το λόγο αυτό η αναφορά μας, στο εξής στα δ.ε. επικεντρώνεται στα δ.ε. για παραμέτρους συνεχών τ.μ.

Γενική Μέθοδος Κατασκευής δ.ε

Έστω $X_1,X_2,\dots,X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή $f(x;\underset{\sim}{\theta})$ και $g(\underset{\sim}{\theta})$ μία παραμετρική συνάρτηση. Ζητάμε να κατασκευάσουμε ένα δ.ε. $1-\alpha$ το οποίο να χρησιμοποιεί το δείγμα $\underset{\sim}{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$. Ο επόμενος "αλγόριθμος" περιγράφει μία γενική μέθοδο κατασκευής τέτοιων διαστημάτων εμπιστοσύνης η οποία στις περισσότερες από τις γνωστές κατανομές μπορεί να εφαρμοστεί με απόλυτη επιτυχία. Τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα ακόλουθα:

Β1. Προσδιορίζουμε μία στ.σ. $T=T(\underset{\sim}{X})$ της οποίας η κατανομή να εξαρτάται από την παράμετρο $\underset{\sim}{\theta}$. Συνήθως η στ.σ. T επιλέγεται έτσι ώστε να είναι επαρκής για την

$\underset{\sim}{\theta}$. (Για την έννοια της επάρκειας παραπέμπουμε στο μάθημα ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι).

B_2. Κατασκευάζουμε μία συνάρτηση $Y=\psi(T, g(\underset{\sim}{\theta}))$ του T και της $g(\underset{\sim}{\theta})$ τέτοια ώστε η κατανομή της Y να μην εξαρτάται από την παράμετρο $\underset{\sim}{\theta}$.

B_3. Υπολογίζουμε δύο σταθερές $c_1 \leq c_2$ ώστε να ισχύει: $P(c_1 \leq Y \leq c_2) = 1-\alpha$. Οι σταθερές αυτές θα εξαρτώνται προφανώς μόνο από την κατανομή της τ.μ. Y και το $\alpha \in (0,1)$.

B_4. Λύνουμε όπου αυτό είναι εφικτό τη σχέση

$$c_1 \leq \psi(T(\underset{\sim}{X}), g(\underset{\sim}{\theta})) \leq c_2$$

ως προς $g(\underset{\sim}{\theta})$, παίρνοντας ισοδύναμα μία διπλή ανισότητα της μορφής

$$L = L(\underset{\sim}{X}) \leq g(\underset{\sim}{\theta}) \leq U(\underset{\sim}{X}) = U.$$

B_5. Η επιλογή των σταθερών c_1, c_2 ώστε να ικανοποιείται η σχέση του B_3 μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Μας ενδιαφέρει η τιμή των c_1, c_2 που ελαχιστοποιεί το μήκος του Δ.Ε. Συνεπώς, συνεχίζουμε ως εξής:

$B_{5(a)}$. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μήκους του δ.ε. για την οποία θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο. Έτσι θέλουμε:

$$\frac{d\ell}{dc_1} = 0 \text{ και } \frac{d^2\ell}{dc_1^2} > 0,$$

όπου ℓ: μήκος δ.ε, θεωρώντας ταυτόχρονα, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι το c_2 είναι συνάρτηση του c_1. Από το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου υπολογίζουμε τα c_1, c_2 και βρίσκουμε το δ.ε. Αν αυτό δεν δίνει μονοσήμαντη λύση προχωράμε στο βήμα $B_{5(\beta)}$.

$B_{5(\beta)}$. Αν δεν καταλήξουμε σε μονοσήμαντη λύση μέσω του $B_{5(\alpha)}$ καταφεύγουμε στα c_1, c_2 που ικανοποιούν τη σχέση: $P(c_1 > Y) = P(c_2 < Y) = \alpha/2$

και το διάστημα που υπολογίζουμε τις περισσότερες φορές εξασφαλίζει και την ελαχιστοποίηση του μήκους.

<u>Παράδειγμα 4</u> (Δ.ε. για την παράμετρο μ, Δειγματοληψία από Κανονική Κατανομή)

Έστω $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από κατανομή $N(\theta, \sigma^2)$. Να βρεθεί $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την άγνωστη παράμετρο θ, όταν:

(α) Η θεωρητική διασπορά σ^2 του πληθυσμού είναι γνωστή

(β) Η θεωρητική διασπορά σ^2 του πληθυσμού είναι άγνωστη.

<u>Λύση</u> Ένας σημειακός εκτιμητής της παραμέτρου θ είναι ο $\overline{X}$ (που είναι και εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας της θ, ε.μ.π.).

(α) Αν η διασπορά σ^2 είναι γνωστή τότε η τ.μ. $\frac{\overline{X}-\theta}{\sigma}\sqrt{n}$ από το Θεώρημα 2 ακολουθεί την $N(0,1)$, συνεπώς η συνάρτηση $\frac{\overline{X}-\theta}{\sigma}\sqrt{n}$ είναι αντιστρεπτή και σύμφωνα με το Θεώρημα 8, το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. υπολογίζεται από τη σχέση:

$$P\left(z_1 < \frac{\overline{X}-\theta}{\sigma}\sqrt{n} < z_2\right) = 1-\alpha \quad (1)$$

Άρα

$$P\left(\overline{X} - z_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta < \overline{X} - z_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \quad (2)$$

Το μήκος του διαστήματος είναι $\ell(z_1, z_2) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_2 - z_1)$ (3)

Θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το μήκος $\ell(z_1, z_2)$.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να πούμε ότι το z_2 είναι συνάρτηση του z_1. Το μήκος γίνεται ελάχιστο αν $\frac{dl}{dz_1}=0$ και $\frac{d^2l}{dz_1^2}>0$. Με παραγώγιση της συνάρτησης (3) ως προς z_1 έχουμε: $\frac{dl}{dz_1}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{dz_2}{dz_1}-1\right)$ (4). Επίσης, από τη σχέση (1), έχουμε ότι $\int_{z_1}^{z_2} f_Z(x)dx = 1-\alpha$, όπου $Z=\frac{\bar{X}-\theta}{\sigma}\sqrt{n}$ και $f_Z(z)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. Z.

Επομένως, $\Phi(z_2)-\Phi(z_1)=1-\alpha$ (5). Αν παραγωγίσουμε την (5) ως προς z_1, έχουμε:

$$\frac{\partial\Phi(z_2)}{\partial z_1}\frac{dz_2}{dz_1}-\frac{\partial\Phi(z_1)}{\partial z_1}=0 \quad (6) \Rightarrow \frac{dz_2}{dz_1}=\frac{f_Z(z_1)}{f_Z(z_2)}$$

Θέλουμε $\frac{dl}{dz_1}=0$. Χρησιμοποιώντας τις (4) και (6) έχουμε: $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{dz_2}{dz_1}-1\right)=0 \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{f_Z(z_1)}{f_Z(z_2)}-1\right)=0$

Άρα $f_Z(z_1)=f_Z(z_2)$ από την οποία λαμβάνουμε

$z_1=z_2$ απορρίπτεται γιατί $z_1\neq z_2$, z_1,z_2 διακεκριμένα

ή $z_1=-z_2$ λόγω της συμμετρίας της κατανομής. Από τη σχέση (5) $\Rightarrow \Phi(z_2)-\Phi(z_1)=\Phi(z_2)-\Phi(-z_2)$
$=\Phi(z_2)-(1-\Phi(z_2))=2\Phi(z_2)-1=1-\alpha$

Άρα $\Phi(z_2)=1-\alpha/2 \Rightarrow z_2=z_{\alpha/2}$ και $z_1=-z_{\alpha/2}$

Συνεπώς, το ζητούμενο διάστημα είναι:

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

(β) Αν η διασπορά είναι άγνωστη, η αντιστρεπτή ποσότητα

$\frac{\bar{X}-\theta}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$, όπου $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

Άρα το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. θα υπολογίζεται από τη σχέση

$$P\left(t_1 < \frac{(\bar{X}-\theta)\sqrt{n}}{S} < t_2\right) = 1-\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X} - t_2\frac{S}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} - t_1\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Το μήκος του διαστήματος είναι $\ell = \frac{S}{\sqrt{n}}(t_2 - t_1)$ (1)

και γίνεται ελάχιστο αν $\frac{d\ell}{dt_1} = 0$ και $\frac{d^2\ell}{dt_1^2} > 0$ κάτω

από τη συνθήκη $T_{n-1}(t_2) - T_{n-1}(t_1) = 1-\alpha$ (2)

Παραγωγίζοντας τις (1) και (2) ως προς t_1, θεωρώντας ότι το t_2 είναι συνάρτηση του t_1 χωρίς περιορισμό της γενικότητας, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\ell}{dt_1} &= \frac{S}{\sqrt{n}}\left(\frac{dt_2}{dt_1} - 1\right) \\ t_{n-1}(t_2)\frac{dt_2}{dt_1} &- t_{n-1}(t_1) = 0 \end{aligned}\right\} \text{Άρα } \frac{dt_2}{dt_1} = \frac{t_{n-1}(t_1)}{t_{n-1}(t_2)}$$

όπου $T_{n-1}(x)$ η σ.κ. μιας $X \sim t_{n-1}$ και $t_{n-1}(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας μίας $X \sim t_{n-1}$ (σ.κ: συνάρτηση κατανομής).

Θέλουμε $\frac{d\ell}{dt_1} = 0$ δηλαδή $\frac{S}{\sqrt{n}}\left(\frac{t_{n-1}(t_1)}{t_{n-1}(t_2)} - 1\right) = 0$

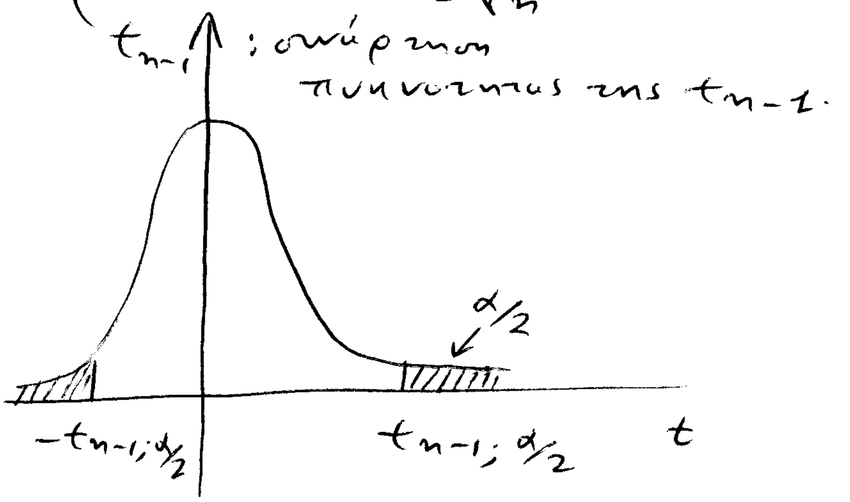
Άρα $t_{n-1}(t_1) = t_{n-1}(t_2)$ και αφού $t_1 \neq t_2$ έχουμε $t_1 = -t_2$ από συμμετρία της t_{n-1}. Από τη σχέση (2) έχουμε

$$T_{n-1}(t_2) - T_{n-1}(t_1) = T_{n-1}(t_2) - T_{n-1}(-t_2)$$

$$= 2T_{n-1}(t_2) - 1 = 1-\alpha \Rightarrow T_{n-1}(t_2) = 1 - \alpha/2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow t_2 = t_{n-1;\alpha/2}$ και $t_1 = -t_{n-1;\alpha/2}$. Συνεπώς, το ζητούμενο δ.ε. $100(1-\alpha)\%$ για την άγνωστη παράμετρο θ όταν η διασπορά σ^2 είναι άγνωστη δίνεται από τον τύπο:

$$\left(\overline{X} - t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$



Αριθμητική Εφαρμογή του Παραδείγματος 4

(α) Σε ένα τυχαίο δείγμα από 36 ειδικά σχολεία μιας χώρας ο μέσος αριθμός ανά σχολείο ήταν 379.2 και η τυπική απόκλιση 124. **Βρείτε** ένα 95% δ.ε. για το μέσο αριθμό μ των μαθητών όλων των σχολείων της χώρας, αν θεωρήσουμε ότι η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι επίσης ίση με 124 όση είναι και του δείγματος.

Λύση Είναι $\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 379.2 - 1.96\,\frac{124}{6} < \mu < 379.2 + 1.96\,\frac{124}{6} \Rightarrow$$

$338.69 < \mu < 419.71$

Αν θέλαμε ένα 99% δ.ε. θα είχαμε: $379.2 \pm 2.58 \frac{124}{6}$, όπου $2.58 = z_{0.005}$.

(β) Για τον προσδιορισμό του συντελεστή θερμικής διαστολής μ του νικελίου έγιναν 25 μετρήσεις και έδωσαν δειγματική μέση τιμή $\bar{x} = 12.81$ και τυπική απόκλιση $s = 0.04$. Δώστε ένα 95% δ.ε. για τη μέση διαστολή.

<u>Λύση</u> Για την κατασκευή ενός δ.ε. του θερμικού συντελεστή θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο τύπο για δ.ε., για $\alpha = 0.05$, αφού η τυπική απόκλιση σ είναι άγνωστη.

Άρα έχουμε: $\bar{x} - t_{n-1;\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{n-1;\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$

με $\bar{x} = 12.81$, $s = 0.04$, $n = 25$, $t_{24;0.025} = 2.064$ και συνεπώς $12.79 < \mu < 12.83$.

<u>Σημείωση:</u> Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι "αρκετά μεγάλο", $n \geq 25$, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τον πρώτο τύπο για το δ.ε. Σ' αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιούσαμε αντί του $t_{n-1;\alpha/2} = 2.064$ το $z_{\alpha/2} = 1.96$. Αυτή η εναλλακτική επιλογή δικαιολογείται από το Κ.Ο.Θ., αφού $n \geq 25$.

<u>Παράδειγμα 5</u> (Δ.ε. για την παράμετρο σ^2 - Δειγματοληψία από κανονική κατανομή)

Έστω $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τ.δ. από κατανομή $N(\mu, \theta)$. Να βρεθεί ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την άγνωστη παράμετρο θ όταν (α) η μέση τιμή είναι γνωστή, (β) η μέση τιμή είναι άγνωστη.

<u>Λύση</u> Ο ε.μ.π. της Θ, όταν η μέση τιμή μ είναι γνωστή είναι: $\hat{\Theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = S_1'^2$ και είναι επιπλέον και ΑΟΕΔ εκτιμητής του σ^2 (βλέπε ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι).

<u>ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ:</u> Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Αν $X \sim N(0,1) \Rightarrow X^2 \sim \chi_1^2$. Αν $X_i \sim \chi_1^2$, $i=1,\dots,n$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi_n^2$).

Έχουμε $\frac{X_i - \mu}{\sqrt{\Theta}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{(X_i-\mu)^2}{\Theta} \sim \chi_1^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\Theta} = \frac{n S_1'^2}{\Theta} \sim \chi_n^2.$$

Η συνάρτηση $\frac{nS_1'^2}{\Theta}$ είναι αντιστρεπτή, συνεπώς το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την παράμετρο Θ, θα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P\left(\alpha_1 \le \frac{nS_1'^2}{\Theta} \le \alpha_2\right) = 1-\alpha \quad (1)$$

$$P\left(\frac{nS_1'^2}{\alpha_2} \le \Theta \le \frac{nS_1'^2}{\alpha_1}\right) = 1-\alpha \quad (2)$$

Το μήκος $\ell = nS_1'^2\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right)$ και γίνεται ελάχιστο όταν $\frac{d\ell}{d\alpha_1} = 0$ και $\frac{d^2\ell}{d\alpha_1^2} > 0$. Έστω $G_n(x)$ η σ.κατανομής της χ_n^2 και $g_n(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας της χ_n^2.

Από την (1) έχουμε: $G_n(\alpha_2) - G_n(\alpha_1) = 1-\alpha \quad (3)$

Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση μήκους ως προς α_1 και την (3) ως προς α_1 θεωρώντας ότι το α_2 είναι συνάρτηση του α_1 χωρίς περιορισμό της γενικότητας.

Έχουμε: $$\frac{d\ell}{d\alpha_1} = nS_1'^2\left(-\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2}\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right)$$

και $$g_n(\alpha_2)\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} - g_n(\alpha_1) = 0 \Rightarrow \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \frac{g_n(\alpha_1)}{g_n(\alpha_2)} \quad (4)$$

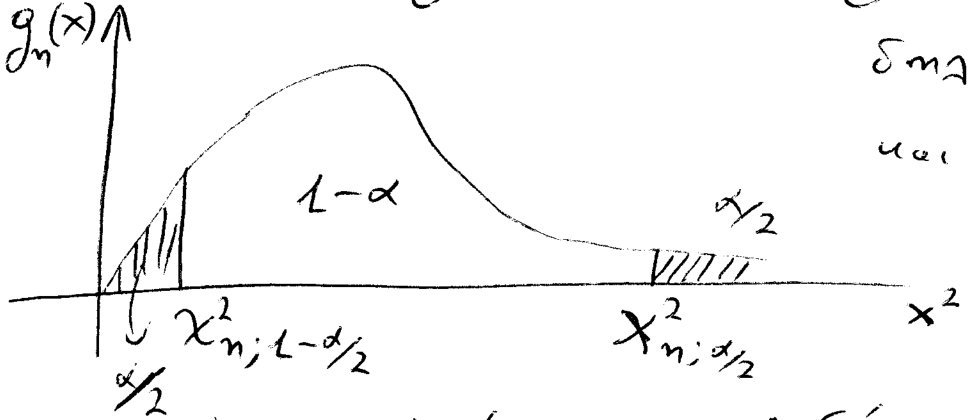
Θέλουμε $\frac{d\ell}{d\alpha_1}=0$ και έχουμε

$$\frac{d\ell}{d\alpha_1}=0 \Rightarrow nS_1'^2\left(-\frac{1}{\alpha_1^2}+\frac{1}{\alpha_2^2}\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right)=0 \overset{(4)}{\Longleftrightarrow}$$

$$nS_1'^2\left(-\frac{1}{\alpha_1^2}+\frac{1}{\alpha_2^2}\frac{g_n(\alpha_1)}{g_n(\alpha_2)}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}=\frac{g_n(\alpha_1)}{g_n(\alpha_2)} \Leftrightarrow g_n(\alpha_2)\,\alpha_2^2=g_n(\alpha_1)\,\alpha_1^2$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι το ελάχιστο μήκους διάστημα είναι δύσκολο να υπολογισθεί, γι'αυτό, βάσει της Παρατήρησης 3, θα επιλέξουμε αυτό που ικανοποιεί τη σχέση: $P\left(\frac{nS_1'^2}{\theta}\ge\alpha_2\right)=P\left(\frac{nS_1'^2}{\theta}\le\alpha_1\right)=\frac{\alpha}{2}$



δηλαδή $\alpha_1=\chi^2_{n;1-\alpha/2}$ και $\alpha_2=\chi^2_{n;\alpha/2}$ και το ζητούμενο $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. όταν η μέση τιμή είναι γνωστή δίνεται από:

$$\left(\frac{nS_1'^2}{\chi^2_{n;\alpha/2}},\ \frac{nS_1'^2}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}}\right).$$

(β) Ο ε.μ.π. της παραμέτρου θ όταν η μέση τιμή είναι άγνωστη είναι $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=S'^2$ ενώ ο ΑΟΕΔ εκτιμητής είναι $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ (βλέπε ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι).

Από το Θεώρημα 3, γνωρίζουμε ότι η ποσότητα $\frac{(n-1)S^2}{\theta}\sim\chi^2_{n-1}$, άρα είναι αντιστρεπτή, δηλαδή η ποσότητα

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\theta} \sim \chi^2_{n-1}.$$ Έστω $P\left[d_1 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < d_2\right] = 1-\alpha$.

δηλαδή $G_n(d_2) - G_n(d_1) = 1-\alpha \Rightarrow$ (όπου G_n η συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. $X \sim \chi^2_{n-1}$).

$$\Rightarrow P\left[d_1 < \frac{(n-1)S^2}{\theta} < d_2\right] = 1-\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left[\frac{(n-1)S^2}{d_2} < \theta < \frac{(n-1)S^2}{d_1}\right] = 1-\alpha.$$ Το μήκος του διαστήματος είναι $\ell = (n-1)S^2\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)$. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση μήκους και την σχέση $G_n(d_2) - G_n(d_1) = 1-\alpha$ ως προς d_1 θεωρώντας ότι το d_2 είναι συνάρτηση του d_1 χωρίς περιορισμό της γενικότητας.

Έχουμε $\frac{d\ell}{dd_1} = (n-1)S^2\left(\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2}\frac{dd_2}{dd_1}\right)$ και

$$g_n(d_2)\frac{dd_2}{dd_1} - g_n(d_1) = 0 \Rightarrow \frac{dd_2}{dd_1} = \frac{g_n(d_1)}{g_n(d_2)}$$

Θέλουμε $\frac{d\ell}{dd_1} = 0$ δηλαδή $(n-1)S^2\left(\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2}\frac{g_n(d_1)}{g_n(d_2)}\right) = 0$

άρα $g_n(d_2)\,d_2^2 = g_n(d_1)\,d_1^2$. Θα καταφύγουμε πάλι στα d_1 και d_2 που ικανοποιούν τη σχέση:

$$P\left(d_1 > \frac{(n-1)S^2}{\theta}\right) = P\left(d_2 < \frac{(n-1)S^2}{\theta}\right) = \alpha/2$$

Τελικά λαμβάνουμε το δ.ε. $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}\right)$.

Η ίδια διαδικασία θα μπορούσε να γίνει με την ποσότητα S'^2 και θα καταλήξουμε στο δ.ε. $\left(\frac{nS'^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}, \frac{nS'^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}\right)$.

Αριθμητική Εφαρμογή του Παραδείγματος 5

Μία εταιρεία που κατασκευάζει ρολόγια θέλει να μάθει τη διακύμανση του προϊόντος που παράγει. Θέλει λοιπόν να βρει ένα δ.ε. για τη διασπορά σ^2. Για το σκοπό αυτό διαλέγει τυχαία ένα δείγμα από 10 ρολόγια από ένα μεγάλο πλήθος ρολογιών που θέλει να ελέγξει. Οι αποκλίσεις των δέκα από μία σταθερή ώρα σημειώνονται στο τέλος ενός μήνα και τα στοιχεία που παίρνουμε είναι $\bar{x} = 0.7\,min$ και $s = 0.4\,min$. Υποθέτοντας ότι η κατανομή των μετρήσεων μπορεί να θεωρηθεί κανονική, να βρεθεί ένα 90% δ.ε. για την παράμετρο σ^2.

Έχουμε $n=10$, $\alpha=0.1$ οπότε $\chi^2_{n-1;\alpha/2} = \chi^2_{9,0.05} = 16.919$ και $\chi^2_{n-1;1-\alpha/2} = \chi^2_{9,0.95} = 3.325$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Παραδείγματος 5(β) για την ποσότητα S^2 έχουμε:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}} \quad \text{και}$$

$$\frac{9\cdot 0.4^2}{16.919} < \sigma^2 < \frac{9\cdot 0.4^2}{3.325} = (0.085, 0.433).$$

Παράδειγμα 6 (Δ.ε. για τη διαφορά $\mu_1-\mu_2$ σε ανεξάρτητα δείγματα από κανονικούς πληθυσμούς)

Έστω δύο ανεξάρτητα τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ και $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ με μέσες τιμές μ_1, μ_2 και διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2, αντίστοιχα. Να βρεθεί ένα δ.ε. $100(1-\alpha)\%$ για τη διαφορά $\mu_1-\mu_2$ όταν:

(a) σ_1^2, σ_2^2 γνωστές, (β) σ_1^2, σ_2^2 άγνωστες αλλά $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma$?

Λύση (a) Από το Θεώρημα 6 η ποσότητα:

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad \text{διότι}$$

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι αντιστρεπτή και συνεπώς το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την θ, θα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P\left(a_1 \le \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \le a_2\right)=1-\alpha$$

και $\Phi(a_2)-\Phi(a_1)=1-\alpha$, όπου Φ η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$.

Έχουμε $P\left(a_1\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)\le a_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
$=1-\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(\overline{X}-\overline{Y}-a_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le \overline{X}-\overline{Y}-a_1\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
$=1-\alpha$

Το μήκος του διαστήματος είναι $l=(a_2-a_1)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

$$\frac{dl}{da_1}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\left(\frac{da_2}{da_1}-1\right)$$

και

$$f_Z(a_2)\frac{da_2}{da_1}-f_Z(a_1)=0 \Rightarrow \frac{da_2}{da_1}=\frac{f_Z(a_1)}{f_Z(a_2)}$$

Άρα $\frac{dl}{da_1}=0 \Rightarrow \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\left(\frac{f_Z(a_1)}{f_Z(a_2)}-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$f_Z(a_1)=f_Z(a_2)$, όπου f_Z η συνάρτηση πυκνότητας της $N(0,1)$.

Άρα $a_1=a_2$ Άτοπο ή $a_1=-a_2$

Συνεπώς $\Phi(a_2)-\Phi(a_1)=1-\alpha \Leftrightarrow \Phi(a_2)-\Phi(-a_2)=1-\alpha$

$\Rightarrow 2\Phi(a_2)-1=1-\alpha \Rightarrow \Phi(a_2)=1-\alpha/2 \Rightarrow a_2=z_{\alpha/2}$

και $a_1=-z_{\alpha/2}$. Συνεπώς το ζητούμενο διάστημα είναι:

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

(β) Επειδή $\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\ \sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\right)$

η ποσότητα $Z=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim N(0,1)$

Επίσης, έχουμε:

$Y_1=\dfrac{(n_1-1)S_1'^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n_1-1}$ και $Y_2=\dfrac{(n_2-1)S_2'^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n_2-1}$

και επειδή τα δείγματα είναι ανεξάρτητα

$$Y=Y_1+Y_2=\frac{(n_1-1)S_1'^2+(n_2-1)S_2'^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n_1+n_2-2}$$

Άρα η τ.μ. $Q=\dfrac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1'^2+(n_2-1)S_2'^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t_{n_1+n_2-2}$

(διότι αν $X\sim N(0,1)$, $Y\sim\chi^2_n \Rightarrow \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}\sim t_n$), είναι μία αντιστρεπτή ποσότητα και συνεπώς το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. θα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P(a_1\le Q\le a_2)=P\left(a_1\le\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1'^2+(n_2-1)S_2'^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\le a_2\right)$$

$$=1-\alpha$$

και $T(a_2)-T(a_1)=1-\alpha$, όπου T η συνάρτηση κατανομής της $t_{n_1+n_2-2}$.

Έχουμε:

$$\ell\left(\bar{X}-\bar{Y}-a_2\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1'^2+(n_2-1)S_2'^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le\right.$$

$$\left.\le\bar{X}-\bar{Y}-a_1\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1'^2+(n_2-1)S_2'^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)=1-\alpha$$

Το μήκος ℓ του δ.ε. είναι:

$$\ell=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1'^2+(n_2-1)S_2'^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\,(a_2-a_1)$$

και

$$\frac{d\ell}{da_1}=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1'^2+(n_2-1)S_2'^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\left(\frac{da_2}{da_1}-1\right)$$

Από τη σχέση $T(a_2)-T(a_1)=1-\alpha$, παραγωγίζοντας ως προς a_1, θα έχουμε

$$t_{n_1+n_2-2}(a_2)\frac{da_2}{da_1}-t_{n_1+n_2-2}(a_1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{da_2}{da_1}=\frac{t_{n_1+n_2-2}(a_1)}{t_{n_1+n_2-2}(a_2)}$$ όπου $t_{n_1+n_2-2}$ είναι η συνάρτηση πυκνότητος της $t_{n_1+n_2-2}$. Από τη σχέση

$$\frac{d\ell}{da_1}=0\Rightarrow t_{n_1+n_2-2}(a_1)=t_{n_1+n_2-2}(a_2)\Rightarrow a_1=-a_2$$

άρα $a_1=t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}$, $a_2=-t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}$

Συνεπώς, το δ.ε δίνεται από τον τύπο:

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S_p'^2},\ \bar{X}-\bar{Y}+t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S_p'^2}\right)$$

όπου $S_p'^2=\dfrac{(n_1-1)S_1'^2+(n_2-1)S_2'^2}{n_1+n_2-2}$.

Αριθμητική Εφαρμογή του Παραδείγματος 6

(α) Μαθητές από την επαρχία και από την πρωτεύουσα πρόκειται να συγκριθούν σε ένα test για τις γνώσεις τους γύρω από τη δημοτική μουσική. Δύο τυχαία δείγματα το πρώτο με μέγεθος 45 και το δεύτερο με μέγεθος 50 επιλέγονται, το πρώτο σχηματίζεται από παιδιά της επαρχίας της ΣΤ' τάξης και το δεύτερο από παιδιά της πρωτεύουσας πάλι της ΣΤ' τάξης. Τα δεδομένα που έχουμε από τα δύο δείγματα περιγράφονται παρακάτω:

1ο Δείγμα	2ο Δείγμα
$n_1 = 45$	$n_2 = 50$
$\bar{X} = 76.8$	$\bar{Y} = 80.8$
$s_1' = 7.2$	$s_2' = 7$

Βρείτε ένα 98% δ.ε. για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ των μέσων τιμών των επιδόσεων των μαθητών

Λύση

Είναι $\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\dfrac{s_1'^2}{n_1} + \dfrac{s_2'^2}{n_2}}$

$$= 76.8 - 80.8 \pm 2.33 \sqrt{\frac{7.2^2}{45} + \frac{7^2}{50}} = -4 \pm 3.4021$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0.02 \\ \alpha/2 = 0.01 \end{array}\right\} \Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0.01} = 2.33 \qquad \Rightarrow (-7.4021, -0.5979)$$

(β) Έστω δύο δείγματα από κανονικούς πληθυσμούς $N(\mu_1, \sigma^2)$ και $N(\mu_2, \sigma^2)$ με μετρήσεις που δίνονται στον πίνακα:

Δείγμα 1	44	44	56	46	47	38	58	53	49	35	46	30	41
Δείγμα 2	35	47	55	29	40	39	32	41	42	57	51	39	

Δώστε ένα 98% δ.ε. για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ των μέσων τιμών των πληθυσμών.

<u>Λύση</u> Από τα δεδομένα του πίνακα βρίσκουμε:

$\overline{X} = 45.15,\ S_1'^2 = 64,\ n_1 = 13$

$\overline{Y} = 42.25,\ S_2'^2 = 76.4,\ n_2 = 12$

Υπολογίζουμε την ποσότητα $S_p'^2$

$$S_p'^2 = \frac{(n_1-1)S_1'^2 + (n_2-1)S_2'^2}{n_1+n_2-2} = \frac{12\cdot 64 + 11\cdot 76.4}{13+12-2} = 69.9$$

Άρα έχουμε $\overline{X}-\overline{Y} \pm t_{23;0.01} S_p' \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} =$

$= 45.15 - 42.25 \pm 2.5\cdot 8.36\sqrt{\frac{1}{13}+\frac{1}{12}} = 2.9 \pm 8.37$

Άρα, το ζητούμενο δ.ε. είναι $(-5.47,\ 11.27)$.

<u>Παράδειγμα 7</u> (Δ.ε. για το λόγο σ_1^2/σ_2^2 σε ανεξάρτητα δείγματα από κανονικούς πληθυσμούς).

Έστω δύο ανεξάρτητα τ.δ. $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ και $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ με μέσες τιμές μ_1, μ_2 και διασπορές σ_1^2 και σ_2^2, αντίστοιχα. Να βρεθεί ένα δ.ε. $100(1-\alpha)\%$ για το λόγο των δύο διασπορών σ_1^2/σ_2^2.

<u>Λύση</u> Είναι $\frac{(n_1-1)S_1'^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1-1}$, $\frac{(n_2-1)S_2'^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_2-1}$

Από το Θεώρημα 7 $\Rightarrow$ $$\frac{\dfrac{(n_2-1)S_2'^2}{\sigma_2^2} \Big/ (n_2-1)}{\dfrac{(n_1-1)S_1'^2}{\sigma_1^2} \Big/ (n_1-1)} \sim F_{n_2-1,\,n_1-1}$$

$\Rightarrow \frac{S_2'^2}{\sigma_2^2} \Big/ \frac{S_1'^2}{\sigma_1^2} \sim F_{n_2-1,\,n_1-1}$ Είναι $Q = \frac{S_2'^2}{\sigma_2^2} \Big/ \frac{S_1'^2}{\sigma_1^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\,\frac{S_2'^2}{S_1'^2}$

Είναι $P\left(d_1 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\,\frac{S_2'^2}{S_1'^2} < d_2\right) = 1-\alpha \Rightarrow F(d_2) - F(d_1) = 1-\alpha$

όπου F η συνάρτηση κατανομής της $F_{n_2-1,\,n_1-1}$.

$$P\left(d_1 \frac{S_1'^2}{S_2'^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < d_2 \frac{S_1'^2}{S_2'^2}\right) = 1-\alpha$$

Το μήκος είναι $\ell = \frac{S_1'^2}{S_2'^2}(d_2 - d_1) \Rightarrow \frac{d\ell}{dd_1} = \frac{S_1'^2}{S_2'^2}\left(\frac{dd_2}{dd_1} - 1\right) = 0$

και παραγωγίζοντας ως προς d_1 την $F(d_2) - F(d_1) = 1-\alpha$

έχουμε $f(d_2)\frac{dd_2}{dd_1} - f(d_1) = 0 \Rightarrow \frac{dd_2}{dd_1} = \frac{f(d_1)}{f(d_2)}$

$\frac{d\ell}{dd_1} = \frac{S_1'^2}{S_2'^2}\left(\frac{f(d_1)}{f(d_2)} - 1\right) = 0 \Rightarrow f(d_1) = f(d_2)$, όπου f η συνάρτηση πυκνότητας της F_{n_2-1,n_1-1}. Το συνηθέστερο δ.ε. για τις εφαρμογές είναι εκείνο για το οποίο παίρνουμε ίσες ουρές για την F_{n_2-1,n_1-1}, δηλαδή απαιτούμε

$P(F_{n_2-1,n_1-1} < d_1) = \alpha/2$ και $P(F_{n_2-1,n_1-1} > d_2) = \alpha/2$

Έτσι $d_2 = F_{n_2-1,n_1-1;\alpha/2}$ και $d_1 = F_{n_2-1,n_1-1;1-\alpha/2}$

Άρα το δ.ε. για το **λόγο** σ_1^2/σ_2^2 (δεν είναι το "βέλτιστο" αλλά συνήθως εφαρμόζεται) είναι το δ.ε ίσων ουρών

$$\left(F_{n_2-1,n_1-1;1-\alpha/2}\frac{S_1'^2}{S_2'^2},\ F_{n_2-1,n_1-1;\alpha/2}\frac{S_1'^2}{S_2'^2}\right).$$

Όταν η τ.μ. $F \sim F_{\nu_1,\nu_2}$ τότε η τ.μ. $\frac{1}{F} \sim F_{\nu_2,\nu_1}$ και αντίστροφα. Έτσι $P(F > F_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2}) = \alpha/2$ με $F \sim F_{n_1-1,n_2-1}$

$\Rightarrow P(F \le F_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2}) = P\left(\frac{1}{F} \ge \frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2}}\right) = 1-\alpha/2$

άρα $\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2}} = F_{n_2-1,n_1-1;1-\alpha/2}$

Άρα το δ.ε. γίνεται

$$\left(\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}} \frac{S_1'^2}{S_2'^2}, F_{n_2-1,n_1-1;\alpha/2} \frac{S_1'^2}{S_2'^2} \right)$$

Αριθμητική Εφαρμογή του Παραδείγματος 7

Μετρήθηκε η διάρκεια ζωής ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος κάτω από δύο διαφορετικά δυναμικά V_1 και V_2. Λάβαμε τυχαία 20 διαφορετικά κυκλώματα, στα 10 εφαρμόσαμε το δυναμικό V_1 και στα άλλα 10 το δυναμικό V_2. Τα αποτελέσματα δίνονται

Δυναμικό 1: $n_1 = 10$, $S_1'^2 = 0.51$ Δώστε ένα 90% δ.ε. για το
Δυναμικό 2: $n_2 = 10$, $S_2'^2 = 0.2$ λόγο $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ των διασπορών

της διάρκειας ζωής των κυκλωμάτων των πληθυσμών κάτω από τα δυναμικά V_1 και V_2.

Έχουμε $F_{9,9;0.05} = 3.18$ Άρα $\frac{0.51}{0.2}\frac{1}{3.18} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{0.51}{0.2} 3.18$

$\Rightarrow 0.8 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 8.11$.

Παράδειγμα 8 (Δ.ε. για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ σε μη-ανεξάρτητα δείγματα, Δειγματοληψία από κανονική κατανομή)

Στα προηγούμενα υποθέσαμε ότι τα τ.δ. $\{X_i\}$ και $\{Y_i\}$ προέρχονταν από δύο ανεξάρτητους κανονικούς πληθυσμούς.

Έστω ότι $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ είναι τ.δ. από μία διδιάστατη κανονική κατανομή με άγνωστες παραμέτρους $\mu_1 = E[X]$, $\mu_2 = E[Y]$, $\sigma_1^2 = var(X)$, $\sigma_2^2 = var(Y)$ και

$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_1 \sigma_2}$ (συντελεστής συσχέτισης των τ.μ. X, Y)

Λόγω έλλειψης ανεξαρτησίας μεταξύ των δειγμάτων δεν μπορεί να οριστεί δ.ε. για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$. Γι' αυτό το

λόγω χρησιμοποιούμε τις διαφορές $D_i = X_i - Y_i$, $i=1,\dots,n$.
Τότε $D_1, D_2, \dots, D_n$ είναι ένα τ.δ. από κανονικό πληθυσμό
με μέση τιμή $\mu_1-\mu_2$ και διακύμανση $\sigma_D^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\,\sigma_1\sigma_2$.
Αντιστρεπτή ποσότητα είναι η $\dfrac{\overline{D}-(\mu_1-\mu_2)}{S_D/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$,

όπου $S_D^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(D_i-\overline{D})^2}{n-1}$

Εφαρμόζοντας τη γνωστή τεχνική προκύπτει το ακόλουθο δ.ε. για τη διαφορά $\mu_1-\mu_2$: $\left(\overline{D}-t_{n-1;\alpha/2}\dfrac{S_D}{\sqrt{n}},\ \overline{D}+t_{n-1;\alpha/2}\dfrac{S_D}{\sqrt{n}}\right)$

<u>Παράδειγμα 9</u> Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό
με κατανομή $f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.
Να βρεθεί ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ.

<u>Λύση</u>

Είναι $L(\theta/\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} = e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}$, όπου $L(\theta/\underset{\sim}{x})$
η συνάρτηση πιθανοφάνειας για την παράμετρο θ. Η πιθανοφάνεια $L(\theta/\underset{\sim}{x})$ γίνεται μέγιστη ως προς θ, όταν η
τιμή της παραμέτρου θ γίνει μέγιστη. Όμως $\theta \leq x_i$, $i=1,\dots,n$
Άρα $\theta \leq x_{(1)} = \min\{x_1,\dots,x_n\}$ που σημαίνει ότι η μέγιστη
τιμή της θ είναι η $X_{(1)}$ δηλ. $\hat{\theta} = X_{(1)} = \min\{X_1,\dots,X_n\}$.
Η κατανομή της τ.μ. $Y = X_{(1)}$ είναι $f_Y(y) = ne^{-n(y-\theta)}$, $y \geq \theta$.

γιατί $f_{X_{(1)}}(y) = n\left(1-F_X(y)\right)^{n-1} f_X(y)$ (το έχουμε δείξει)

$$= n\, e^{-(y-\theta)}\left[1-\overset{*}{(}1-e^{-(y-\theta)})\right]^{n-1}$$

$$= n e^{-(y-\theta)}\left[e^{-(y-\theta)}\right]^{n-1}$$

$$^{*}\ F_X(x) = \int_\theta^x e^{-(w-\theta)}\,dw = -\int_\theta^x e^{-(w-\theta)}\,d[-(w-\theta)]$$

$= \left[-e^{-(w-\theta)} \right]_{\theta}^{x} = -e^{-(x-\theta)} + e^{-(\theta-\theta)} = 1 - e^{-(x-\theta)}$ -61-

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $\frac{Z}{2} = n(Y-\theta) \Rightarrow$

$\Rightarrow Z = 2n(Y-\theta) \Rightarrow Z = 2nY - 2n\theta \Rightarrow Y = \frac{Z+2n\theta}{2n}$

Άρα $f_Z(z) = f_Y(y)\frac{dy}{dz} = f_Y\left(\frac{z}{2n}+\theta\right)\frac{dy}{dz}$

$= n e^{-n\left(\frac{z}{2n}+\cancel{\theta}-\cancel{\theta}\right)} \frac{1}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, \; z \geq 0$ (ανεξάρτητη του θ)

$\Rightarrow Z \sim \mathcal{X}_2^2$.

Άρα το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. δίνεται από τη σχέση:

$P(z_1 \leq 2n(X_{(1)}-\theta) \leq z_2) = 1-\alpha$

$\Rightarrow P\left(X_{(1)} - \frac{z_2}{2n} \leq \theta \leq X_{(1)} - \frac{z_1}{2n}\right) = 1-\alpha$

Το μήκος του δ.ε είναι $\ell = \frac{1}{2n}(z_2 - z_1)$

$P(z_1 \leq 2n(X_{(1)}-\theta) \leq z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}dz = e^{-\frac{z_1}{2}} - e^{-\frac{z_2}{2}} = 1-\alpha$

(διότι $\int \frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}dz = -e^{-\frac{z}{2}}$)

Έχουμε $\left.\begin{array}{l} \frac{d\ell}{dz_1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{dz_2}{dz_1} - 1\right) \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{z_1}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{z_2}{2}}\frac{dz_2}{dz_1} = 0 \Rightarrow \frac{dz_2}{dz_1} = e^{\frac{z_2-z_1}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d\ell}{dz_1} = \frac{1}{2n}\left(e^{\frac{z_2-z_1}{2}} - 1\right)$. Όμως $e^{\frac{z_2-z_1}{2}} > 1$ αφού $z_2 > z_1$

Συνεπώς $\frac{d\ell}{dz_1} > 0 \Rightarrow \ell$ αύξουσα και συνεπώς γίνεται

ελάχιστη για $z_1 = 0$ άρα αφού $e^{-\frac{z_1}{2}} - e^{-\frac{z_2}{2}} = 1-\alpha$

$\Leftrightarrow e^0 - e^{-\frac{z_2}{2}} = 1-\alpha \Rightarrow -e^{-\frac{z_2}{2}} = -\alpha \Rightarrow e^{-\frac{z_2}{2}} = \alpha \Rightarrow \boxed{z_2 = -2\ln\alpha}$

Συνεπώς, το δ.ε. είναι

$$\left(X_{(1)} + \frac{2\ln a}{2n}, X_{(1)} - \frac{0}{2n}\right) \Rightarrow \left(X_{(1)} + \frac{\ln a}{n}, X_{(1)}\right).$$

<u>Αριθμητική Εφαρμογή</u> Για ένα δείγμα μεγέθους $n=10$ με $x_{(1)}=2$ το ελαχίστου μήκους 95% δ.ε για την άγνωστη παράμετρο θ είναι: $\left(2+\frac{\ln 0.05}{10}, 2\right) = (1.7, 2)$.

<u>Παράδειγμα 10</u> Με τη βοήθεια τ.δ. $\underset{\sim}{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ από κατανομή Gamma(r,θ), $r\in\mathbb{N}$, $\theta>0$, να βρεθεί ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την άγνωστη παράμετρο θ.

<u>Λύση</u> Η στ.σ. $T(\underset{\sim}{X})=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Gamma(nr,θ) και είναι επαρκής για την θ (βλέπε ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι). Σύμφωνα με την Άσκηση 7 του $1^{ου}$ Κεφαλαίου, η συνάρτηση $g(\underset{\sim}{x};\theta)=2\theta\sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί χ^2_{2rn} άρα είναι αντιστρεπτή και το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ, θα δίνεται από τη σχέση $P\left(z_1 \le 2\theta\sum_{i=1}^{n} X_i \le z_2\right)=1-\alpha$ με $z_1=\chi^2_{2rn;1-\alpha/2}$ και $z_2=\chi^2_{2rn;\alpha/2}$. Άρα το ζητούμενο δ.ε. θα είναι

$$\left(\frac{\chi^2_{2rn;1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}, \frac{\chi^2_{2rn;\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)$$

<u>Θεώρημα 9</u> Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τ.δ. από τ.μ. X με σ.κ. $F(x;\theta)$, συνεχή, αυστηρά αύξουσα με συνάρτηση πυκνότητας $f(x;\theta)=\frac{\partial F(x;\theta)}{\partial x}$. Αν θέσουμε $Z_n(\theta)=-2\sum_{i=1}^{n}\ln F(x_i;\theta)$, η τ.μ. $Z_n(\theta)$ ακολουθεί χ^2_{2n} και το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. υπολογίζεται από τη σχέση:

$P(z_1 \le Z_n(\theta) \le z_2) = 1-\alpha$, όπου $z_1 = \chi^2_{2n;1-\alpha/2}$, $z_2 = \chi^2_{2n;\alpha/2}$.

Απόδειξη: Η τ.μ. $Y = F(x;\theta)$ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$ διότι: $F_Y(y) = P[Y \le y] = P[F(x;\theta) \le y]$
$= P[X \le F^{-1}(y)] = F[F^{-1}(y)] = y \Rightarrow f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = 1.$

Η τ.μ. $Z_1(\theta) = -2\ln F(x;\theta) \sim Gamma(1, 1/2)$ δηλ. χ^2_2 *

διότι $P(Z_1(\theta) \le z) = P(-2\ln F(x;\theta) \le z)$
$= P\left(\ln F(x;\theta) \ge -\frac{z}{2}\right) = P\left(F(x;\theta) \ge e^{-\frac{z}{2}}\right)$
$= 1 - P\left(F(x;\theta) \le e^{-\frac{z}{2}}\right) = 1 - e^{-\frac{z}{2}} = F_{Z_1}(z)$

* $Gamma(a,\beta): \frac{\beta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\beta x}$ $\Rightarrow F'_{Z_1}(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} = f_{Z_1}(z)$

$Gamma(1,\frac{1}{2}): \frac{1/2}{\Gamma(1)} x^0 e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$

$\chi^2_n: \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow \chi^2_2: \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$

$\Rightarrow Gamma(1,\frac{1}{2}) \equiv \chi^2_2$

$F_{Z_1}(z) = \int_0^x \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} dz = \left[-e^{-\frac{1}{2}z}\right]_0^x = e^0 - e^{-\frac{1}{2}x}$
$= 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$

Η τ.μ. $Z_n(\theta) = -2\ln F(\underset{\sim}{x};\theta) = -2\ln \prod_{i=1}^{n} F(x_i;\theta)$
$= -2\sum_{i=1}^{n} \ln F(x_i;\theta) \sim Gamma(n,\frac{1}{2}) \equiv \chi^2_{2n}$.

Παρατηρούμε ότι τόσο η $Z_1(\theta)$ όσο και η $Z_n(\theta)$ έχουν κατανομή ανεξάρτητη του θ, συνεπώς

$$P\left(z_1 \leq -2\sum_{i=1}^{n} \ln F(x_i;\theta) \leq z_2\right) = 1-\alpha.$$

Τα z_1, z_2 μπορούν να προσδιοριστούν από τη σχέση

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2^n \Gamma(n)} z^{n-1} e^{-\frac{z}{2}} dz = 1-\alpha$$ ή με τη βοήθεια

πινάκων από τις σχέσεις $z_1 = \chi^2_{2n;1-\alpha/2}$, $z_2 = \chi^2_{2n;\alpha/2}$.

<u>Παράδειγμα 11</u> Έστω $\underset{\sim}{\mathbf{X}} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τ.δ. από την Ομοιόμορφη κατανομή $U(0,\theta^2)$. Να βρεθεί ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την άγνωστη παράμετρο θ.

<u>Λύση</u> Η συνάρτηση κατανομής της ομοιόμορφης $U(0,\theta^2)$ είναι συνεχής και αυστηρά αύξουσα και δίνεται από τον τύπο: $F(x;\theta) = \int_0^x \frac{1}{\theta^2} dx = \frac{x}{\theta^2}$

Θεωρούμε την τ.μ. $Z_n(\theta) = -2\sum_{i=1}^{n} \ln F(x_i;\theta)$

$= -2\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{x_i}{\theta^2}$ η οποία σύμφωνα με το Θεώρημα 9 ακολουθεί χ^2_{2n}. Άρα το ζητούμενο δ.ε. υπολογίζεται από τον τύπο: $P\left(z_1 \leq -2\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{X_i}{\theta^2} \leq z_2\right) = 1-\alpha$

$$\Rightarrow P\left(z_1 + 2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \leq 2n \ln \theta^2 \leq z_2 + 2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\exp\left\{\frac{1}{4n}\left(z_1 + 2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i\right)\right\} \leq \theta \leq \exp\left\{\frac{1}{4n}\left(z_2 + 2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i\right)\right\}\right)$$

$= 1-\alpha$, όπου $z_1 = \chi^2_{2n;1-\alpha/2}$, $z_2 = \chi^2_{2n;\alpha/2}$

Τελικά, έχουμε

$$\left(e^{\frac{1}{4n}\left\{\chi^2_{2n;1-\alpha/2} + 2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i\right\}},\ e^{\frac{1}{4n}\left\{\chi^2_{2n;\alpha/2} + 2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i\right\}}\right)$$

Παράδειγμα 12 Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ τ.δ. από πληθυσμό με κατανομή Beta$(\theta,1)$. Να βρεθεί ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ.

Λύση

Είναι $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

$F(x;\theta)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^{\theta}, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$ και η αντίστρεπτή ποσότητα

είναι $Z_n(\theta)=-2\sum_{i=1}^{n}\ln F(x_i;\theta)=-2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^{\theta}$

$=-2\theta\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$. Άρα $P\left(a_1\le -2\theta\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\le a_2\right)=1-\alpha$

$\left(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i<0\right)$
$\Longleftrightarrow$ $$P\left(-\frac{a_1}{2\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}\le\theta\le\frac{a_2}{2\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}\right)=1-\alpha$$

όπου $a_1=\chi^2_{2n;1-\alpha/2}$, $a_2=\chi^2_{2n;\alpha/2}$. ⊠

Ασυμπτωτικά δ.ε. Η κατασκευή δ.ε. που ήδη έχουμε περιγράψει αφορούσαν τις παραμέτρους συνεχών κατανομών. Για τις παραμέτρους των διακριτών κατανομών, τα δ.ε. βρίσκονται όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο, δηλαδή υπολογίζονται ασυμπτωτικά. Η κατασκευή τους στηρίζεται στα παρακάτω Θεωρήματα.

Θεώρημα 10 Αν η στ.σ. $\overline{X}$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της παραμέτρου θ, τότε το $100(1-\alpha)\%$ ασυμπτωτικό δ.ε. για την άγνωστη παράμετρο θ, δίνεται από τη σχέση:
$$P\left(-z_{\alpha/2}\le\frac{(\overline{X}-\theta)\sqrt{n}}{s'}\le z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

όπου $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

Απόδειξη Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $E[X_i]=\mu$ και $var(X_i)=\sigma^2$, $i=1,2,\dots,n$ τότε:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \xrightarrow{d} N(0,1).$$ Αν $E[X]=\theta$, τότε

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\theta)}{S} \xrightarrow{d} N(0,1),$$ δηλαδή όταν $n\to\infty$ η συνάρτηση $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\theta)}{S}$ είναι αντιστρεπτή και το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ δίνεται: $P\left(z_1 \le \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\theta)}{S} \le z_2\right)=1-\alpha$ όπου, κατά τα γνωστά, $z_1=-z_{\alpha/2}$, $z_2=z_{\alpha/2}$. Συνεπώς, το $100(1-\alpha)\%$ ασυμπτωτικό δ.ε. για την παράμετρο θ είναι:

$$\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$ $\boxtimes$

Παράδειγμα 13 Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από κατανομή Bernoulli$(\theta) \equiv Bin(1,\theta)$. Να υπολογισθεί το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την άγνωστη παράμετρο θ, όταν $n \ge 30$.

Λύση Η στ.σ. $\bar{X}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου θ, συνεπώς σύμφωνα με το Θεώρημα 10, το $100(1-\alpha)\%$ ασυμπτωτικό δ.ε. για την παράμετρο θ είναι:

$$\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right),$$ όπου $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2$ $=\bar{X}-\bar{X}^2$ διότι $X_i^2=X_i$ αφού $X_i=0,1, i=1,\dots,n$

Άρα, τελικά, το δ.ε. είναι:

$$\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right).$$

Θεώρημα 11 (Γενική μέθοδος κατασκευής ασυμπτωτικών δ.ε.) Έστω $f(x;\theta)$, $\theta\in\Theta$ η συνάρτηση πιθανότητας μιας τ.μ. X και $\underset{\sim}{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ ένα τ.δ. από αυτήν. Έστω $\hat{\theta}_n$ μία ακολουθία λύσεων της εξίσωσης πιθανοφάνειας που συγκλίνει στην πραγματική τιμή της παραμέτρου θ_0. Έστω επίσης ότι ισχύουν οι συνθήκες κανονικότητας σύμφωνα με τις οποίες:
(i)-(iv)

Αν X τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας $f(x;\theta)$, $\theta\in\Theta$, και $\underset{\sim}{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ τ.δ. από την παραπάνω τ.μ. τότε:

(i) Για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ υπάρχουν οι παράγωγοι

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta),\ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x;\theta),\ \frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\ln f(x;\theta),\ \theta\in\Theta.$$

(ii) Υπάρχει μία συνάρτηση $G:\mathbb{R}\mapsto(0,\infty)$ τ.ω. $\forall\,\theta\in\Theta$

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\ln f(x;\theta)\right| < G(x) \text{ και } E_\theta[G(X)]<M,\ M<\infty$$

και M ανεξάρτητο του θ.

(iii) $E_\theta\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)=0,\ \forall\theta\in\Theta$

(iv) $0<I(\theta)<\infty\ \forall\theta\in\Theta$,

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right)=-E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2=-I(\theta),$$

$\forall\,\theta\in\Theta$, όπου $I(\theta)=E\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2$ είναι ο πληροφοριακός αριθμός Fisher. (Ο Fisher ονόμασε το $I(\theta)$ "πληροφορία" που παρέχει η τ.μ. X για την παράμετρο θ).

Τότε το $100(1-\alpha)\%$ ασυμπτωτικό διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ_0 δίνεται από τον τύπο:

$$\left[\hat{\theta}_n \pm \frac{z_{\alpha/2}}{\frac{\partial}{\partial\theta} g_n(X,\hat{\theta}_n)}\right], \text{ όπου } g_n(x;\theta) = \frac{\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\underset{\sim}{x};\theta)}{\sqrt{n E_{\theta_0}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right)^2}}$$

<u>Παράδειγμα 14</u> Να βρεθεί $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ της Poisson(θ).

<u>Λύση</u> Η συνάρτηση πιθανότητας της Poisson(θ) είναι:

$f(x;\theta) = e^{-\theta}\dfrac{\theta^x}{x!}$ και η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\underset{\sim}{x};\theta) = e^{-n\theta}\frac{\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \Rightarrow \ln L(\underset{\sim}{x};\theta) = -n\theta + \sum_{i=1}^n x_i \ln\theta - \ln\prod_{i=1}^n x_i!$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\underset{\sim}{x};\theta) = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}$$

$$\ln f(x;\theta) = -\theta + x\ln\theta - \ln x!$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(-\theta + x\ln\theta - \ln x!) = -1 + \frac{x}{\theta} = \frac{x-\theta}{\theta}$$

$$E_{\theta_0}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right)^2 = E_{\theta_0}\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right)^2 = \sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right)^2 e^{-\theta_0}\frac{\theta_0^x}{x!}$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\left[\sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\theta_0}\frac{\theta_0^x}{x!} - 2\theta\sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\theta_0}\frac{\theta_0^x}{x!} + \theta^2 e^{-\theta_0}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\theta_0^x}{x!}\right]$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\left[E[X^2] - 2\theta E[X] + \theta^2 e^{-\theta_0}e^{\theta_0}\right]$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\left(\theta_0 + \theta_0^2 - 2\theta\theta_0 + \theta^2\right) = \frac{1}{\theta^2}\left((\theta-\theta_0)^2 + \theta_0\right)$$

$$= \frac{(\theta-\theta_0)^2 + \theta_0}{\theta}.$$

Άρα, $$g_n(x;\theta) = \frac{\dfrac{-n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}}{\sqrt{n\dfrac{(\theta-\theta_0)^2+\theta_0}{\theta^2}}} = \frac{-n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt{n[(\theta-\theta_0)^2+\theta_0]}}$$

$$= \frac{n(-\theta+\bar{x})}{\sqrt{n}\sqrt{(\theta-\theta_0)^2+\theta_0}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta)}{\sqrt{(\theta-\theta_0)^2+\theta_0}}$$

Άρα $$\frac{\partial g_n(x;\theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\bar{x}}{n}}}$$, μετά από πράξεις.

Άρα, **το 100(1-α)% ασυμπτωτικό** δ.ε για την παράμετρο θ είναι, σύμφωνα με το Θεώρημα 11, είναι:

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}$$

Σημείωση: **Οι** συνθήκες κανονικότητας ισχύουν για τ.δ. από Poisson(θ). (βλέπε ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι).

Μέγεθος Δείγματος Το μέγεθος του δείγματος παίζει πολύ σπουδαίο ρόλο στην "ποιότητα" των εκτιμητών. Υπάρχουν περιπτώσεις που ο ερευνητής είναι αναγκασμένος να βγάλει συμπεράσματα από ένα συγκεκριμένο αριθμό παρατηρήσεων είτε λόγω προκαθορισμένου κόστους, είτε διότι δεν υπάρχουν πολλές παρατηρήσεις (π.χ. στις περιπτώσεις σπάνιων ασθενειών). Στις περιπτώσεις όμως που η κυρίαρχη απαίτηση της έρευνας είναι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων, υπάρχουν μέθοδοι που επιτρέπουν τον υπολογισμό της ελάχιστης τιμής του μεγέθους του δείγματος σύμφωνα με κάποια στατιστικά κριτήρια.

Θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό του μεγέθους του δείγματος για δεδομένο μήκος δ.ε.

<u>Παράδειγμα 15</u> Με τη βοήθεια τ.δ. $\underset{\sim}{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ από κανονική κατανομή $N(\theta, \sigma^2)$ να υπολογισθεί το μέγεθος του δείγματος n, το οποίο θα εξασφαλίζει στο $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ ελάχιστο μήκος ℓ.

<u>Λύση</u>(a) Σύμφωνα με το Παράδειγμα 4, το δ.ε. είναι:

$$\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$ (όταν σ^2 γνωστό) Το μήκος ℓ είναι:

$$\ell = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\ell}$$

Το ℓ_{min} επιτυγχάνεται όταν $n=\left[2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\ell}\right]^2$, όπου με $[a]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του a.

(β) Ομοίως αν σ^2 άγνωστο το ℓ_{min} επιτυγχάνεται

όταν $n=\left[2t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\ell}\right]^2$

Παρατηρούμε ότι το μέγεθος του δείγματος n, εξαρτάται από την ποσότητα $t_{n-1;\alpha/2}$ η οποία δεν μπορεί να υπολογισθεί χωρίς να γνωρίζουμε το n. Σ' αυτές τις περιπτώσεις υποθέτουμε ότι $n\geq 30$ οπότε $t_{n-1;\alpha/2}=z_{\alpha/2}$. Αν όμως $n<30$ για να παρακαμφθεί αυτό το πρόβλημα ο υπολογισμός του n γίνεται με τη διαδικασία της διπλής ή δισταδιακής δειγματοληψίας του Stein ως εξής:

Θεωρούμε ένα τ.δ. μεγέθους n_0 και υπολογίζουμε τη μέση τιμή $\overline{X}_0 = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} X_i$ και τη δειγματική διασπορά $S_0'^2 = \frac{1}{n_0-1} \sum_{i=1}^{n_0} (X_i - \overline{X}_0)^2$. Η τ.μ. $\frac{(\overline{X}-\theta)\sqrt{n}}{S_0'}$, όπου $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim t_{n_0-1}$, άρα είναι αντιστρεπτή συνάρτηση και το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ δίνεται από τη σχέση

$$P\left(-t_{n_0-1;\alpha/2} < \frac{(\overline{X}-\theta)\sqrt{n}}{S_0'} < t_{n_0-1;\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Συνεπώς το μήκος ℓ αυτού του δ.ε. είναι

$\ell = 2\, t_{n_0-1;\alpha/2} \frac{S_0'}{\sqrt{n}}$ και το μέγεθος του δείγματος θα είναι: $n = \max\left\{ n_0, \left[\left(2\, t_{n_0-1;\alpha/2} \frac{S_0'}{\ell}\right)^2\right] \right\}$.

<u>Παράδειγμα 16</u> Ποιο θα πρέπει να είναι το μέγεθος του τυχαίου δείγματος ώστε το 95% δ.ε. για την άγνωστη μέση τιμή θ μίας κανονικής κατανομής $N(\theta, \sigma^2)$ σ^2 = άγνωστο, να έχει μήκος 0.8;

<u>Λύση</u> Ένα προκαταρκτικό δείγμα μεγέθους $n_0 = 5$ έδωσε δειγματική διασπορά $S_0'^2 = 0.64$. Το μέγεθος του τ.δ. δίνεται από τον τύπο:

$$n = \max\left\{ n_0, \left[\left(2\, t_{n_0-1;\frac{\alpha}{2}} \frac{S_0'}{\ell}\right)^2\right] \right\}$$

Εδώ έχουμε $n_0 = 5$, $\ell = 0.8$, $S_0' = 0.8$, $t_{n_0-1;\frac{\alpha}{2}} = 2.776$

$\left(2\, t_{n_0-1;\frac{\alpha}{2}} \frac{S_0'}{\ell}\right)^2 = 31$. Άρα <u>$n = 31$</u>.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Ο Έλεγχος Υποθέσεων αποτελεί ένα βασικό πεδίο της Μαθηματικής Στατιστικής. Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1. Έστω $X \sim N(\theta, 100)$. Η τ.μ. X μπορεί να εκφράζει το score ενός test το οποίο θεωρούμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή θ και διασπορά ίση με 100. Υποθέτουμε ότι προηγούμενη εμπειρία αναφορικά με το συγκεκριμένο πείραμα τύχης καταδεικνύει ότι $\theta=75$. Υποθέτουμε επίσης ότι λόγω κάποιων ενδείξεων υποπτευόμαστε ότι η τιμή $\theta=75$ δεν ισχύει πια αλλά φαίνεται να ισχύει ότι $\theta>75$. Δεν ξέρουμε όμως ακόμα αν αυτό ισχύει. Συνεπώς, η υπόθεση $\theta>75$ αποτελεί μία εικασία ή μία στατιστική υπόθεση. Επειδή όμως η στατιστική υπόθεση $\theta>75$ μπορεί να είναι λανθασμένη επιτρέπουμε τη δυνατότητα $\theta \leq 75$. Άρα, στην πραγματικότητα υπάρχουν δύο στατιστικές υποθέσεις. Πρώτη είναι η υπόθεση ότι η άγνωστη παράμετρος είναι $\theta \leq 75$ δηλαδή ότι δεν πραγματοποιήθηκε αύξηση στην παράμετρο θ. Δεύτερη είναι η υπόθεση ότι η άγνωστη παράμετρος είναι $\theta>75$. Ο παραμετρικός χώρος είναι $\Theta=\{\theta: -\infty<\theta<\infty\}$. Σημειώνουμε ότι η πρώτη από τις δύο υποθέσεις συμβολίζεται με $H_0: \theta \leq 75$ και η δεύτερη με $H_1: \theta>75$. Εφόσον οι τιμές $\theta>75$ είναι εναλλακτικές εκείνων όπου $\theta \leq 75$, η υπόθεση $H_1: \theta>75$ καλείται εναλλακτική υπόθεση. Εντελώς ανάλογα η H_0 μπορεί να θεωρηθεί ως εναλλακτική της H_1). Η "εικασία" ότι $\theta>75$ η οποία είναι αποτέλεσμα κάποιας έρευνας ("υποψίας") εκλαμβάνεται ως η εναλλακτική υπόθεση H_1. Σε κάθε περίπτωση το πρόβλημα είναι να αποφασίσουμε ποια από τις δύο υποθέσεις μπορεί να γίνει αποδεκτή. Για να πάρουμε μία απόφαση, το τυχαίο πείραμα επαναλαμβάνεται n ανεξάρτητες φορές (γίνονται n δοκιμές) και καταγράφονται τα αποτελέσματα. Με άλλα λόγια, θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$ από την κατανομή $N(\theta, 100)$ και προσπαθούμε να βρούμε έναν κανόνα βάσει του οποίου θα πάρουμε μία απόφαση όταν οι τιμές του πειράματος $x_1, x_2, \dots, x_n$ έχουν καθορισθεί δηλαδή αφού πραγματοποιηθεί το πείραμα n ανεξάρτητες φορές.

Ένας τέτοιος κανόνας καλείται test (δοκιμασία) της υπόθεσης $H_0: \theta \leq 75$ έναντι της εναλλακτικής $H_1: \theta > 75$. Δεν υπάρχει κάποιο όριο στο πλήθος των κανόνων (ή tests) που μπορούν να κατασκευαστούν. Θα θεωρήσουμε τρία τέτοια tests. Τα tests θα κατασκευαστούν κάτω από την επόμενη παραδοχή. Θα διαμερίσουμε το δειγματικό χώρο $\mathcal{A}$ σε ένα υποσύνολο C και ένα υποσύνολο C^* συμπληρωματικό του C. Εάν οι πειραματικές τιμές των $X_1, X_2, \dots, X_n$, έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι τέτοιες ώστε το σημείο $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C$ θα απορρίψουμε την H_0 και θα δεχτούμε την $H_1: \theta > 75$. Εάν έχουμε $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^*$ θα δεχτούμε την $H_0: \theta \leq 75$ και θα απορρίψουμε την $H_1: \theta > 75$.

Test 1 (Δοκιμασία 1) Έστω $n = 25$ και ο δειγματικός χώρος $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο: $\{(x_1, \dots, x_{25}); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 25\}$.
Έστω C ένα υποσύνολο του $\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε:

$$C = \{(x_1, x_2, \dots, x_{25}); x_1 + x_2 + \dots + x_{25} > 25 \cdot 75\}$$

Θα απορρίψουμε την H_0 αν οι 25 τιμές του πειράματος τύχης είναι τέτοιες ώστε $(x_1, x_2, \dots, x_{25}) \in C$. Εάν $(x_1, \dots, x_{25}) \notin C$ θα αποδεχτούμε την H_0. Αυτό το υποσύνολο του $\mathcal{A}$ το οποίο οδηγεί στην απόρριψη της $H_0: \theta \le 75$ καλείται <u>κρίσιμη</u> <u>περιοχή</u> της δοκιμασίας 1.

Είναι $\sum_{i=1}^{25} x_i > 25 \cdot 75$ μόνο εφόσον $\bar{x} > 75$. Συνεπώς, είναι πιο βολικό να λέμε ότι θα απορρίψουμε την $H_0: \theta \le 75$ και θα δεχτούμε την $H_1: \theta > 75$ αν και μόνο αν (ανν) $\bar{x} \ge 75$. Εάν $\bar{x} \le 75$ δεχόμαστε την υπόθεση $H_0: \theta \le 75$.

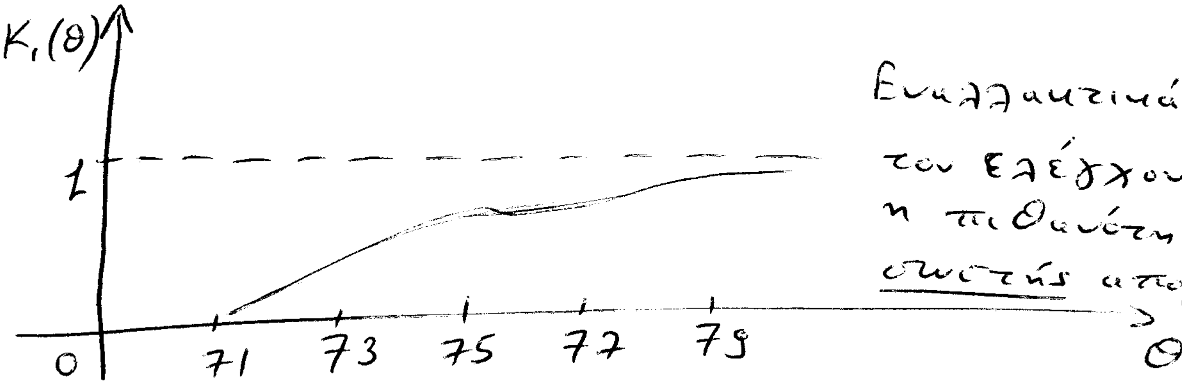
Το test που κατασκευάσαμε συνίσταται στο εξής:

Θα απορρίψουμε την $H_0: \theta \le 75$ αν ο δειγματικός μέσος υπερβαίνει τη μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή του μέσου θ της κατανομής $N(\theta, 100)$ κάτω από την H_0.

Θα βοηθούσε να κατασκευάσουμε ένα test μίας στατιστικής υπόθεσης για να καθορίσουμε την κρίσιμη περιοχή C εάν γνωρίζαμε την πιθανότητα απόρριψης της υπόθεσης H_0 και συνεπώς την πιθανότητα αποδοχής της εναλλακτικής H_1. Στο test 1 αυτό σημαίνει ότι πρέπει ή χρειάζεται να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P\{(x_1, \ldots, x_{25}) \in C\} = P\{\bar{x} > 75\}$. Προφανώς, αυτή η πιθανότητα είναι μία συνάρτηση της παραμέτρου θ και θα τη συμβολίσουμε $K_1(\theta)$. Η συνάρτηση $K_1(\theta) = P\{\bar{x} > 75\}$ καλείται ελεγχοσυνάρτηση του test 1 ενώ η τιμή της για μία συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου ονομάζεται ισχύς (power) του test σ' αυτή την τιμή της παραμέτρου. Επειδή $\bar{x} \sim N(\theta, 4)$ έχουμε:

$$K_1(\theta) = P\left\{\frac{\bar{x}-\theta}{2} > \frac{75-\theta}{2}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{75-\theta}{2}\right),$$ όπου

$\Phi(x)$ η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$. Από τους πίνακες της $N(0,1)$ βρίσκουμε ότι η <u>ισχύς</u> του test στο $\theta = 75$ είναι $K_1(75) = 0.5$. Η ισχύς στο $\theta = 73$ θα είναι $K_1(73) \cong 0.15$ και $K_1(77) = 0.841$ ενώ $K_1(79) = 0.977$. Η γ.π. της $K_1(\theta)$ στο test 1 είναι:



Εναλλακτικά: Ισχύς του ελέγχου είναι η πιθανότητα σωστής απόρριψης της H_0.

Μεταξύ άλλων αυτό σημαίνει ότι αν $\theta=75$, η πιθανότητα απόρριψης της $H_0: \theta \leq 75$ είναι $1/2$. Δηλ. αν $\theta=75$ και συνεπώς η H_0 είναι αληθής, η πιθανότητα απόρριψης αυτής της σωστής υπόθεσης είναι $1/2$. Πολλοί ερευνητές και Στατιστικοί δεν θεωρούν καθόλου ελκυστικό να υπάρχει τόσο ψηλή πιθανότητα όπως το $1/2$ σε ένα τέτοιου είδους λάθος δηλ. την απόρριψη της H_0 ενώ αυτή είναι αληθής. Συνεπώς, το test 1 δεν αποδεικνύεται και τόσο ικανοποιητικό. Άρα, θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε ένα άλλο test χωρίς αυτό το πρόβλημα. Θα προσπαθήσουμε να το πετύχουμε αυτό κάνοντας πιο δύσκολη την απόρριψη της H_0 με την ελπίδα ότι αυτό θα δώσει μία μικρότερη πιθανότητα απόρριψης της H_0, ενώ αυτή είναι αληθής.

Test 2 (Δοκιμασία 2) Θα απορρίψουμε την υπόθεση $H_0: \theta \leq 75$ και θα δεχτούμε την υπόθεση $H_1: \theta > 75$ ανν $\bar{X} > 78$. Η κρίσιμη περιοχή διαμορφώνεται ως εξής: $C=\{(x_1,\dots,x_{25});\ x_1+\dots+x_{25} > 25\cdot 78\}$. Η ελεγχοσυνάρτηση του test 2 αφού $\bar{X} \sim N(\theta,4)$ είναι η

$K_2(\theta)=P(\bar{X}>78)=1-\Phi\left(\frac{78-\theta}{2}\right)$. Από τους πίνακες της $N(0,1)$ παίρνουμε: $K_2(73)=0.006$, $K_2(75)=0.067$, $K_2(77)=0.309$, $K_2(79)=0.691$. Δηλαδή, αν $\theta=75$, η πιθανότητα απόρριψης της $H_0: \theta \leq 75$ είναι 0.067. Η πιθανότητα αυτή βεβαίως είναι πολύ πιο ελκυστική από την αντίστοιχη πιθανότητα $1/2$ του test 1. Τώρα, αν η H_0 είναι ψευδής και έστω $\theta = 77$ η πιθανότητα απόρριψης της $H_0: \theta \leq 75$ και συνεπώς αποδοχής της $H_1: \theta > 75$ είναι <u>μόνο</u> 0.309. Συνεπώς ούτε το test 2 δεν είναι ικανοποιητικό από κάθε άποψη και άρα προχωράμε στο test 3 για να αντικρούσουμε τα άσχημα χαρακτηριστικά των tests 1 και 2.

Test 3 (Δοκιμασία 3) Πρωτίστως θα επιλέξουμε μία ελεγχοσυνάρτηση $K_3(\theta)$ με χαρακτηριστικά μικρή τιμή στο $\theta = 75$ και μεγάλη στο $\theta = 77$. Για παράδειγμα παίρνουμε $K_3(75) = 0.159$ και $K_3(77) = 0.841$. Για να καθορίσουμε ένα test με μία τέτοια ελεγχοσυνάρτηση θα απορρίψουμε την $H_0: \theta \leq 75$ ανν $\bar{X} \geq c$ όπου c σταθερά. Τότε η κρίσιμη περιοχή είναι $C = \{(x_1, \ldots, x_n);\, x_1 + \ldots + x_n \geq nc\}$. Σημειώνουμε ότι το μέγεθος του δείγματος n όπως και η σταθερά c δεν έχουν καθοριστεί ακόμη. Συνεπώς, αφού $\bar{X} \sim N\left(\theta, \frac{100}{n}\right)$ η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$K_3(\theta) = P(\bar{X} > c) = 1 - \Phi\left(\frac{c - \theta}{10/\sqrt{n}}\right).$$

Οι συνθήκες $K_3(75) = 0.159$ και $K_3(77) = 0.841$ απαιτούν:

$$1 - \Phi\left(\frac{c-75}{10/\sqrt{n}}\right) = 0.159, \quad 1 - \Phi\left(\frac{c-77}{10/\sqrt{n}}\right) = 0.841$$

Ισοδύναμα, από πίνακες, έχουμε:

$$\frac{c-75}{10/\sqrt{n}} = 1 \quad \text{και} \quad \frac{c-77}{10/\sqrt{n}} = -1.$$

Η λύση είναι $n = 100$ και $c = 76$.

Με αυτές τις τιμές των n και τ' άλλες τιμές της ελεγχοσυνάρτησης $K_3(\theta)$ του test 3 είναι $K_3(73)=0.001$ και $K_3(79)=0.999$. Παρατηρούμε ότι αν και το test 3 διαθέτει μία πολύ πιο ελκυστική ελεγχοσυνάρτηση από αυτές του test 1 και του test 2 ένα συγκεκριμένο τίμημα "πληρώνεται" και αυτό είναι το "μεγάλο" μέγεθος του δείγματος $n=100$ που απαιτείται στο test 3 ενώ αυτό ήταν $n=25$ στα δύο προηγούμενα tests.

<u>Ορισμός 1</u> Μία <u>στατιστική υπόθεση</u> είναι ένας ισχυρισμός που αφορά την κατανομή μιας ή περισσότερων τ.μ. Εάν η στατιστική υπόθεση καθορίζει την κατανομή καλείται <u>απλή</u> αλλιώς καλείται <u>σύνθετη</u>.

Στο παραπάνω παράδειγμα βλέπουμε ότι και οι δύο υποθέσεις $H_0: \theta \leq 75$ και $H_1: \theta > 75$ είναι <u>σύνθετες</u> αφού καμία από αυτές δεν καθορίζει την κατανομή. Εάν αντιθέτως είχαμε $H_0: \theta = 75$ αντί της $H_0: \theta \leq 75$ τότε η H_0 θα ήταν μία απλή στατιστική υπόθεση.
Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ένα τ.δ. από την κατανομή F που ανήκει σε μία γενική οικογένεια κατανομών $\mathcal{F}$. Ας θεωρήσουμε ακόμη δύο υπο-οικογένειες $\mathcal{F}_0$ και $\mathcal{F}_1$ της $\mathcal{F}$ τέτοιες ώστε $\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_1 = \emptyset$.

<u>Ορισμός 2</u> Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων είναι μία διαδικασία μέσα από την οποία αποφασίζουμε αν θα δεχτούμε ή θα απορρίψουμε τη <u>μηδενική υπόθεση</u> (null hypothesis) $H_0: F \in \mathcal{F}_0$ σε σχέση με την ενάντια ή την <u>εναλλακτική</u> υπόθεση (alternative hypothesis) $H_1: F \in \mathcal{F}_1$ με βάση τις τιμές του δείγματος.

Αν η οικογένεια F είναι μία παραμετρική οικογένεια $F=\{F(x;\theta):\underset{\sim}{\theta}\in\Theta\}$, δηλ. η κατανομή F έχει γνωστή συναρτησιακή μορφή η οποία εξαρτάται από μία παράμετρο $\underset{\sim}{\theta}$, τότε ο έλεγχος θα καλείται <u>παραμετρικός</u>. Στην αντίθετη περίπτωση ο έλεγχος θα καλείται μη-παραμετρικός ή απαραμετρικός (non-parametric). Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με <u>παραμετρικούς ελέγχους</u>.

Οι πιο απλοί έλεγχοι που υπάρχουν είναι οι λεγόμενοι μη-τυχαιοποιημένοι ή γνήσιοι έλεγχοι (non-randomized tests), όπου για κάθε τιμή $X_i=x_i$, $i=1,\dots,n$ των παρατηρήσεων του δείγματος λαμβάνεται μία από τις δύο αποφάσεις H_0 ή H_1. Έτσι ο δειγματικός χώρος $\mathcal{X}=\{\underset{\sim}{x}=(x_1,\dots,x_n)\}$ διαμερίζεται σε δύο περιοχές.

(α) Την περιοχή αποδοχής (acceptance region) C^* που περιέχει εκείνα τα δειγματικά σημεία για τα οποία γίνεται δεκτή η H_0 και

(β) Την κρίσιμη περιοχή (critical region) C ή περιοχή απόρριψης (rejection region) που περιέχει τα δειγματικά σημεία για τα οποία απορρίπτεται η H_0.

<u>Σημείωση:</u> Σε κάθε απόφαση διατρέχουμε δύο ειδών κινδύνους:

(α) $\mathcal{E}_1$: κίνδυνος ή σφάλμα πρώτου είδους που συνίσταται στην απόρριψη της H_0 ενώ είναι σωστή

(β) $\mathcal{E}_2$: κίνδυνος ή σφάλμα δεύτερου είδους που συνίσταται στην απόρριψη της H_1 ενώ είναι σωστή.

Οι διάφορες δυνατότητες φαίνονται στον πίνακα:

Απόφαση / Σωστή υπόθεση	H_0	H_1
H_0	Απόφαση σωστή	$\mathcal{E}_1$ (απορρίπτουμε κακώς την H_0)
H_1	$\mathcal{E}_2$ (δέχομαι κακώς την H_0)	Απόφαση σωστή

<u>Ορισμός 3</u> Η πιθανότητα του σφάλματος τύπου I ($\mathcal{E}_1$) καλείται μέγεθος σφάλματος τύπου I ή στάθμη σημαντικότητας (σ.σ.) του test και συμβολίζεται με α.

$$\alpha = P(\text{απόρριψη της } H_0 / H_0 \text{ αληθινή}) = P\{\underset{\sim}{X} \in C / H_0\}$$

για μη-τυχαιοποιημένους ελέγχους. Η πιθανότητα σφάλματος τύπου II ($\mathcal{E}_2$) καλείται μέγεθος σφάλματος τύπου II και συμβολίζεται με β.

$$\beta = P\{\text{απόρριψη της } H_1 / H_1 \text{ αληθινή}\} = P\{\underset{\sim}{X} \in C^* / H_1\}$$

για μη-τυχαιοποιημένους ελέγχους.

Η πιθανότητα $\gamma = 1-\beta$ καλείται ισχύς του ελέγχου (ή του test) και δίνει το <u>ποσοστό</u> <u>σωστών</u> <u>απορρίψεων</u> της υπόθεσης H_0.

Δηλαδή, $\gamma = P\{\underset{\sim}{X} \in C / H_1\} = P\left\{ \begin{matrix}\text{αποδοχή } H_1 \\ (\text{απόρριψη } H_0)\end{matrix} \Big/ \begin{matrix} H_1 \\ \text{αληθινή}\end{matrix} \right\}$

Αν θέσουμε: $\pi(\theta) = \begin{cases} \alpha(\theta) = P_\theta(\underset{\sim}{X} \in C), & \theta \in \underset{\sim}{\Theta}_0 \\ 1-\beta(\theta) = P_\theta(\underset{\sim}{X} \in C), & \theta \in \underset{\sim}{\Theta}_1 \end{cases}$

τότε η $\pi(\theta)$ είναι η πιθανότητα απόρριψης της H_0 για $\theta \in \underset{\sim}{\Theta}$. Ο περιορισμός της $\pi(\theta)$ στο σύνολο Θ_1 καλείται συνάρτηση <u>ισχύς</u> του <u>ελέγχου</u> (power function).

<u>Παράδειγμα</u> Ένα νόμισμα ρίπτεται 6 φορές και έστω $S' = \sum_{i=1}^{6} X_i$ ο αριθμός των γραμμάτων όπου

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η } i\text{-οστη ρίψη δίνει "Γράμματα"} \\ 0, & \text{αν η } i\text{-οστη ρίψη δίνει "κεφαλή"} \end{cases}$$

Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση: $H_0: p = 0.5$ έναντι της $H_1: p = 0.75$ σε επίπεδο σ.σ. $\alpha = 0.05$. Αποφασίζουμε να χρησιμοποιήσουμε την κρίσιμη περιοχή $C: S' > c'$ δηλαδή να απορρίπτωμε την H_0 αν ο αριθμός των "Γραμμάτων" είναι "πολύ μεγάλος". Το c' θα πρέπει να προσδιοριστεί από τη σχέση:

$$\alpha = P\{\underline{X} \in C / H_0\} = P\{S' > c' / H_0\} = P_{p=0.5}[S' > c'] = 0.05$$

Άρα $P_{p=0.5}[S' > c'] = \alpha = 0.05$

ή $0.05 = \sum_{k=c'+1}^{6} P_{p=0.5}[S' = k] = \sum_{k=c'+1}^{6} \binom{6}{k} (0.5)^k (0.5)^{6-k}$

$= (0.5)^6 \sum_{k=c'+1}^{6} \binom{6}{k}$ ($S' \sim Bin(n=6, p=0.5)$ κάτω από την H_0)

Για $c' = 5 \Rightarrow (0.5)^6 \sum_{k=6}^{6} \binom{6}{k} = (0.5)^6 = 0.016 < 0.05$

(δεχόμαστε H_0)

ενώ για $c' = 4$:

$(0.5)^6 \sum_{k=5}^{6} \binom{6}{k} = 6 \cdot (0.5)^6 + (0.5)^6 = 0.109 > 0.05$

(απορρίπτωμε H_0)

πράγμα που σημαίνει ότι έλεγχοι με κρίσιμη περιοχή της μορφής $C: S' > c'$ δεν μπορούν να πετύχουν ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$. Αν όμως θεωρήσουμε τον κανόνα:

(i) Αν $S' > 5$ απορρίπτωμε την H_0

(ii) Αν $S' < 5$ δεχόμαστε την H_0

(iii) Αν $S'=5$ δεχόμαστε την H_0 με πιθανότητα ίση με $\frac{19}{30}$.

Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση που συμβεί να έχουμε $S'=5$ κάνουμε το επόμενο πείραμα τύχης: Από μία κάλπη με 30 σφαιρίδια αριθμημένα με τους αριθμούς 1, 2, …, 30 εξάγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο. Αν η ένδειξή του είναι μικρότερη ή ίση του 19, δεχόμαστε την H_0 αν όχι την απορρίπτουμε.

Τότε θα έχουμε:

$$P[\text{σφάλμα τύπου I}] = P[\text{απόρριψης της } H_0 / p=0.5]$$

$$= P_{p=0.5}[S' > c'=5] + \left(1-\frac{19}{30}\right)\cdot P_{p=0.5}[S'=5]$$

$$= \frac{1}{2^6} + \frac{11}{30}\,\frac{6}{2^6} = \frac{1}{20} = 0.05$$

$$\left\{\begin{matrix} \kappa\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma \\ \Gamma\,\kappa\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma \\ \Gamma\,\Gamma\,\kappa\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma \\ \Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\kappa\,\Gamma\,\Gamma \\ \Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\kappa\,\Gamma \\ \Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\kappa \end{matrix}\right\}$$

δηλαδή ο κανόνας που ορίζεται από τα (i), (ii) και (iii) δίνει επίπεδο σημαντικότητας <u>ακριβώς</u> 0.05. ⊗

Το προηγούμενο παράδειγμα δείχνει την ανάγκη να θεωρήσουμε ελέγχους των οποίων οι αποφάσεις να λαμβάνονται με βάση κάποιο πείραμα τύχης. Τέτοιοι έλεγχοι θα λέγονται <u>μικτοί ή τυχαιοποιημένοι</u> έλεγχοι και θα καθορίζονται με χρήση μιας συνάρτησης: $\phi(\underline{x})=\phi(x_1,\dots,x_n)$ η οποία για συγκεκριμένες τιμές $X_i=x_i$ του δείγματος δίνει την πιθανότητα απόρριψης της H_0. Η συνάρτηση $\phi(\underline{x})$ θα λέγεται ελεγχοσυνάρτηση (ή κρίνουσα) (test function) για τον έλεγχο της H_0 έναντι της H_1. Επειδή η εύρεση της $\phi(\underline{x})$ καθορίζει πλήρως τη διαδικασία αποφάσεως για την αποδοχή

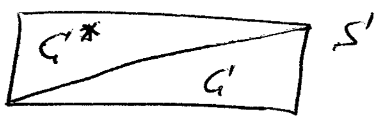
ή όχι της H_0, αντί να λέμε ο κανόνας αποφάσεως που καθορίζεται από τη $\phi(\underset{\sim}{x})$, θα λέμε απλώς ο "έλεγχος ϕ".
Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

<u>Ορισμός 4</u> Έστω μία συνάρτηση $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$. Αν η συνάρτηση ϕ αντιστοιχεί στο σημείο $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$ <u>μόνο</u> τις τιμές 0 ή 1, τότε η $\phi(\underset{\sim}{x})$ καλείται <u>γνήσια</u> ή μη-τυχαιοποιημένη ελεγχοσυνάρτηση, ενώ αν αντιστοιχεί κάποια πιθανότητα λέγεται <u>μικτή</u> ή <u>τυχαιοποιημένη ελεγχοσυνάρτηση</u>.

Η ελεγχοσυνάρτηση $\phi(\underset{\sim}{x})$ χωρίζει το δειγματικό χώρο S' σε δύο σύνολα C' και C^* τέτοια ώστε $C' \cup C^* = S'$. Το σύνολο C^* είναι η περιοχή αποδοχής της αρχικής υπόθεσης H_0 ενώ το σύνολο C' είναι η περιοχή απόρριψης της H_0 και καλείται <u>κρίσιμη</u> <u>περιοχή</u>.
Οι γνήσιες ελεγχοσυναρτήσεις είναι της μορφής:

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & \underset{\sim}{x} \in C' \ (\text{απορρίπτεται η } H_0) \\ 0, & \underset{\sim}{x} \in C^* \ (\text{δεκτή η } H_0) \end{cases}$$

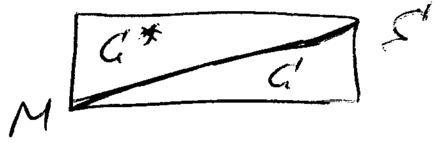
και παρατηρούμε ότι οι έλεγχοι ορίζουν στο δειγματικό χώρο S' μία διαμέριση:



Οι μικτές ελεγχοσυναρτήσεις είναι της μορφής:

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & \underset{\sim}{x} \in K = C' \ (\text{απορρίπτεται η } H_0) \\ \delta, & \underset{\sim}{x} \in M \ (\text{απορρίπτεται η } H_0 \text{ με πιθανότητα } \delta) \\ 0, & \underset{\sim}{x} \in A = C^* \ (H_0 \text{ δεκτή}) \end{cases}$$

όπου $\delta > 0$ και M είναι το σύνορο των συνόλων $K = C'$, $A = C^*$.



$(K \cup A \cup M = S')$.

Οι μικτοί έλεγχοι (όπως είδαμε στο παράδειγμα), χρησιμοποιούνται συνήθως στις διακριτές κατανομές διότι τότε, η πιθανότητα σε σημείο είναι θετική. Για $\delta=0$ τότε $M=\phi$ και $K=C$, $A=C^*$ και έχουμε μη-τυχαιοποιημένους ελέγχους.

Παρατηρούμε ότι: αν $\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \text{αν } \underset{\sim}{x}\in C\\ 0, & \text{αν } \underset{\sim}{x}\in C^*\end{cases}$ τότε:

$$E_\theta[\phi(\underset{\sim}{x})]=1\cdot P_\theta[\phi(\underset{\sim}{x})=1]+0\cdot P_\theta[\phi(\underset{\sim}{x})=0]$$
$$=P_\theta(\underset{\sim}{x}\in C)=\begin{cases}P_\theta[\underset{\sim}{x}\in C], & \theta\in\Theta_0\\ P_\theta[\underset{\sim}{x}\in C], & \theta\in\Theta_1\end{cases}=\pi(\theta)$$

όπου $P_\theta[\underset{\sim}{x}\in C]=P(\text{σφάλματος τύπου I})$, $\theta\in\Theta_0$

και $P_\theta[\underset{\sim}{x}\in C]=1-P(\text{σφάλματος τύπου II})$, $\theta\in\Theta_1$

Δηλαδή, η μέση τιμή της $\phi(\underset{\sim}{x})$ είναι η πιθανότητα απόρριψης της H_0.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ ένα τ.δ. από κατανομή $N(\theta,\sigma^2)$ με παράμετρο $\theta\in\mathbb{R}$, $\sigma^2=0.09$. Θέλουμε να ελέγξουμε τις υποθέσεις $H_0:\theta=1.2=\theta_0$, $H_1:\theta\neq 1.2$.

Για να αποφασίσουμε ποια από τις υποθέσεις H_0 ή H_1 ισχύει, λογικό είναι να σκεφτούμε να χρησιμοποιήσουμε τη στ.σ. $\bar{X}$ που είναι ΑΟΕΔ εκτιμητής της παραμέτρου θ. Υπάρχουν δύο υποψήφια test. Το πρώτο είναι:

$$\phi_1(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \text{αν } |\bar{x}-1.2|>a\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

Το δεύτερο προτεινόμενο test είναι $\phi_2(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \text{αν } \bar{x}>1.2+b\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$

Τα a, b θα επιλεγούν ώστε να δίνουν $\alpha=0.05$. Να συγκριθούν τα tests ως προς την ισχύ τους.

<u>Λύση</u> Για την ελεγχοσυνάρτηση $\phi_1(\underset{\sim}{x})$ έχουμε:

$$\alpha = P(\underset{\sim}{x} \in C \mid \theta = 1.2) = P_{\theta_0}(|\bar{x} - 1.2| > a)$$

$$= 1 - P_{\theta_0}(|\bar{x} - 1.2| \leq a) = 1 - P_{\theta_0}(-a \leq \bar{x} - 1.2 \leq a)$$

$$= 1 - P_{\theta_0}\left(-\frac{a\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{\bar{x} - 1.2}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \Phi\left(-\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 2 - 2\Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

Για $\alpha = 0.05$ είναι: $\Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.975 \Rightarrow \frac{a\sqrt{n}}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.975)$

$$= 1.96 \Rightarrow a = 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.588}{\sqrt{n}}$$

Η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης $\phi_1(\underset{\sim}{x})$ είναι για $\theta \neq \theta_0$

$$\pi(\theta) = P_\theta[\underset{\sim}{x} \in C] = P_\theta(|\bar{x} - 1.2| > a) = 1 - P_\theta(|\bar{x} - 1.2| \leq a)$$

$$= 1 - P\left(\frac{(-a + 1.2 - \theta)\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{(\bar{x} - \theta)\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{(a + 1.2 - \theta)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 1 + \Phi\left(-1.96 + \frac{(1.2 - \theta)\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(1.96 + \frac{(1.2 - \theta)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= \gamma_1(\theta)$$

Για την ελεγχοσυνάρτηση $\phi_2(\underset{\sim}{x})$ έχουμε:

$$\alpha = P(\underset{\sim}{x} \in C \mid \theta = 1.2) = P_{\theta_0}(\bar{x} > 1.2 + b)$$

$$= 1 - P_{\theta_0}(\bar{x} \leq 1.2 + b) = 1 - P\left(\frac{(\bar{x} - 1.2)\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{b\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$= 1 - \Phi\left(\frac{b\sqrt{n}}{\sigma}\right)$. Αν $\alpha = 0.05$

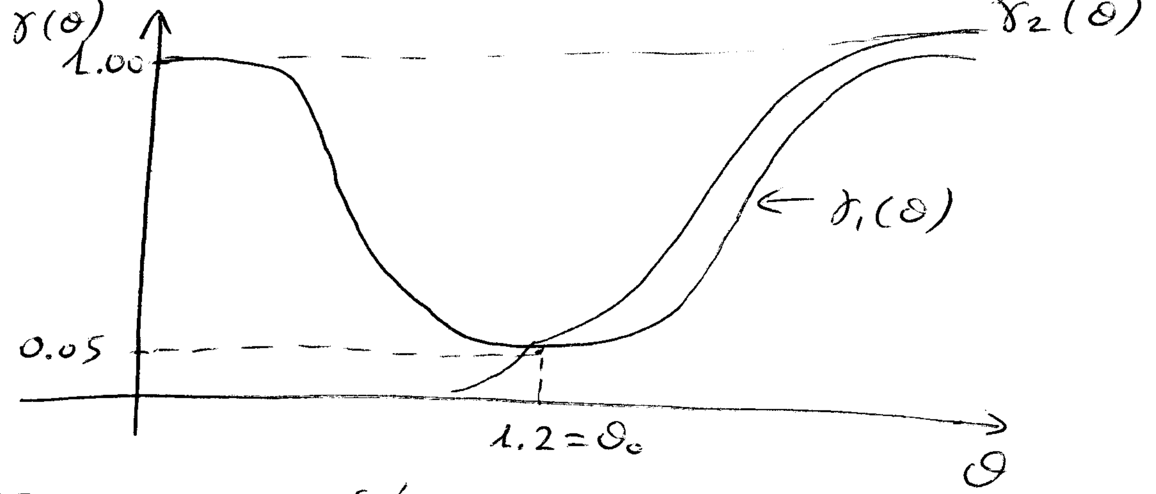
$$\Phi\left(\frac{b\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.95 \Rightarrow \frac{b\sqrt{n}}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.95) = 1.64$$

$b = \dfrac{1.64\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{0.492}{\sqrt{n}}$. Η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης $\phi_2(\underline{x})$ είναι για $\theta \neq \theta_0$ $P_\theta(\underline{x} \in C')$, $\theta \in \Theta_1$

$$P_\theta(\bar{x} > 1.2 + b) = P\left(\frac{(\bar{x}-\theta)\sqrt{n}}{\sigma} > \frac{(1.2+b-\theta)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(1.64 + \frac{(1.2-\theta)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma_2(\theta)$$

Στο σχήμα δίνεται η γ.π. των συναρτήσεων $\gamma_1(\theta)$, $\gamma_2(\theta)$ για $n = 100$



Τα δύο tests δίνουν $\gamma_2(\theta) > \gamma_1(\theta)$ $\forall \theta > 1.2$ ενώ $\gamma_2(\theta) < \gamma_1(\theta)$ $\forall \theta < 1.2$. Παρατηρούμε ότι αν δεν έχουμε καμμία ιδέα για το που κυμαίνεται η πραγματική τιμή του θ, δεν μπορούμε να επιλέξουμε κανένα από τα δύο test ως εγγυημένα "καλύτερο" test από το άλλο. Αν όμως ξέρουμε εκ των προτέρων ότι αν $\theta \neq 1.2$ τότε $\theta < 1.2$ τότε προφανώς θα διαλέξουμε την ελεγχοσυνάρτηση $\phi_1(\underline{x})$ ενώ αν $\theta \neq 1.2$, $\theta > 1.2$ τότε θα επιλέξουμε την ελεγχοσυνάρτηση $\phi_2(\underline{x})$.

Από το προηγούμενο παράδειγμα, είναι φανερό πόσο δύσκολο είναι να συγκριθούν δύο tests ακόμα και με την ίδια στάθμη σημαντικότητας. Το θέμα εύρεσης "βέλτιστων ελεγχοσυναρτήσεων" είναι ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα της Στατιστικής. Είναι προφανές ότι το βέλτιστο test είναι αυτό που ελαχιστοποιεί στο μηδέν τα μεγέθη των σφαλμάτων τύπου I και II. Αυτό συνήθως είναι αδύνατο. Αν ένας έλεγχος έχει μέγεθος σφάλματος τύπου I ίσο με μηδέν, τότε έχει μέγεθος σφάλματος τύπου II ίσο με τη μονάδα. Η αδυναμία της χρησιμοποίησης των μεγεθών των σφαλμάτων τύπου I και II σαν μέτρο σύγκρισης δύο ελεγχοσυναρτήσεων έγκειται στη φύση των σφαλμάτων τύπου I και II διότι το σφάλμα τύπου I ορίζεται στο χώρο Θ_0 ενώ το σφάλμα τύπου II ορίζεται στο χώρο Θ_1. Όταν το μέγεθος σφάλματος τύπου I ελαττώνεται δεν μπορούμε να πούμε αν ελαττώνεται ή αυξάνεται το μέγεθος σφάλματος τύπου II. Το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι ότι όταν μας δοθεί μία τιμή για το $\alpha(\theta)$ μπορούμε να βρούμε μία ελεγχοσυνάρτηση που να έχει ελάχιστο $\beta(\theta)$. Έτσι, λοιπόν, οι ελεγχοσυναρτήσεις που ζητάμε βρίσκονται ως εξής: Για δοσμένη σ.σ. (συνήθη $\alpha = 0.005$, $0.01, 0.05, 0.1$) βρίσκουμε εκείνη την ελεγχοσυνάρτηση που μεγιστοποιεί την ισχύ. Σ' αυτό το γεγονός στηριζόμαστε και λέμε ότι σαν H_0 ορίζουμε την υπόθεση για την οποία η λανθασμένη απόρριψη προκαλεί μεγαλύτερους κινδύνους από ότι η λανθασμένη αποδοχή, διότι την πιθανότητα λανθασμένης απόρριψης την περιορίζουμε εμείς σε όποιο επίπεδο θέλουμε.

Ένας τέτοιος έλεγχος που για συγκεκριμένη στάθμη σημαντικότητας α ελαχιστοποιεί την πιθανότητα σφάλματος τύπου II ή ισοδύναμα μεγιστοποιεί την ισχύ θα λέγεται ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος, εκτός αν η H_1 είναι απλή οπότε θα λέγεται απλώς ισχυρότατος έλεγχος.

Παράδειγμα Για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0: \theta = 1/2$ ως προς την εναλλακτική $H_1: \theta = 1/4$ για την κατανομή $Bin(10,\theta)$, η υπόθεση H_0 απορρίπτεται όταν $X \leq 3$ όπου $X \sim Bin(10,\theta)$. Να βρεθεί το ε.σ.σ. και η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης.

Λύση Έχουμε να ελέγξουμε τις υποθέσεις:

$H_0: \theta = \theta_0 = 1/2$

$H_1: \theta = \theta_1 = 1/4$

Το δείγμα μας είναι μόνο μία παρατήρηση η $X \sim Bin(10,\theta)$ και η ελεγχοσυνάρτηση $\phi(x)$ είναι: $\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \leq 3 \\ 0, & \text{αν } x > 3 \end{cases}$. Από τους πίνακες της διωνυμικής βρίσκουμε:

$P_{\theta=1/2}(X \leq 3) = 0.1719 = \alpha(\theta)$ και

$P_{\theta=1/4}(X \leq 3) = \gamma(\theta) = 1 - \beta(\theta) = 0.7759$

δηλ. $\displaystyle\sum_{x=0}^{3} \binom{10}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} = 0.1719$

και $\displaystyle\sum_{x=0}^{3} \binom{10}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} = 0.7759$

Έτσι, έχουμε

$$\alpha = E_{\theta=1/2}[\phi(X)] = 1 \cdot P_{\theta=1/2}(X \leq 3) + 0 \cdot P_{\theta=1/2}(X > 3)$$
$$= 0.1719$$

$$\Pi_\phi(\theta_1) = \Pi_\phi(1/4) = P_{\theta=1/4}(X \leq 3) = 0.7759$$

Άρα $\alpha = 0.1719$, $\gamma = 0.7759$.

Έλεγχος Απλών Υποθέσεων

Έστω τ.δ. $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από συνάρτηση πυκνότητας (ή πιθανότητας) $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$. Θέλουμε να

βρούμε έναν ισχυρότατο έλεγχο μεγέθους α $(0<\alpha<1)$ −θε-
για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0: \theta=\theta_0$ έναντι της υπό-
θεσης $H_1: \theta=\theta_1$. Κάτω από την υπόθεση H_0 η συνάρτη-
ση πυκνότητας (ή πιθανότητας) είναι $f_0=f(x;\theta_0)$ και
η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L_0 = L(\underline{x};\theta_0) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)$$

Κάτω από την υπόθεση H_1 η συνάρτηση πυκνότητας (ή πιθανότητας) είναι $f_1=f(x;\theta_1)$ και η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι $L_1=L(\underline{x};\theta_1)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)$.

<u>Θεώρημα Neyman-Pearson</u> Για τον έλεγχο της απλής μηδενικής υπόθεσης $H_0: \theta=\theta_0$ έναντι της απλής εναλλακτικής υπόθεσης $H_1: \theta=\theta_1$ σε σ.σ. α, η ελεγχοσυνάρτηση $\phi(\underline{x})$ που ορίζεται ως εξής:

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } L_1/L_0 > c \ \text{(απορρίπτω την } H_0) \\ \delta, & \text{αν } L_1/L_0 = c \ \text{(απορρίπτω την } H_0 \text{ με πιθανότητα } \delta) \\ 0, & \text{αν } L_1/L_0 < c \ \text{(δέχομαι } H_0) \end{cases}$$

όπου οι σταθερές c $(c>0)$ και δ $(0<\delta<1)$ ορίζονται από τη σχέση $E_{\theta_0}[\phi(\underline{x})]=\alpha$, είναι η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση από όλες τις ελεγχοσυναρτήσεις που έχουν σ.σ. $\leq \alpha$. Η σταθερά c καλείται <u>κρίσιμο σημείο</u> ή <u>σημείο αποκοπής.</u>

<u>Ορισμός 5</u> Μία ελεγχοσυνάρτηση $\phi(\underline{x})$ καλείται <u>αμερόληπτη</u> αν υπάρχει σ.σ. α τέτοια ώστε να ισχύουν συγχρόνως οι ανισότητες: $\pi_\phi(\theta)\leq\alpha \ \forall \theta\in\Theta_0$, $\pi_\phi(\theta)\geq\alpha \ \forall\theta\in\Theta_1$, όπου $\pi(\theta)=\begin{cases}\alpha(\theta), & \theta\in\Theta_0 \\ 1-\beta(\theta), & \theta\in\Theta_1\end{cases}$ (*)

$\pi(\theta)$: πιθανότητα απόρριψης της H_0 για $\theta \in \Theta$

$\alpha(\theta) = P_\theta(\underline{x} \in C')$, $\theta \in \Theta_0$, $1-\beta(\theta) = P_\theta(\underline{x} \in C')$, $\theta \in \Theta_1$.

<u>Θεώρημα 1</u> Ισχύει ότι η ελεγχοσυνάρτηση $\phi(\underline{x})$ όπως ορίστηκε στο Θεώρημα Neyman-Pearson είναι <u>αμερόληπτη</u> για την υπόθεση $H_0: \theta = \theta_0$ έναντι της εναλλακτικής $H_1: \theta = \theta_1$ σε σ.σ. α.

<u>Ερμηνεία:</u> Ένας έλεγχος ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση (*) καλείται αμερόληπτος (unbiased test). Η συνθήκη αμεροληψίας μας λέει ότι η <u>πιθανότητα απόρριψης της H_0</u> είναι μεγαλύτερη όταν <u>δεν ισχύει παρά όταν ισχύει.</u>

<u>Θεώρημα 2</u> Η ακολουθία των ελεγχοσυναρτήσεων $\phi_n = \phi_n(\underline{x})$ όπως ορίστηκε στο Θεώρημα Neyman-Pearson είναι συνεπής με την έννοια ότι όταν το μέγεθος του δείγματος n μεγαλώνει ($n \to \infty$), τότε η ισχύς του test τείνει στη μονάδα με την προϋπόθεση ότι: $\forall \theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$ ισχύει ότι:

$$E\left\{\left|\log \frac{f(\underline{x};\theta_1)}{f(\underline{x};\theta_0)}\right|\right\} < \infty.$$

<u>Παράδειγμα</u> Δίνεται τ.δ. $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από την κατανομή Poisson(θ), $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. Με τη βοήθεια του παραπάνω δείγματος να βρεθεί <u>ισχυρότατος έλεγχος</u> για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0: \theta = \theta_0$ έναντι της $H_1: \theta = \theta_1$ σε σ.σ. α.

Λύση Η συνάρτηση πιθανοφάνειας για την κατανομή Poisson είναι:

$$L(\underset{\sim}{x};\theta)=e^{-n\theta}\frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

Άρα

$$L_0=e^{-n\theta_0}\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

$$L_1=e^{-n\theta_1}\frac{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Neyman-Pearson (N-P) ο ισχυρότατος έλεγχος δίνεται από τη σχέση:

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \text{όταν } \frac{L_1}{L_0}>c' \\ \delta, & \text{όταν } \frac{L_1}{L_0}=c' \\ 0, & \text{όταν } \frac{L_1}{L_0}<c'\end{cases}$$

όπου οι σταθερές c', δ υπολογίζονται από τη σχέση $E_{\theta_0}[\phi(\underset{\sim}{x})]=\alpha$

$$\frac{L_1}{L_0}=\frac{e^{-n\theta_1}\,\theta_1^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{e^{-n\theta_0}\,\theta_0^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}=e^{-n(\theta_1-\theta_0)}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^t, \text{ όπου}$$

$t=\sum_{i=1}^{n}x_i$. Άρα $\log\frac{L_1}{L_0}=t\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)-n(\theta_1-\theta_0)$

οπότε

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \text{αν } \log\frac{L_1}{L_0}>\log c' \\ \delta, & \text{αν } \log\frac{L_1}{L_0}=\log c' \\ 0, & \text{αν } \log\frac{L_1}{L_0}<\log c'\end{cases} \quad (1)$$

$$t\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)-n(\theta_1-\theta_0)>\log c' \Rightarrow t>\frac{\log c'+n(\theta_1-\theta_0)}{\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)}$$

Αν θέσουμε

$c_0=[\log c'+n(\theta_1-\theta_0)]\Big/\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)$ και με την υπόθεση ότι $\theta_0<\theta_1$ η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \text{αν } t>c_0 \\ \delta, & \text{αν } t=c_0 \\ 0, & \text{αν } t<c_0\end{cases}, \quad t=\sum_{i=1}^{n}x_i=T$$

όπου οι σταθερές c_0 και δ υπολογίζονται από τη σχέση:

$$E_{\theta_0}[\phi(\underset{\sim}{x})] = P_{\theta_0}(T > c_0) + \delta P_{\theta_0}(T = c_0) = \alpha$$

γνωρίζοντας ότι η τ.μ. $T \sim Poisson(n\theta_i)$, $i = 0, 1$. Αν $\theta_0 > \theta_1$ η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t < c_0' \\ \delta', & \text{αν } t = c_0' \\ 0, & \text{αν } t > c_0' \end{cases} \quad (2), \quad t = T = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

όπου οι σταθερές c_0', δ' υπολογίζονται από τη σχέση

$$E_{\theta_0}[\phi(\underset{\sim}{x})] = P_{\theta_0}(T < c_0') + \delta' P_{\theta_0}(T = c_0') = \alpha.$$

<u>Εφαρμογές</u> (i) Για $n = 15$, $\theta_0 = 0.2$ και $\theta_1 = 0.5$ να βρεθούν οι σταθερές c_0, δ και η ισχύς του test. Δίνεται ότι $\alpha = 0.05$. Σ' αυτήν την περίπτωση $\theta_0 < \theta_1$. Άρα, η ελεγχοσυνάρτηση είναι της μορφής (1). Η τ.μ. T ακολουθεί την κατανομή Poisson (7.5) κάτω από την H_1 και την κατανομή Poisson (3) κάτω από την H_0.

Επίσης $P_{0.2}(T > c_0) + \delta P_{0.2}(T = c_0) = 0.05$

$$\Rightarrow 1 - P_{0.2}(T \leq c_0) + \delta P_{0.2}(T = c_0) = 0.05$$

$$\Rightarrow -P_{0.2}(T \leq c_0) + \delta \cdot P_{0.2}(T = c_0) = -0.95$$

$$\Rightarrow P_{0.2}(T \leq c_0) - \delta P_{0.2}(T = c_0) = 0.95$$

Από πίνακες της Poisson βρίσκουμε την τιμή c_0 για την οποία ισχύει $P_{0.2}(T \leq c_0) \geq 0.95$. Βρίσκουμε ότι για $c_0 = 6 \Rightarrow P_{0.2}(T \leq 6) = 0.9665$. Επομένως,

$$\delta P_{0.2}(T = 6) = 0.0165. \text{ Άρα } \delta = \frac{0.0165}{e^{-3}\frac{3^6}{6!}} = \frac{0.0165}{0.0504}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\delta = 0.327}$. Η ισχύς του test δίνεται από τον τύπο:

$$\gamma = 1-\beta = E_{\theta_1}[\phi(\underset{\sim}{x})] = P_{0.5}(T>6) + 0.327\, P_{0.5}(T=6)$$

$$= 1 - P_{0.5}(T\leq 6) + 0.327\, P_{0.5}(T=6)$$

$$= 1 - 0.38 + 0.327 \cdot 0.1367 = 0.66 \Rightarrow \boxed{\gamma = 0.66}$$

(ii) Να γίνει ο έλεγχος των υποθέσεων $H_0: \theta = 0.3$, $H_1: \theta = 0.1$ για ένα δείγμα μεγέθους $n=20$ σε σ.σ. $\alpha = 0.05$ και να βρεθεί η ισχύς του test.

Η ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από την (2) διότι $\theta_0 > \theta_1$.

Άρα
$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } T < c_0' \\ \delta', & \text{αν } T = c_0' \\ 0, & \text{αν } T > c_0' \end{cases}, \quad T = t = \sum_{i=1}^{n} x_i, \text{ όπου}$$

η στ.σ. $T \overset{H_0}{\sim} \text{Poisson}(6)$ και $T \overset{H_1}{\sim} \text{Poisson}(2)$.

Οι σταθερές c_0' και δ υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\alpha = E_{\theta_0}[\phi(\underset{\sim}{x})] = P_{0.3}(T < c_0') + \delta' P_{0.3}(T = c_0') = 0.05$$

Για $c_0' = 2 \Rightarrow P_{0.3}(T<2) = 0.0174$ και $P_{0.3}(T=2) = 0.0446$.

Επομένως $\alpha = 0.05 = 0.0174 + \delta' 0.0446 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\delta' = 0.7309}$ Η ισχύς του test είναι:

$$\gamma = E_{\theta_1}[\phi(\underset{\sim}{x})] = P_{0.1}(T<2) + 0.7309\, P_{0.1}(T=2)$$

$$= 0.4060 + 0.7309 \cdot 0.2707 = 0.6039$$

<u>Παρατήρηση</u> Αν ακολουθούσαμε την ίδια διαδικασία για να ελέγξουμε τις υποθέσεις $H_0: \theta = 0.3$, $H_1: \theta = 0.1$ σε σ.σ. $\alpha = 0.05$ αλλά με δείγμα μεγέθους $\underline{n = 12}$ θα είχαμε $\gamma = 0.0554$. Βλέπουμε λοιπόν πόσο σημαντικά επηρεάζει την ισχύ του test, το μέγεθος του δείγματος όπως ακριβώς προβλέπει το Θεώρημα 2.

<u>Παράδειγμα</u> Με τη βοήθεια ενός τ.δ. $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ από την $N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 γνωστό, να βρεθεί η ελεγχοσυνάρτηση των υποθέσεων $H_0: \mu=\mu_0$, $H_1: \mu=\mu_1$ σε σ.σ. α και να βρεθεί η ισχύς του test.

<u>Λύση</u> Είναι $f(x;\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}, x\in\mathbb{R}$.

$$\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0}=\frac{\mathcal{L}(\underset{\sim}{x};\mu_1)}{\mathcal{L}(\underset{\sim}{x};\mu_0)}=\frac{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_1)^2\right\}}{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2\right\}}$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_1)^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2\right\}}$$

Είναι

$$\log\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0}=-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_1)^2-\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2\sigma^2}\left[\cancel{\sum_{i=1}^n x_i^2}-2\mu_0\sum_{i=1}^n x_i+n\mu_0^2-\cancel{\sum_{i=1}^n x_i^2}+2\mu_1\sum_{i=1}^n x_i-n\mu_1^2\right]$$

$$=\frac{n}{2\sigma^2}\left[-2\mu_0\bar{x}+\mu_0^2+2\mu_1\bar{x}-\mu_1^2\right]$$

$$=\frac{n}{\sigma^2}(\mu_1-\mu_0)\bar{x}-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu_1^2-\mu_0^2)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) $\mu_1 > \mu_0$. Για $\mu_1 > \mu_0$ έχουμε:

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{για } \log \dfrac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0} > \log c' \iff \bar{x} > c_0' \\ 0, & \text{για } \log \dfrac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0} \leq \log c' \iff \bar{x} \leq c_0 \end{cases}$$

όπου c_0':

$$\frac{n}{\sigma^2}(\mu_1 - \mu_0)\bar{x} - \frac{n}{2\sigma^2}(\mu_1^2 - \mu_0^2) > \log c' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} > \frac{\log c' + \dfrac{n}{2\sigma^2}(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{\dfrac{n}{\sigma^2}(\mu_1 - \mu_0)} \equiv c_0'$$

δηλαδή $c_0 = \dfrac{\sigma^2}{n} \dfrac{\log c'}{(\mu_1 - \mu_0)} + \dfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_0)$. Η c_0 υπολογίζεται από: $E_{\mu_0}[\phi(\underline{x})] = P_{\mu_0}(\bar{x} > c_0') = \alpha$

$$= P\left(\frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} > \frac{(c_0 - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{(c_0 - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{(c_0 - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \alpha. \text{ Άρα } \frac{(c_0 - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} = z_\alpha$$

$$\Rightarrow c_0 = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

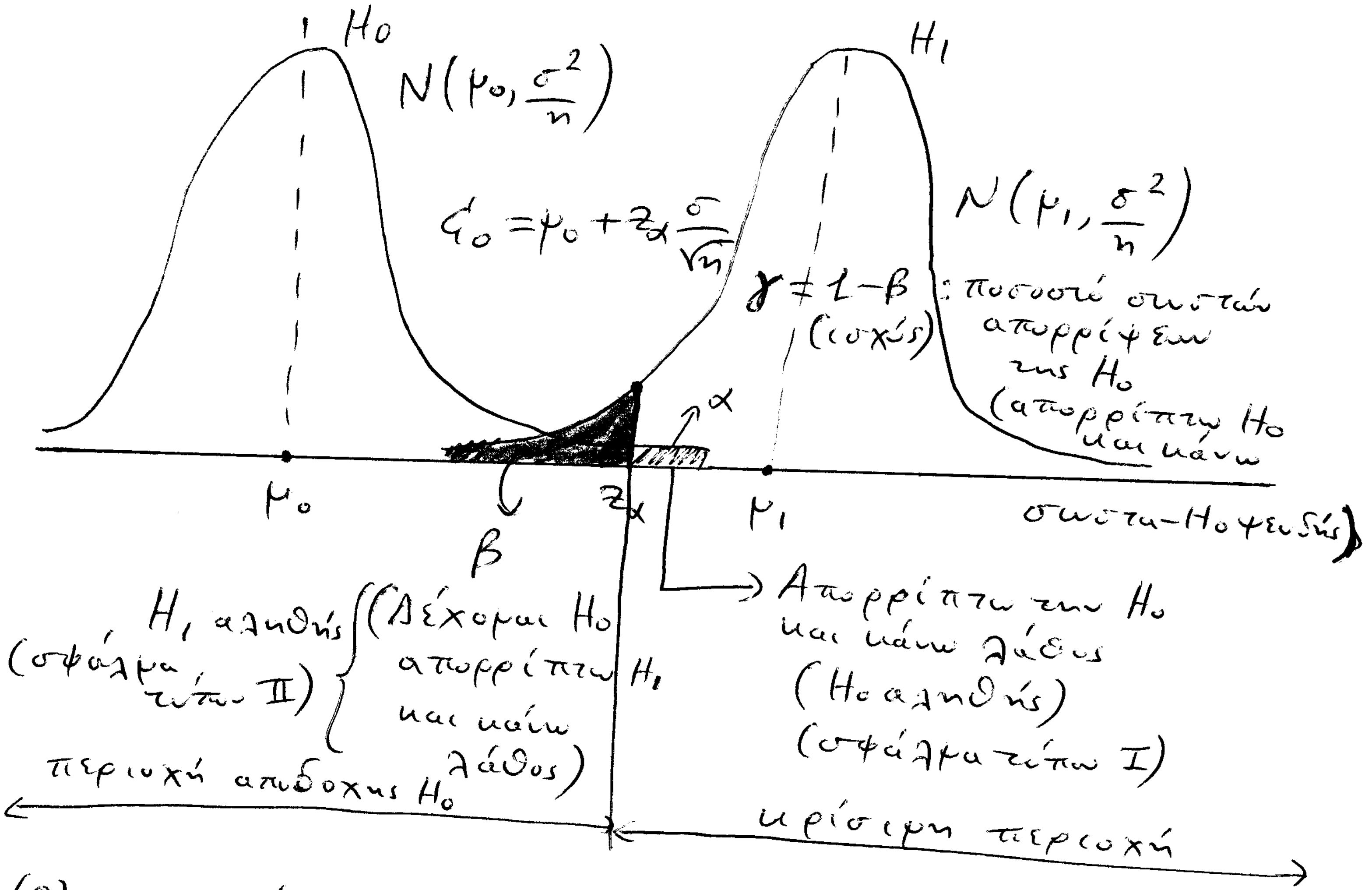
Η ισχύς του test είναι:

$$E_{\mu_1}[\phi(\underline{x})] = P_{\mu_1}(\bar{x} > c_0) = P\left(\frac{(\bar{x} - \mu_1)\sqrt{n}}{\sigma} > \frac{(c_0 - \mu_1)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{(c_0 - \mu_1)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\left(\mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu_1\right)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_\alpha + \frac{(\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{(\mu_1 - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} - z_\alpha\right).$$

Γραφική παράσταση για τον έλεγχο της $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι της $H_1: \mu=\mu_1$ $(\mu_0<\mu_1)$



(β) $\underline{\mu_1<\mu_0}$: Έχουμε $\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \bar{x} < c_0' \\ 0, & \bar{x} \geq c_0' \end{cases}$. Η σταθερά c_0' υπολογίζεται από τη σχέση

$$E_{\mu_0}[\phi(\underline{x})] = P_{\mu_0}(\bar{x} < c_0') = P\left(\frac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{(c_0'-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) =$$

$$= \alpha \Rightarrow \Phi\left(\frac{(c_0'-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha \Rightarrow \frac{(c_0'-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} = -z_\alpha$$

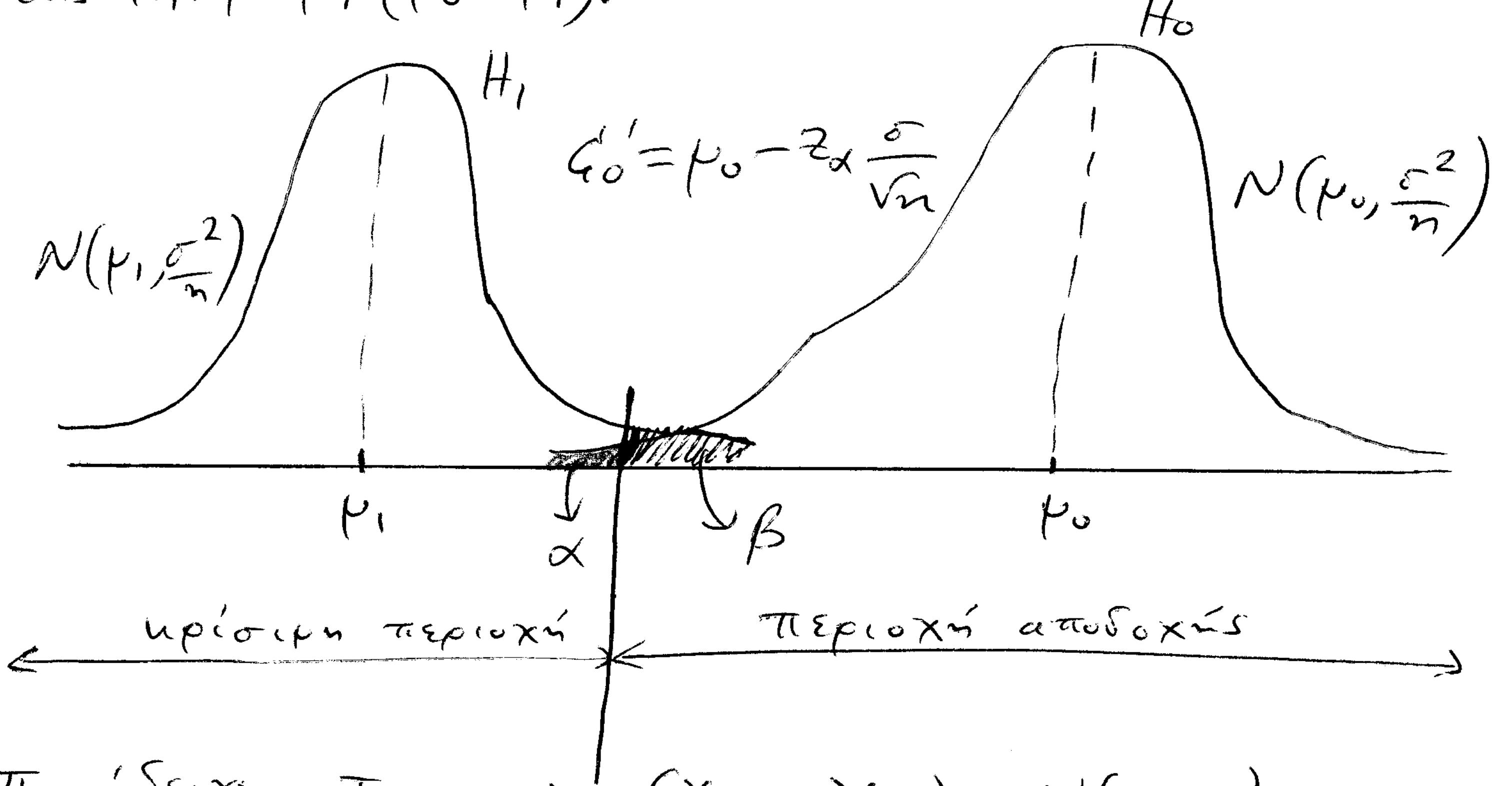
$$\Rightarrow c_0' = \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha.$$

Η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης σ' αυτή την περίπτωση είναι:

$$E_{\mu_1}[\phi(\underline{x})] = P_{\mu_1}(\bar{x} < c_0') = P\left(\frac{(\bar{x}-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{(c_0'-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{(\mu_0-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma} - z_\alpha \right).$$

Γραφική παράσταση για τον έλεγχο της $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι της $H_1: \mu=\mu_1$ $(\mu_0>\mu_1)$.



<u>Παράδειγμα</u> Το τ.δ. $\underline{X}=(X_1,\dots,X_{16}) \sim N(\mu,\sigma^2)$.

(i) Να βρεθεί η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο της H_0: η $N(\mu,\sigma^2)$ είναι η $N(0,9)$ ως προς την H_1: η $N(\mu,\sigma^2)$ είναι η $N(1,9)$ σε σ.σ. $\alpha=0.05$.

(ii) Να βρεθεί η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης.

<u>Λύση</u> $H_0: \mu=0=\theta_0$, $H_1: \mu=1=\theta_1$

$$f(x;\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\},\ x\in\mathbb{R}$$

$$\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0} = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{16}(x_i-1)^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{16}x_i^2\right\}}$$

$$\log\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0} = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{16}(x_i-1)^2 - \sum_{i=1}^{16}x_i^2\right]$$

$$= -\frac{16}{18}(-2\bar{x}+1) = \frac{16}{18}(2\bar{x}-1) = \frac{16}{9}\bar{x} - \frac{8}{9}.$$

Συνεπώς, η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \log\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \geq \log c' \Leftrightarrow \bar{x} \geq c_0 \\ 0, & \text{αν } \log\frac{\lambda_1}{\lambda_0} < \log c' \Leftrightarrow \bar{x} < c_0 \end{cases}$$

Όμως $\log\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \geq \log c' \Leftrightarrow \frac{16}{9}\bar{x} - \frac{8}{9} > \log c' \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} \geq \dfrac{\log c' + \frac{8}{9}}{16/9} = c_0 = \dfrac{9\log c' + 8}{16}$. Για να βρούμε το c_0 έχουμε:

$$E_{\theta_0}[\phi(\underline{x})] = P_{\theta_0}(\bar{x} \geq c_0) = P\left(\frac{\bar{x}-0}{3/4} \geq \frac{c_0 - 0}{3/4}\right) = \alpha = 0.05$$

Άρα $P\left(\frac{4\bar{x}}{3} \geq \frac{4c_0}{3}\right) = 0.05 \Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{4c_0}{3}\right) = 0.05$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{4c_0}{3}\right) = 0.95 \Rightarrow \frac{4c_0}{3} = 1.64 = z_{0.95} \Rightarrow \boxed{c_0 = 1.23}$

Άρα $\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \bar{x} \geq 1.23 \\ 0, & \text{αν } \bar{x} < 1.23 \end{cases}$. Η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης είναι:

$$P_{\theta_1}(\bar{x} \geq 1.23) = P\left(\frac{\bar{x}-1}{3/4} \geq \frac{1.23-1}{3/4}\right) = P\left(\frac{\bar{x}-1}{3/4} \geq 0.3066\right)$$

$= 1 - P(Z < 0.3066) = 0.3820$ (από πίνακες της $N(0,1)$).

Συνεπώς, $\boxed{\gamma = 0.382}$

<u>Παράδειγμα</u> Το τ.δ. $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2)$ από την εκθετική κατανομή $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)$. Να ελεγχθεί η υπόθεση $H_0: \theta = 2$ ως προς την $H_1: \theta = 1$ για ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$.

<u>Λύση</u> Είναι $H_0: \theta = \theta_0 = 2$, $H_1: \theta = \theta_1 = 1$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{f(x_1;1)\,f(x_2;1)}{f(x_1;2)\,f(x_2;2)} = \frac{e^{-(x_1+x_2)}}{\frac{1}{4}e^{-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}} = 4e^{-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}$$

Έχουμε Εκθετική$\left(\frac{1}{\theta}\right) \equiv Gamma(1,\theta)$ δηλαδή για $\theta=2$ έχουμε $Gamma(1,2)$ δηλαδή χ^2_2.

Συνεπώς $\log\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \log 4 - \frac{x_1+x_2}{2} \geq \log c'$

$$\Rightarrow x_1+x_2 \leq 2\log 4 - 2\log c' \equiv c_0$$

Άρα $\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_1+x_2 \leq c_0 \\ 0, & \text{αν } x_1+x_2 > c_0 \end{cases}$ Σε ε.σ.σ. $\alpha=0.05$ έχουμε:

$$\alpha = P_{\theta_0}(x_1+x_2 \leq c_0)$$

Όμως $x_1+x_2 \sim \chi^2_4$. Για $\alpha=0.05$, από πίνακες της χ^2_4, έχουμε $c_0 = 0.711$. Αντίστροφα, για δοθέν c, βρίσκουμε το ε.σ.σ. α.

Έλεγχος σύνθετων υποθέσεων

Τα περισσότερα προβλήματα στην πράξη απαιτούν έλεγχο σύνθετων υποθέσεων. Για μία μεγάλη κλάση κατανομών είναι δυνατή η κατασκευή ομοιόμορφα ισχυρότατων ελέγχων για τον έλεγχο μονόπλευρων σύνθετων υποθέσεων π.χ. της μορφής $H_0: \theta=\theta_0$ έναντι της $H_1: \theta>\theta_0$. Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις μονοτονίας για την κατανομή του δείγματος είναι δυνατή η κατασκευή ομοιόμορφα ισχυρότατων ελεγχοσυναρτήσεων και για αμφίπλευρους ελέγχους της μορφής:

(α) $H_0: \theta=\theta_0$, $H_1: \theta>\theta_0$

(β) $H_0: \theta\leq\theta_0$, $H_1: \theta>\theta_0$

(γ) $H_0: \theta=\theta_0$, $H_1: \theta<\theta_0$

(δ) $H_0: \theta\geq\theta_0$, $H_1: \theta<\theta_0$

Μία αρκετά μεγάλη κατηγορία κατανομών στην οποία υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής τέτοιου είδους ομοιόμορφα ισχυρότατων ελέγχων είναι οι κατανομές που έχουν μονότονο λόγο πιθανοφανειών (ΜΛΠ).

Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

<u>Ορισμός 7</u> Η οικογένεια κατανομών $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ της οποίας το π.ο. είναι ανεξάρτητο του θ, λέμε ότι έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών (ΜΛΠ) αν υπάρχει μία πραγματική συνάρτηση $T(\underline{x})$ τέτοια ώστε για $\theta < \theta'$ οι κατανομές (σ. πυκνότητας ή σ. πιθανότητας) $f(x;\theta)$ και $f(x;\theta')$ να είναι διακεκριμένες για $\theta \neq \theta'$ και ο λόγος $f(x;\theta')/f(x;\theta)$ να είναι μία αύξουσα συνάρτηση του $T(\underline{x})$.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω η οικογένεια κατανομών $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$, $\theta > 0$ και $\theta < \theta'$. Τότε προφανώς

$$\frac{1}{\theta} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\} \neq \frac{1}{\theta'} \exp\left\{-\frac{x}{\theta'}\right\} \text{ για } \theta \neq \theta', \quad D_f = \mathbb{R} \text{ (ανεξάρτητο του } \theta)$$

Επίσης, ο λόγος:
$$\frac{f(x;\theta')}{f(x;\theta)} = \frac{\theta}{\theta'} \exp\left\{-x\left(\frac{1}{\theta'} - \frac{1}{\theta}\right)\right\}$$
είναι μία αύξουσα συνάρτηση της $T(x) = x$. Άρα, η οικογένεια κατανομών $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}$, $x > 0$, $\theta > 0$ έχει την ιδιότητα ΜΛΠ.

<u>Παράδειγμα</u> Η κατανομή Poisson με σ. πιθανότητας $f(x;\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$ έχει την ιδιότητα ΜΛΠ διότι $D_f = \{0, 1, \ldots\}$ ανεξάρτητο του λ και

$$e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^x}{x!} \neq e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^x}{x!}$$ για $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Για $\lambda_1 < \lambda_2$ έχουμε:

$$\frac{f(x;\lambda_2)}{f(x;\lambda_1)} = \frac{e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^x}{x!}}{e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^x}{x!}} = e^{-(\lambda_2-\lambda_1)}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^x.$$ Ο λόγος είναι μία αύξουσα συνάρτηση της $T(x)=x$.

<u>Παρατήρηση</u> Αν θεωρήσουμε τ.δ. $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ από την κατανομή Poisson(λ), $\lambda>0$, τότε ο λόγος διαμορφώνεται:

$$\frac{f(\underset{\sim}{x};\lambda_2)}{f(\underset{\sim}{x};\lambda_1)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{x_i}}{x_i!}}{\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{x_i}}{x_i!}} = e^{-n(\lambda_2-\lambda_1)}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

$\underset{\sim}{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, είναι μία αύξουσα συνάρτηση της $T(\underset{\sim}{x})=\sum_{i=1}^{n} x_i$.

<u>Παράδειγμα</u> Η κατανομή με σ. πυκνότητας $f(x;\lambda)=\theta e^{-\theta(x-\lambda)}$, $x>\lambda$, $\theta,\lambda>0$ <u>δεν</u> έχει την ιδιότητα του ΜΛΠ διότι το π.ο. είναι το $P_f=(\lambda,\infty)$ και εξαρτάται από την παράμετρο λ.

Μία σημαντική οικογένεια κατανομών η οποία έχει την ιδιότητα του ΜΛΠ είναι η Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (ΕΟΚ). Ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα.

<u>Θεώρημα 3</u> Αν η μονοπαραμετρική κατανομή (σ. πυκνότητας ή πιθανότητας) $f(x;\theta)$ ανήκει στην ΕΟΚ, δηλαδή είναι της μορφής: $f(x;\theta)=c(\theta)\exp\{Q(\theta)T(x)\}h(x)$, $h(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $c(\theta)>0$ $\forall\theta\in\Theta$. Το π.ο. της f είναι ανεξάρτητο της θ, τότε, αν η συνάρτηση $Q(\theta)$ είναι <u>αύξουσα</u> τότε η f θα έχει την ιδιότητα του ΜΛΠ ως προς την

$T(X)$ (ή για τ.δ. $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ ως προς την $T(\underset{\sim}{X})=\sum_{i=1}^{n}T(X_i)$)
Αντιθέτως, αν η συνάρτηση $Q(\theta)$ είναι φθίνουσα, τότε η f θα έχει την ιδιότητα του ΜΛΠ ως προς την $-T(x)$ (ή για τ.δ. $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ ως προς την $T(\underset{\sim}{X})=-\sum_{i=1}^{n}T(X_i)$).

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε ελέγχους σύνθετων υποθέσεων της μορφής:

(i) $H_0: \theta\le\theta_0$ ως προς την $H_1: \theta>\theta_0$

(ii) $H_0: \theta\ge\theta_0$ ως προς την $H_1: \theta<\theta_0$

(iii) $H_0: \theta\le\theta_1$ ή $\theta\ge\theta_2$ ως προς $H_1: \theta_1<\theta<\theta_2$

(iv) $H_0: \theta_1\le\theta\le\theta_2$ ως προς $H_1: \theta<\theta_1$ ή $\theta>\theta_2$

Ας θεωρήσουμε τη τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας (ή πιθανότητας) $f(x;\theta)$, $\theta\in\Theta$, $x\in\mathbb{R}$.

<u>Θεώρημα 4</u> Έστω η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\underset{\sim}{x};\theta)$ που έχει την ιδιότητα του ΜΛΠ ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{x})$. Για τον έλεγχο της απλής αρχικής υπόθεσης $H_0:\theta=\theta_0$ έναντι της σύνθετης εναλλακτικής υπόθεσης $H_1:\theta>\theta_0$, η ελεγχοσυνάρτηση που δίνεται από τη σχέση:

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \text{όταν } T(\underset{\sim}{x})>c\\ \delta, & \text{όταν } T(\underset{\sim}{x})=c\\ 0, & \text{όταν } T(\underset{\sim}{x})<c\end{cases}$$

, όπου οι σταθερές $\delta\in(0,1)$, $c>0$, δίνονται από τη σχέση $E_{\theta_0}[\phi(\underset{\sim}{x})]=\alpha$ είναι ομοιόμορφα ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο της H_0 έναντι της H_1 σε σ.σ. α.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ τ.δ. από κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}\exp\{-\frac{x}{\theta}\}$, $\theta\in\Theta=(0,\infty)$, $x\ge0$, με $n=31$. Σε σ.σ. $\alpha=0.05$, να γίνει ο έλεγχος υποθέσεων $H_0: \theta=10$ έναντι της $H_1: \theta>10$.

<u>Λύση</u> Έχουμε $L(\underset{\sim}{x};\theta)=\frac{1}{\theta^n}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}\right\}$

$=\frac{1}{\theta^n}\exp\left\{-\frac{t}{\theta}\right\}$, όπου $t=\sum_{i=1}^{n}x_i$. Σε προηγούμενο παράδειγμα αποδείχτηκε ότι η $f(x;\theta)$ έχει τη ιδιότητα του ΜΛΠ ως προς την $T(\underset{\sim}{x})=x$ και επειδή η $L(\underset{\sim}{x};\theta)$ είναι ίδιας μορφής με την $f(x;\theta)$, η $L(\underset{\sim}{x};\theta)$ έχει την ιδιότητα του ΜΛΠ ως προς την $T(\underset{\sim}{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4, η ομοιόμορφα ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο της $H_0: \theta=10$ έναντι της $H_1: \theta>10$ είναι:

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n}x_i\geq c\\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n}x_i<c\end{cases}$$, όπου η σταθερά c

δίνεται από τη σχέση: $E_{\theta_0}[\phi(\underset{\sim}{x})]=P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i>c\right)=\alpha$, $\alpha=0.05$. Η τ.μ. $X\sim Gamma(1,1/\theta)$ άρα η στατ. $T=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim Gamma\left(n,\frac{1}{\theta}\right)$. Από τους πίνακες της Gamma βρίσκουμε $c=406.91$. Έτσι η $H_0: \theta=10$ απορρίπτεται όταν $\sum_{i=1}^{31}x_i>406.91$ ή ισοδύναμα αν $\bar{x}>\frac{406.91}{31}=13.13$ $\boxtimes$

Για τον έλεγχο της αρχικής υπόθεσης $H_0: \theta\leq\theta_0$ έναντι της $H_1: \theta>\theta_0$ ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα.

<u>Θεώρημα 5</u> Έστω X τ.μ. με σ. πυκνότητας (ή πιθανότητας) $f(x;\theta)$ και $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ ένα τ.δ. από αυτήν την κατανομή. Υποθέτουμε ότι η πιθανοφάνεια $L(\underset{\sim}{x};\theta)$ έχει την ιδιότητα του ΜΛΠ ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X})$. Τότε:

(i) Για τον έλεγχο της αρχικής υπόθεσης $H_0: \theta\leq\theta_0$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1: \theta > \theta_0$, υπάρχει ομοιόμορφα ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση που δίνεται από:

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } T(\underset{\sim}{x}) > c' \\ \delta, & \text{όταν } T(\underset{\sim}{x}) = c' \\ 0, & \text{όταν } T(\underset{\sim}{x}) < c' \end{cases}$$

, όπου οι σταθερές $c' > 0$ και $\delta \in (0,1)$ δίνονται από τη σχέση:

$E_{\theta_0}[\phi(\underset{\sim}{x})] = \alpha$

(ii) Η συνάρτηση ισχύος $\pi(\theta) = E_\theta[\phi(\underset{\sim}{x})]$ είναι αυστηρά αύξουσα για κάθε θ για το οποίο ισχύει $\pi(\theta) < 1$.

(iii) Για όλα τα θ' το test που ορίζεται από τις παραπάνω σχέσεις είναι Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο της $H_0': \theta \leq \theta'$ ως προς $H_1: \theta > \theta'$ σε σ.σ. $\alpha' = \pi(\theta')$.

(iv) Για κάθε $\theta < \theta_0$ ο έλεγχος <u>ελαχιστοποιεί</u> το μέγεθος σφάλματος τύπου I μεταξύ όλων των ελεγχοσυναρτήσεων που ικανοποιούν τη σχέση: $E_{\theta_0}[\phi(\underset{\sim}{x})] = \alpha$.

Για τον έλεγχο της $H_0: \theta \geq \theta_0$ ως προς $H_1: \theta < \theta_0$ ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα.

<u>Θεώρημα 6</u> Έστω X τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας (ή συνάρτηση πιθανότητας) $f(x;\theta)$ και $\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ένα τ.δ. από αυτήν την κατανομή. Έστω ότι η πιθανοφάνεια $L(\underset{\sim}{x};\theta)$ έχει την ιδιότητα του ΜΛΠ ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{x})$. Τότε για τον έλεγχο της $H_0: \theta \geq \theta_0$ ως προς $H_1: \theta < \theta_0$ υπάρχει Ο.Ι.Ε. που δίνεται από τη σχέση:

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } T(\underset{\sim}{x}) < c' \\ \delta, & \text{όταν } T(\underset{\sim}{x}) = c \\ 0, & \text{όταν } T(\underset{\sim}{x}) > c' \end{cases}$$

, όπου οι σταθερές c' και $\delta \in (0,1)$ δίνονται από την $E_{\theta_0}[\phi(\underset{\sim}{x})] = \alpha$, και η συνάρτηση ισχύος $\pi(\theta) = E_\theta[\phi(\underset{\sim}{x})]$ είναι <u>φθίνουσα</u> ως προς θ.

Ισχύει το ακόλουθο Πόρισμα.

<u>Πόρισμα 1</u> Έστω X τ.μ. με σ. πιθανότητας (ή σ. πυκνότητας) $f(x;\theta)$ από την ΕΟΚ. Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ τ.δ. μεγέθους n από αυτήν την κατανομή. Ισχύει ότι:

$$f(x;\theta)=c(\theta)\exp\{Q(\theta)T(x)\}h(x)$$

Για τον έλεγχο της $H_0: \theta\le\theta_0$ ως προς $H_1: \theta>\theta_0$ η Ο.Ι.Ε. δίνεται από τις σχέσεις: $\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x})>c' \\ \delta, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x})=c' \\ 0, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x})<c'\end{cases}$

αν η $Q(\theta)$ είναι αύξουσα και από τις σχέσεις

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x})<c' \\ \delta, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x})=c' \\ 0, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x})>c'\end{cases}$$

αν η $Q(\theta)$ είναι φθίνουσα.

Για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0: \theta\ge\theta_0$ ως προς $H_1: \theta<\theta_0$ η Ο.Ι.Ε δίνεται από τις σχέσεις $\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x})<c' \\ \delta, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x})=c' \\ 0, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x})>c'\end{cases}$

αν η $Q(\theta)$ είναι αύξουσα και από τις σχέσεις $\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x})>c' \\ \delta, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x})=c' \\ 0, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x})<c'\end{cases}$ αν η $Q(\theta)$ είναι φθίνουσα.

<u>Παράδειγμα</u> Αν $X_1,\dots,X_{20}\sim Poisson(\theta)$ να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο της $H_0: \theta=\frac{1}{10}$ ως προς $H_1: \theta>1/10$ σε σ.σ. α.

<u>Λύση</u> Η Poisson $\in$ ΕΟΚ διότι $f(x;\theta)=e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}$

$=e^{-\theta}\exp\{\log\theta\cdot x\}\frac{1}{x!}$, όπου $c(\theta)=e^{-\theta}$, $Q(\theta)=\log\theta$

$T(x)=x$, $h(x)=\frac{1}{x!}$. Όμως $Q(\theta)=\log\theta\uparrow$. Η $f(x;\theta)$ έχει την ιδιότητα του ΜΛΠ ως προς την $T(x)=x$.

Επιπλέον αν $\underset{\sim}{x}=(x_1,\dots,x_n)$ τ.δ. από την Poisson (θ)

$$L(\underset{\sim}{x};\theta)=e^{-n\theta}\exp\{\log\theta\sum_{i=1}^n x_i\}\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!},$$

$c(\theta)=e^{-n\theta}$, $Q(\theta)=\log\theta$, $T(\underset{\sim}{x})=\sum_{i=1}^n x_i$, $h(\underset{\sim}{x})=\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}$

Η πιθανοφάνεια έχει την ιδιότητα ΜΛΠ ως προς τη συνάρτηση $T(\underline{x})=\sum_{i=1}^{n} x_i$, $n=20$. Συνεπώς, η Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο της υπόθεσης: $H_0: \theta=\theta_0=\frac{1}{10}$ ως προς $H_1: \theta>\frac{1}{10}$ είναι

$$\phi(\underline{x})=\begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i > c' \\ \delta, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i = c' \\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i < c' \end{cases}$$ και

$$\alpha = E_{\theta_0}[\phi(\underline{x})]$$

Όμως $\alpha = E_{\theta_0}[\phi(\underline{x})] = P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i > c'\right) + \delta P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i = c'\right)$

$$\Rightarrow P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \le c'\right) - \delta P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i = c'\right) = 1-\alpha$$

Αλλά $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{20} x_i \sim Poisson\left(20\,\frac{1}{10}\right) \equiv Poissom(2)$.

Τα c', δ βρίσκονται με τη βοήθεια πινάκων. Έτσι, αν $\alpha=0.05$ έχουμε $c'=5$, $\delta=\frac{334}{361}=0.9252$. Συνεπώς,

$$\phi(\underline{x})=\begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} x_i > 5 \\ \delta, & \sum_{i=1}^{n} x_i = 5 \\ 0, & \sum_{i=1}^{n} x_i < 5 \end{cases}$$

διότι για $Poisson(2)$ έχουμε $P(X\le 5)=0.983$ ενώ $P(X\le 4)=0.947$

Άρα $c'=5$ και $0.983-\delta P(X=5)=0.95$

Όμως $P(X=5)=e^{-2}\frac{2^5}{5!}=0.036089$

Άρα $-\delta\cdot 0.036 = 0.95-0.983 \Rightarrow \delta=\frac{334}{361}=0.9252$.

<u>Παράδειγμα</u> Σε ένα τ.δ. μεγέθους $n=25$ από την διωνυμική κατανομή $Bin(1,\theta)$, $\theta\in(0,1)$ βρέθηκε $\sum_{i=1}^{25} x_i = 14$. Να ελεγχθούν οι υποθέσεις $H_0: \theta\le 0.05$ ως προς $H_1: \theta>0.05$ σε σ.σ. $\alpha=0.01$.

<u>Λύση</u> $Bin(1,\theta) \in EOK$ διότι

$$P(X=x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} = (1-\theta)\exp\left\{x \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right\},$$

όπου $Q(\theta) = \log \frac{\theta}{1-\theta} \nearrow$ και άρα η $P\{X=x\}$ έχει την ιδιότητα του ΜΛΠ ως προς την $T(x) = x$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5, ο Ο.Ι.Ε. δίνεται από τη σχέση

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{25} x_i > c' \\ \delta, & \text{αν } \sum_{i=1}^{25} x_i = c' \\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{25} x_i < c' \end{cases}$$

$$\alpha = P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i > c'\right) + \delta P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i = c'\right) = E_{\theta_0}[\phi(\underset{\sim}{x})]$$

Άρα $P_{0.05}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \le c'\right) - \delta P_{0.05}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i = c'\right) = 0.99$

Η στ.σ. $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(25,\theta)$. Από πίνακες της διωνυμικής είναι $P_{0.05}\left(\sum_{i=1}^{25} x_i \le 4\right) = 0.993 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ <u>$c' = 4$</u> Συνεπώς $\delta P_{0.05}\left(\sum_{i=1}^{25} x_i = 4\right) = 0.003$

και $$\delta = \frac{0.003}{\binom{25}{4}(0.05)^4(0.95)^{21}} = \frac{0.003}{0.026} \cong 0.11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta \cong 0.11}$$

<u>Παρατήρηση</u> Η οικογένεια κανονικών κατανομών $N(\mu,\sigma^2)$ $\in EOK$

(i) $\mu = \theta$, σ^2 γνωστό $f(x;\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta)^2\right\}$

Είναι

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right\} \exp\left\{\frac{\theta x}{\sigma^2}\right\} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$C(\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right\}$, $Q(\theta) = \frac{\theta}{\sigma^2}$, $T(x) = x$,

$h(x) = \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$

(ii) μ = γνωστό, $\sigma^2 = \theta$, $c(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}$, $Q(\theta) = -\frac{1}{2\theta}$,
$h(x) = 1$, $T(x) = (x-\mu)^2$

Παράδειγμα Η διάρκεια ζωής ενός λαμπτήρα ακολουθεί την $N(\theta, 150^2)$. Δείγμα 25 λαμπτήρων έδωσε $\bar{x} = 1730$ ώρες. Να κατασκευαστεί ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0: \theta = 1800$ ως προς $H_1: \theta < 1800$ σε σ.σ. $\alpha = 0.01$.

Λύση $N(\theta, 150^2) \in$ ΕΟΚ με $Q(\theta) = \frac{\theta}{\sigma^2} \nearrow$ (αύξουσα) και $T(x) = x$. $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$.

$H_0: \theta = \theta_0 = 1800$
$H_1: \theta < 1800$

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i < c' \\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i > c' \end{cases}$$

$E_{\theta_0}[\phi(\underline{x})] = \alpha$

$P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < c'\right) = \alpha \Rightarrow P_{\theta_0}(25\bar{x} < c') = 0.01$

$\bar{x} \underset{H_0}{\sim} N\left(\theta_0, \frac{150^2}{25}\right) \equiv N(\theta_0, 30^2)$

Είναι $P(25\bar{x} < c') = P\left(\bar{x} < \frac{c'}{25}\right) = P(\bar{x} < c_1')$, $c_1' = \frac{c'}{25}$.

Άρα $P\left(\frac{\bar{x} - 1800}{30} < \frac{c_1' - 1800}{30}\right) = 0.01 \Rightarrow \frac{c_1' - 1800}{30} = -z_{0.01}$
$= -z_\alpha = -2.3263 \Rightarrow c_1' \cong 1730.2$ δηλαδή

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \bar{x} < 1730.2 \\ 0, & \text{αν } \bar{x} > 1730.2 \end{cases}$$

Όμως $\bar{x} = 1730$ (από το δείγμα). Θα μπορούσαμε να πούμε ότι απορρίπτουμε την Ho με επιφύλαξη. ⊠

<u>Παράδειγμα</u> Η τ.μ. X παριστάνει την ετήσια βροχόπτωση σε κάποιο Μετεωρολογικό σταθμό και ακολουθεί την $N(\theta, 7.5^2)$. Στα 10 τελευταία χρόνια είχαμε:

$$\underset{\sim}{X} = (76.25, 85.25, 69.75, 73.50, 87.50, 67.25, 75.50, 70.75, 79.25, 64.50)$$

Να βρεθεί ΟΙΕ για τον έλεγχο της $H_0: \theta = 75$ ως προς $H_1: \theta < 75$, σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$.

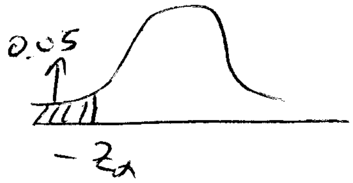
<u>Λύση</u> $\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } V(\underset{\sim}{x}) < c \\ 0, & \text{αν } V(\underset{\sim}{x}) > c \end{cases}, \quad V(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

c είναι τ.ω. $E_{\theta_0}[\phi(\underset{\sim}{x})] = 0.05 = \alpha$

$$P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < c\right) = P_{\theta_0}(\overline{x} < c_1), \quad c_1 = \frac{c}{n}$$

$\overline{x} \sim N(\theta, 5.625)$ Είναι $P(\overline{x} < c_1) \overset{H_0}{=} P\left(\frac{\overline{x} - 75}{\sqrt{5.625}} < \frac{c_1 - 75}{\sqrt{5.625}}\right)$

$$= \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{c_1 - 75}{2.3717} = -1.64 = -z_{0.05} = -z_\alpha$$



$$\Rightarrow \underline{c_1 = 71.11}$$

Άρα $\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \overline{x} < 71.11 \\ 0, & \text{αν } \overline{x} > 71.11 \end{cases}$ Στο δείγμα $\overline{x} = 74.95$

Άρα δεχόμαστε H_0.

<u>Παράδειγμα</u> Οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_{25} \sim N(0, \sigma^2)$. Να βρεθεί ΟΙΕ για τον έλεγχο της $H_0: \sigma \leq 2$ ως προς την $H_1: \sigma > 2$ σε σ.σ. $\alpha = 0.05$. Να γίνει έλεγχος αν $\sum_{j=1}^{25} x_j^2 = 120$.

<u>Λύση</u> $N(0,\theta) \in$ ΕΟΚ, $Q(\theta) = -\frac{1}{2\theta}$, $T(x) = x^2$

$\theta = \sigma^2$

$V(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{25} T(x_i) = \sum_{i=1}^{25} x_i^2$ $\quad H_0: \theta \leq 4 = \theta_0$

$H_1: \theta > 4$ $\quad , \theta = \sigma^2$

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, \text{ αν } \sum_{i=1}^{25} x_i^2 \geq c' \\ 0, \text{ αν } \sum_{i=1}^{25} x_i^2 < c' \end{cases}$$

όπου c': $\alpha = E_{\theta_0}[\phi(\underline{x})]$

Άρα $\alpha = E_{\theta_0}[\phi(\underline{x})] = P\left(\sum_{i=1}^{25} x_i^2 \geq c'\right) = 0.05$

$X \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2 \Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{25} X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$

$\Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i^2 \geq c'\right) = P\left(\underbrace{\dfrac{\sum_{i=1}^{25} x_i^2}{4}}_{\sim \chi_{25}^2} \geq c'_1 = \frac{c'}{4}\right) = 0.05$

Από πίνακες της χ_{25}^2 βρίσκουμε $c'_1 = 37.652$.

$\Rightarrow \frac{c'}{4} = c'_1 = 37.652 \Rightarrow$ <u>$c' = 150.6$</u>

Η ελεγχοσυνάρτηση είναι: $\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{25} X_i^2 \geq 150.6 \\ 0, & \sum_{i=1}^{25} x_i^2 < 150.6 \end{cases}$

Στο δείγμα $\sum_{i=1}^{25} X_i^2 = 120$

Άρα, δεχόμαστε Ho σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$.