Κεφάλαιο 2

Εκτίμηση Παραμέτρων σε Σημείο

2.1 Βασικές Έννοιες - Ορισμοί

Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ τυχαίο διάνυσμα με συνιστώσες τις τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$. Το τυχαίο διάνυσμα ακολουθεί μία κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\theta})$ ή με συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\theta})$.

Ένα τυχαίο δείγμα (τ.δ.) από τον παραπάνω πληθυσμό είναι το σύνολο $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητων τ.μ. και ισόνομων με την κατανομή του πληθυσμού τ.μ.

<u>Παράμετρος:</u> Η παράμετρος θ ή το διάνυσμα παραμέτρων $\underset{\sim}{\theta}=(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ είναι η ποσότητα (ή οι ποσότητες) που εμπλέκονται στην κατανομή του πληθυσμού αλλά είναι άγνωστες.

<u>Παρατήρηση:</u> (i) Οι παράμετροι υποθέτουμε ότι είναι σταθερές ποσότητες.

(ii) Πολλές από τις ποσότητες που ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε για την κατανομή του πληθυσμού π.χ. η μέση τιμή, είναι συνάρτηση των παραμέτρων θ.

(iii) Συμβολίζουμε $f(x;\theta)$ ή $p(x;\theta)$ την κατανομή του πληθυσμού, δηλώνοντας ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) ή η συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) είναι συνάρτηση του x, αλλά περιέχει και την άγνωστη αλλά σταθερή παράμετρο θ (ή $\underset{\sim}{\theta}$).

Παραμετρικός χώρος $\underset{\sim}{\Theta}$: Το σύνολο των δυνατών τιμών της παραμέτρου θ.

π.χ. Αν $X_1, X_2, \dots, X_n \sim Bin(n,p)$ με $p \in (0,1)$ τότε $\underset{\sim}{\Theta} = (0,1)$.

Παραμετρική συνάρτηση: Μία συνάρτηση της παραμέτρου, $g(\theta)$ ή $g(\underset{\sim}{\theta})$. Η παράμετρος θ ή $\underset{\sim}{\theta}$ μπορεί να είναι μονοδιάστατο ή πολυδιάστατο διάνυσμα. ☒

2.2 Σημειακή Εκτίμηση

Έστω τ.δ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ από πληθυσμό $f(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\theta})$ με $\theta \in \underset{\sim}{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k$ και $g(\underset{\sim}{\theta})$ μία συνάρτηση του $\underset{\sim}{\theta}$. Τότε $g(\underset{\sim}{\theta}): \underset{\sim}{\Theta} \mapsto \mathbb{R}^v$, $1 \le v \le k$.

Εκτιμητής: Η συνάρτηση των τ.μ. του τ.δ. $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ με τιμές στον $\mathbb{R}^\nu$ που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της $g(\underset{\sim}{\theta})$ καλείται εκτιμητής της $g(\underset{\sim}{\theta})$.

Για τον εκτιμητή του $\underset{\sim}{\theta}$ αρκετά συχνά χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\hat{\underset{\sim}{\theta}}$. ⊠

Η εκτίμηση του $g(\underset{\sim}{\theta})$ μπορεί να γίνει:

(α) Με ένα συγκεκριμένο αριθμό.

(β) Με ένα διάστημα.

Στο (α) έχουμε: Σημειακή Εκτίμηση.

Στο (β) έχουμε: Διαστηματική Εκτίμηση.

Στο Κεφάλαιο αυτό μελετάμε την πρώτη περίπτωση (α).

Χρειάζεται να εισαχθούν κριτήρια/ιδιότητες αξιολόγησης των εκτιμητών.

1º Κριτήριο: Αμεροληψία

Ο εκτιμητής $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ της $g(\underset{\sim}{\theta})$ καλείται αμερόληπτος αν $ET(X_1, \dots, X_n) = g(\underset{\sim}{\theta})$, $\forall \underset{\sim}{\theta} \in \underset{\sim}{\Theta}$.

Εάν υπάρχει αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\underset{\sim}{\theta})$, λέμε ότι η $g(\underset{\sim}{\theta})$ είναι εκτιμήσιμη.

Μεροληψία: Είναι η διαφορά $ET - g(\underset{\sim}{\theta})$ και συμβολίζεται με $bias(T)$, δηλαδή:

$$bias(T) = ET - g(\underset{\sim}{\theta}). \boxtimes$$

Το κριτήριο της αμεροληψίας στηρίζεται στη μέση τιμή της εκτιμήτριας.

Παραδείγματα

1. Δίνεται τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από ένα πληθυσμό με κατανομή Bernoulli(p). Ο εκτιμητής $\hat{p} = T(X_1, \ldots, X_n) = T = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του p.

Πρέπει $ET = p \ \forall p$.

Όμως, $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n p = p$. Άρα, ο

$\hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής της παραμέτρου p. $\boxtimes$

2. Η δειγματική μέση τιμή (ή μέσος του δείγματος) είναι πάντοτε (για κάθε κατανομή) ένας αμερόληπτος εκτιμητής του μέσου μ του πληθυσμού.

Πράγματι, $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$

είναι αμερόληπτος, διότι:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$= \frac{1}{n} n\mu = \mu. \boxtimes$$

3. Οι ροπές κ-τάξεως του δείγματος

$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ είναι αμερόληπτοι

εκτιμητές των αντίστοιχων ροπών του πληθυσμού, $\mu_k = E(X^k)$, $k \geq 1$.

Πράγματι,

$$E(m_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X^k)$$

$$= \frac{1}{n} n\mu_k = \mu_k \Rightarrow \hat{m}_k = \mu_k. \boxtimes$$

Οι ιδιότητες της αμεροληψίας και της μεροληψίας, αν και είναι χρήσιμες. Δεν μας δίνουν κάποια πληροφορία για τη μεταβλητότητα του εκτιμητή, δηλ. την ακρίβεια της εκτίμησης. Αυτό επιτυγχάνεται με το:

<u>2ο Κριτήριο: Ελάχιστη Διακύμανση</u>

Το σφάλμα ενός εκτιμητή T του $g(\underset{\sim}{\theta})$ μπορεί να οριστεί ως:

(i) $|T-g(\underset{\sim}{\theta})|$: Απόλυτο Σφάλμα

(ii) $[T-g(\underset{\sim}{\theta})]^2$: Τετραγωνικό Σφάλμα

(iii) $E[T-g(\underset{\sim}{\theta})]^2$: Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean Square Error, MSE).

Για το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ενός εκτιμητή T, γράφουμε: $MSE(T)$.

<u>Πρόταση</u> Ισχύει ότι:

$$MSE(T) = Var(T) + bias^2(T).$$

Απόδειξη.

$$MSE(T) = E[T-g(\underset{\sim}{\theta})]^2 = E[T-ET+ET-g(\underset{\sim}{\theta})]^2$$
$$= E[(T-ET)-(g(\underset{\sim}{\theta})-E(T))]^2$$

$$= E(T-ET)^2 + E[(g(\underset{\sim}{\theta}) - ET)^2] - 2E[(T-ET)(g(\underset{\sim}{\theta})-ET)]$$
$$= Var(T) + [g(\underset{\sim}{\theta}) - E(T)]^2$$
$$= Var(T) + bias^2(T). \boxtimes$$

<u>Πρόταση</u> Για τους αμερόληπτους εκτιμητές ισχύει ότι: $MSE(T) = Var(T)$. $\boxtimes$

Άρα, μπορούμε να εισάγουμε το κριτήριο της ελάχιστης διασποράς για να "περιορίσουμε" την κλάση των αμερόληπτων εκτιμητών. Έτσι, καταλήγουμε στους Αμερόληπτους Ομοιόμορφα Ελάχιστης Διασποράς Εκτιμητές (ΑΟΕΔ εκτιμητές).

<u>Ορισμός:</u> Ο εκτιμητής $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ της $g(\underset{\sim}{\theta})$ καλείται αμερόληπτος ομοιόμορφα ελάχιστης διακύμανσης (ή διασποράς) (ΑΟΕΔ) αν είναι αμερόληπτος και έχει την μικρότερη διακύμανση μεταξύ όλων των αμερόληπτων εκτιμητών $\forall \theta \in \underset{\sim}{\Theta}$, δηλαδή αν ο T_1 είναι επίσης αμερόληπτος, ισχύει ότι $Var(T) \leq Var(T_1)$,

$\forall \theta \in \tilde{\Theta}$.

Παρατηρήσεις: (i) Η εύρεση ΑΟΕΔ εκτιμητή είναι ένα από τα βασικότερα προβλήματα στην Εκτιμητική.

(ii) Η πρακτική δυσκολία είναι ότι (α) αναφέρεται στο σύνολο των αμερόληπτων εκτιμητών και (β) απαιτεί τον υπολογισμό της διακύμανσης κάθε μέλους του συνόλου των εκτιμητών. Τόσο το (α), όσο και το (β) είναι δύσκολο να επιβεβαιωθούν.

(iii) Εκτός από τον καλύτερο αμερόληπτο εκτιμητή, ένας άλλος εκτιμητής με καλές ιδιότητες είναι ο καλύτερος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής (best linear unbiased estimator, BLUE). Έχει επιπλέον την ιδιότητα ότι έχει γραμμική μορφή ως προς τις τ.μ. του δείγματος, δηλ. $T = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n$. Η οικογένεια εκτιμητών που είναι αμερόληπτοι και γραμμικοί είναι υποσύνολο της οικογένειας των εκτιμητών που είναι αμερόληπτοι.

(iv) Πρακτικά, η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι σημαντική διότι εξασφαλίζει μία απλή μορφή για τον εκτιμητή που συνεπάγεται ευκολία στον υπολογισμό της κατανομής και των ιδιοτήτων του εκτιμητή. ⊠

<u>Παράδειγμα</u> Έστω πληθυσμός από Κανονική Κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$.

(i) Να δειχθεί ότι $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του σ^2 και (ii) να υπολογισθεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του s^2. (iii) Να βρεθεί το MSE της συνάρτησης $T=cs^2$, όπου c σταθερός αριθμός. (iv) Να βρεθεί το c για το οποίο ελαχιστοποιείται το MSE της T και να γίνει σύγκριση των δύο εκτιμητών.

<u>Λύση</u> (i) Ισχύει ότι: $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$

με $E\left[\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right]=n-1 \Rightarrow E(s^2)=\sigma^2$

Άρα s^2 αμερόληπτος εκτιμητής του σ^2.

(ii) $Var\left[\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right]=2(n-1)\Rightarrow Var(s^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$.

Άρα $MSE(s^2) = Var(s^2) = \dfrac{2\sigma^4}{n-1}$.

(iii) $E(T) = E(cs^2) = cE(s^2) = c\sigma^2$

$$MSE(T) = E(cs^2 - \sigma^2)^2$$
$$= E(c(s^2-\sigma^2) + c\sigma^2 - \sigma^2)^2$$
$$= E\{[c(s^2-\sigma^2)]^2 + \sigma^4(1-c)^2 - 2\sigma^2(1-c)c(s^2-\sigma^2)\}$$
$$= c^2E(s^2-\sigma^2) + \sigma^4(1-c)^2 - 0 = c^2 Var(s^2)$$
$$+\sigma^4(1-c)^2 = c^2\frac{2\sigma^4}{n-1} + \sigma^4(1-c)^2$$
$$= \left[\frac{2c^2}{n-1} + (1-c)^2\right]\sigma^4$$

(iv) $\min(MSE(T)) = \min\limits_c \left\{\dfrac{2c^2}{n-1} + (1-c)^2\right\}$

$$= \min_c \left\{\frac{2c^2 + (n-1)(1-c)^2}{n-1}\right\}$$
$$= \min_c \{2c^2 + (n-1)(1-2c+c^2)\}$$
$$= \min_c \{c^2(2+n-1) - 2(n-1)c + (n-1)\}$$

Ορίζουμε $f(c) = c^2(n+1) - 2(n-1)c + (n-1)$

$f'(c) = 2c(n+1) - 2(n-1)$

$f'(c) = 0 \Rightarrow 2c(n+1) - 2(n-1) = 0 \Rightarrow c = \dfrac{n-1}{n+1}$

και $f''(c) = 2(n+1) > 0$. Για $c = c^* = \frac{n-1}{n+1}$

έχουμε $T^* = c^* S^2 = \frac{n-1}{n+1} S^2 = \frac{S^2}{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n+1}$.

Για $c = c^* \Rightarrow MSE(T^*) = \frac{2\sigma^4}{n+1}$.

Έχουμε δει ότι: $MSE(T) = Var(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$.

Άρα, $MSE(T^*) < MSE(S^2)$, διότι

$$\frac{2\sigma^4}{n+1} < \frac{2\sigma^4}{n-1} \Rightarrow n-1 < n+1 \ \forall n \in \mathbb{N}$$ ισχύει.

Καταλήγουμε ότι με κριτήριο την αμεροληψία, ο εκτιμητής S^2 είναι καλύτερος ενώ με κριτήριο το MSE ο εκτιμητής $T = \frac{n-1}{n+1} S^2$ είναι καλύτερος. ⊠

2.3 Αναζήτηση ΑΟΕΔ εκτιμητών με την ανισότητα Cramer-Rao

Στόχος είναι να βρούμε ένα κάτω φράγμα για τη διασπορά $Var(T)$ ώστε σε επόμενο στάδιο να αναζητήσουμε τον εκτιμητή με διακύμανση το κάτω φράγμα.

<u>Ορισμός</u> (Μέτρο πληροφορίας του Fisher).

Η ποσότητα: $I_X(\theta)$ καλείται <u>μέτρο</u>

πληροφορίας του Fisher, όπου X είναι η τ.μ. που περιγράφει τον πληθυσμό και θ η άγνωστη παράμετρος. Ορίζεται ως εξής:

$$I_X(\theta) = \begin{cases} E\left(\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial \theta}\right)^2, & X \text{ συνεχής} \\ E\left(\frac{\partial \ln p(X,\theta)}{\partial \theta}\right)^2, & X \text{ διακριτή.} \end{cases}$$

$\boxtimes$

Παράδειγμα

Έστω $X \sim Bernoulli(p)$. Υπολογίστε το $I_X(p)$.

Λύση Έστω $\theta = p$. Η σ.π. $p(x;\theta)$ είναι:

$$p(x;\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \quad x = 0,1.$$

$$\ln p(x;\theta) = x\ln(\theta) + (1-x)\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(p(x;\theta)) = \frac{\partial}{\partial\theta}[x\ln(\theta) + (1-x)\ln(1-\theta)]$$

$$= \frac{x}{\theta} + \frac{1-x}{1-\theta}(-1) = \frac{x}{\theta} - \frac{1-x}{1-\theta}.$$

Άρα $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(p(X;\theta)) = \frac{X}{\theta} - \frac{1-X}{1-\theta}.$

$$E\left[\left(\frac{X}{\theta}-\frac{1-X}{1-\theta}\right)^2\right]=E\left[\frac{X^2}{\theta^2}+\frac{(1-X)^2}{(1-\theta)^2}-2\frac{X(1-X)}{\theta(1-\theta)}\right]$$

$$=E\left(\frac{X^2}{\theta^2}\right)+E\left(\frac{(1-X)^2}{(1-\theta)^2}\right)-2E\left(\frac{X(1-X)}{\theta(1-\theta)}\right)$$

$$=\frac{E(X^2)}{\theta^2}+\frac{E(1-X)^2}{(1-\theta)^2}-2\frac{E[X(1-X)]}{\theta(1-\theta)}$$

Όμως αν $X\sim Bernoulli(p) \Rightarrow E(X)=p=\theta$ και $Var(X)=pq=\theta(1-\theta)$. Επιπλέον, $E(X^2)=Var(X)+(E(X))^2$.

Καταλήγουμε: $I_X(p)=\dfrac{1}{p(1-p)}$. ∎

Παρατηρήσεις:

(i) Ο υπολογισμός του I_X με τον ορισμό έχει αρκετές πράξεις και οι αναμενόμενες τιμές των τ.μ. που εμφανίζονται μπορεί να είναι πολύπλοκες.

(ii) Κάτω από κατάλληλες υποθέσεις, που θα δούμε παρακάτω το I_X μπορεί να υπολογισθεί πιο εύκολα.

(iii) Από τον τρόπο που ορίζεται, ως αναμενόμενη τιμή θετικής ποσότητας, ισχύει ότι:

$I_X(\theta) \geq 0$.

(iv) Το $I_X(\theta)$ είναι ποσότητα που σχετίζεται με την ακρίβεια ενός εκτιμητή της παραμέτρου θ. Όσο μεγαλύτερο είναι το $I_X(\theta)$ τόσο μεγαλύτερη είναι η πληροφορία που έχουμε για αυτό και συνεπώς τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια θα επιτύχουμε από τον εκτιμητή.

(v) Το μέτρο πληροφορίας του Fisher ορίζεται και για τη πολυμεταβλητή παράμετρο $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Τότε είναι ένας συμμετρικός, τετραγωνικός πίνακας $[I_X(\underset{\sim}{\theta})]_{k \times k}$ και το (i,j) στοιχείο του ορίζεται ως εξής:

$$E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X;\underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_i}\right)\left(\frac{\partial \ln f(X;\underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_j}\right)\right].$$

Για $k=2$, $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ και

$$I_X(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix}, \text{ όπου}$$

$$I_{11} = E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X;\underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_1}\right)^2\right]$$

$$I_{12} = E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X;\underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_1}\right)\left(\frac{\partial \ln f(X;\underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_2}\right)\right]$$

$$I_{21} = E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X;\underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_2}\right)\left(\frac{\partial \ln f(X;\underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_1}\right)\right]$$

και

$$I_{22} = E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X;\underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_2}\right)^2\right]. \boxtimes$$

Δώσαμε τον ορισμό του μέτρου πληροφορίας κατά Fisher για μία τ.μ. X. Το <u>μέτρο πληροφορίας</u> για το τ.δ. $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ είναι: $I_{\underset{\sim}{X}}(\theta) = n\,I_X(\theta)$ δηλαδή είναι n φορές την πληροφορία του πληθυσμού για το θ, όπου n: το μέγεθος του δείγματος.

Ας δούμε παραδείγματα υπολογισμού του μέτρου πληροφορίας του Fisher.

Παραδείγματα

1. Έστω $X \sim Poisson(\lambda)$. Βρείτε το $I_X(\theta)$, $\theta=\lambda$.

Λύση Η σ.π. της Poisson είναι:

$$p(x;\theta)=e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!},\ x=0,1,2,\ldots$$

$$\ln p(x;\theta)=-\theta+x\ln\theta-\ln x!$$

$$\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial\theta}=-1+\frac{x}{\theta}.\ \text{Άρα}$$

$$E\left(-1+\frac{X}{\theta}\right)^2=E\left(1+\frac{X^2}{\theta^2}-2\frac{X}{\theta}\right)$$

$$=1+\frac{E(X^2)}{\theta^2}-2\frac{E(X)}{\theta}$$

$$=1+\frac{\left(Var(X)+\left(E(X)\right)^2\right)}{\theta^2}-2\frac{\theta}{\theta}$$

$$=1+\frac{\theta+\theta^2}{\theta^2}-2=-1+\frac{1}{\theta}+1=\frac{1}{\theta}.$$

Άρα, $I_X(\theta)=\frac{1}{\theta}$. ⊠

2. Έστω $X \sim \mathcal{U}(0,\theta)$. Βρείτε το $I_X(\theta)$.

<u>Λύση</u> Η σ.π.π. της Ομοιόμορφης στο διάστημα $(0,\theta)$ είναι: $f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta}$, $x \in (0,\theta)$.

$\ln f(x;\theta) = -\ln\theta$ και $\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\theta}$.

Άρα, $I_X(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]$

$= E\left(-\frac{1}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2}$. ⊠

3. Έστω $X \sim Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$. Βρείτε το $I_X(\theta)$.

<u>Λύση</u> Η σ.π.π. της Εκθετικής με παράμετρο $\frac{1}{\theta}$ είναι: $f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x \geq 0$ με

$E(X) = \theta$, $Var(X) = \theta^2$.

$\ln f(x;\theta) = -\ln(\theta) - \frac{1}{\theta}x$

$\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}X$.

Άρα $I_X(\theta) = E\left(\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial\theta}\right)^2$

$= E\left(-\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}X\right)^2$

$$= E\left[\frac{(X-\theta)^2}{\theta^4}\right] = \frac{1}{\theta^4} E[(X-\theta)^2] = \frac{1}{\theta^4} Var(X)$$

$$= \frac{1}{\theta^4}\theta^2 = \frac{1}{\theta^2}. \boxtimes$$

4. Έστω X μία τ.μ. με σ.π.π. $f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x > \theta$. Βρείτε το $I_X(\theta)$.

<u>Λύση</u> Είναι $\ln f(x;\theta) = -(x-\theta)$ και

$$\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-(x-\theta)\right) = 1.$$

Άρα, $I_X(\theta) = E(1^2) = 1$. Επομένως,

$I_X(\theta) = 1$. $\boxtimes$

5. Έστω $X \sim Gamma\left(a, \frac{1}{\lambda}\right)$ με a γνωστό και λ άγνωστο. Βρείτε το $I_X(\theta)$.

<u>Λύση</u> Είναι $f_X(x;\theta) = \frac{1}{\Gamma(a)\lambda^a} x^{a-1} e^{-\frac{x}{\lambda}}$,

$x \geq 0$, όπου $\theta = \lambda$. Είναι $E(X) = a\lambda$ και $Var(X) = a\lambda^2$.

Υπολογίζουμε:

$$\ln f_X(x;\theta=\lambda) = -\ln\Gamma(a) - a\ln\lambda + (a-1)\ln x - \frac{x}{\lambda}.$$

και $\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta} \overset{\theta=\lambda}{=\!=} -\frac{a}{\lambda}+\frac{x}{\lambda^2}$

$=\frac{1}{\lambda^2}(x-a\lambda)$

Άρα,

$$I_X(\theta=\lambda)=E\left(\frac{1}{\lambda^2}(X-a\lambda)\right)^2$$

$$=\frac{1}{\lambda^4}E[(X-a\lambda)^2]=\frac{1}{\lambda^4}Var(X)$$

$$=\frac{1}{\lambda^4}a\lambda^2=\frac{a}{\lambda^2}. \boxtimes$$

6. Έστω $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ με $\underset{\sim}{\theta}=(\mu,\sigma^2)$ το άγνωστο διάνυσμα των παραμέτρων. Υπολογίστε τον πίνακα πληροφορίας $I_X(\underset{\sim}{\theta})$.

<u>Λύση</u> Η σ.π.π. της Κανονικής Κατανομής είναι: $f_X(x;\underset{\sim}{\theta})=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, x\in\mathbb{R}$.

$$=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, x\in\mathbb{R},$$

$\mu\in\mathbb{R}, \sigma^2>0$.

Για την Κανονική κατανομή, η κεντρική
ροπή κ-τάξεως είναι:

$$E(X-\mu)^k = \begin{cases} 0, & k=1,3,5,\dots \\ \sigma^k (k-1)(k-3)\cdots 3\cdot 1, & k=2,4,\dots \end{cases}$$

Είναι: $\ln f_X(x;\underset{\sim}{\theta}) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2$.

Αν $\theta_1=\mu$, $\theta_2=\sigma^2$ τότε ο πίνακας πληροφορίας του Fisher 2×2 είναι:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας είναι συμμετρικός και άρα αρκεί να υπολογιστούν τα στοιχεία:

$$A = E\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta_1)}{\partial \theta_1}\right)^2, \quad \Gamma = E\left(\frac{\partial \log f(x;\theta_2)}{\partial \theta_2}\right)^2$$

και $$B = E\left[\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta_1)}{\partial \theta_1}\right)\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta_2)}{\partial \theta_2}\right)\right].$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial \ln f(x;\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}2(x-\mu)(-1) = \frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln f(x;\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{2}\frac{2\pi}{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(x-\mu)^2$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^4} = \frac{1}{2\sigma^2}\left(-1 + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right).$$

Άρα, $A = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma^2}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^4} E(X-\mu)^2$

$$= \frac{1}{\sigma^4} Var(X) = \frac{1}{\sigma^2}.$$

$$B = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma^2}\right)\frac{1}{2\sigma^2}\left(-1+\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sigma^6} E\left[(X-\mu)\left(-\sigma^2 + (X-\mu)^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sigma^6}\left[-\sigma^2 E(X-\mu) + E(X-\mu)^3\right] = 0$$

$$\Gamma = E\left(\frac{1}{2\sigma^2}\left(-1+\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{4\sigma^4} E\left(1 + \frac{(X-\mu)^4}{\sigma^4} - 2\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sigma^4}\left(1 + \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - \frac{2\sigma^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\sigma^4}.$$

Άρα, ο πίνακας πληροφορίας Fisher είναι:

$$I_X(\underset{\sim}{\theta}) = \begin{bmatrix} (\sigma^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (2\sigma^4)^{-1} \end{bmatrix}. \boxtimes$$

Ορισμός (Συνάρτηση Score)

Για μία τ.μ. X ορίζεται ως εξής:

$$s(X;\theta) = \frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial \theta}, \text{ όπου}$$

$f(X;\theta)$ η σ.π.π. της X εξαρτώμενη από την παράμετρο θ. ☒

Για σ.π.π. για την οποία ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα Cramer-Rao

Αν $E[T(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \theta + b(\theta)$

τότε: $Var(T) \geq \dfrac{(1+b'(\theta))^2}{n I_X(\theta)}$.

Η απόδειξη παραλείπεται. ☒

Συνθήκες Ομαλότητας:

(1) Ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(2) Η $f(x;\theta)$ (ή η $p(x;\theta)$) είναι θετική σ' ένα σύνολο που δεν εξαρτάται από την

παράμετρο θ. Το σύνολο $D=\{x \mid f(x;\theta)>0\}$ ή $D=\{x \mid p(x;\theta)>0\}$ καλείται στήριγμα της κατανομής. Εναλλακτικά, η Συνθήκη 2 μας λέει ότι το στήριγμα της κατανομής D είναι ανεξάρτητο του θ.

(3) $\forall \theta \in \Theta$, $\forall x \in D$ υπάρχει η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial \theta}$ ή $\dfrac{\partial \ln p(X;\theta)}{\partial \theta}$.

(4) Ισχύει ότι:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \iiint_D \cdots \int f(x_1;\theta) \cdots f(x_n;\theta)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \iint_D \cdots \int \frac{\partial}{\partial \theta} [f(x_1;\theta) \cdots f(x_n;\theta)]\, dx_1 \ldots dx_n$$

δηλ. τα σύμβολα της ολοκλήρωσης και της παραγώγου μπορούν να "εναλλαχθούν"!

(5) Το μέτρο πληροφορίας του Fisher είναι γνήσια θετικό.

(6) Ισχύει ότι:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \iint_D \cdots \int T(x_1,\ldots,x_n) f(x_1;\theta) \cdots f(x_n;\theta)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int\int\cdots\int_D \frac{\partial}{\partial\theta}\left[T(x_1,\dots,x_n)f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta)\right]dx_1\dots dx_n$$

δηλαδή τα σύμβολα της ολοκλήρωσης και της παραγώγου μπορούν να "εναλλαχθούν"! ☒

<u>Παρατηρήσεις</u>: (i) Η ανισότητα:

$$Var(T) \geq \frac{(1+b'(\theta))^2}{n I_X(\theta)}$$ καλείται

ανισότητα Cramer-Rao και η ποσότητα:

$$\frac{(1+b'(\theta))^2}{n I_X(\theta)}$$ καλείται κάτω φράγμα

Cramer-Rao (ΚΦ C-R, lower bound C-R).

(ii) Το συμπέρασμα του Θεωρήματος είναι ότι η ελάχιστη δυνατή τιμή της διακύμανσης ενός εκτιμητή με μέση τιμή $\theta+b(\theta)$ είναι:

$$\frac{(1+b'(\theta))^2}{n I_X(\theta)}.$$

(iii) Αν ήταν εφικτό να εντοπίσουμε ποιος εκτιμητής έχει διακύμανση ίση με το κάτω φράγμα Cramer-Rao, τότε αυτός ο εκτιμητής θα είναι ο καλύτερος μεταξύ όλων όσων έχουν αναμενόμενη τιμή $\theta+b(\theta)$, διότι δεν υπάρχει άλλος εκτιμητής που να έχει μικρότερη διακύμανση.

(iv) Η ανισότητα Cramer-Rao γράφεται σε πιο γενική μορφή ως εξής:

$$Var(T) \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}E(T)\right)^2}{nI_X(\theta)}$$

(v) Σε περίπτωση που αναφερόμαστε σε αμερόληπτους εκτιμητές, δηλ. $E(T)=\theta$, τότε η ανισότητα Cramer-Rao γίνεται:

$$Var(T) \geq \frac{1}{nI_X(\theta)}. \boxtimes$$

<u>Συνάρτηση Score και συνθήκες ομαλότητας</u>

<u>Πρόταση:</u> Όταν οι συνθήκες ομαλότητας ισχύουν τότε: $E(s(X;\theta))=0$ δηλαδή η αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης score είναι μηδέν. $\boxtimes$

Η παραπάνω πρόταση είναι πολύ χρήσιμη στον υπολογισμό του Κ.Φ C-R.

Ας δούμε κάποια παραδείγματα.

Παραδείγματα

1. Πληθυσμός με κατανομή $f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x>0$. Εύρεση καλύτερου αμερόληπτου εκτιμητή για το θ με βάση ένα τ.δ. μεγέθους n.

Λύση $f_X(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x>0$ με μέση τιμή $\int_0^{\infty} x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=-\int_0^{\infty} x\, d(e^{-\frac{x}{\theta}})$

$=\left[-xe^{-\frac{x}{\theta}}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\theta}x}dx=\left[-\theta e^{-\frac{1}{\theta}x}\right]_0^{\infty}$

$=\theta$.

Τότε: $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\ln\theta-\frac{1}{\theta}X\right)$

$=-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}X$.

$E\left(-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}X\right)^2=E\left(\frac{X-\theta}{\theta^2}\right)^2=\frac{1}{\theta^4}E(X-\theta)^2$

$=\frac{1}{\theta^4}Var(X)=\frac{\theta^2}{\theta^4}=\frac{1}{\theta^2}$. Άρα $I_X(\theta)=\frac{1}{\theta^2}$.

Συνεπώς ΚΦC-R $=\frac{\theta^2}{n}$. Για τον αμερόληπτο εκτιμητή του θ, $\overline{X}$ με $E(\overline{X})=\theta$ και με $Var(\overline{X})=\frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}n\theta^2=\frac{\theta^2}{n}$, που ταυτίζεται με το Κ.Φ C-R έπεται ότι ο εκτιμητής $\overline{X}$ είναι ο καλύτερος αμερόληπτος ΑΟΕΔ εκτιμητής του θ. ⊠

Παρατήρηση: Οι συνθήκες ομαλότητας είναι απαραίτητες και περιοριστικές. Η Εκθετική Οικογένεια Κατανομών τις τηρεί, αλλά για οποιαδήποτε άλλη περίπτωση πρέπει να εξετάζονται. ⊠

Ας δούμε ένα αντιπαράδειγμα.

Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με σ.π.π. $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 < x < \theta$. Εύρεση ΑΟΕΔ εκτιμητή για το θ.

Λύση Έχουμε $\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta}$

και $E\left(\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2}$ Άρα,

$K\Phi\, C\text{-}R = \frac{\theta^2}{n}$. Συνεπώς, η ελάχιστη διακύμανση ενός αμερόληπτου εκτιμητή θα έπρεπε να είναι: $\frac{\theta^2}{n}$.

Όμως η $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ έχει σ.π.π.

$f_Y(y;\theta) = n y^{n-1} \frac{1}{\theta^n}, 0<y<\theta,$

με $y = X_{(n)}$.

$$E(Y) = \int_0^\theta n y^n \frac{1}{\theta^n}\, dy = \left[n \frac{y^{n+1}}{n+1} \frac{1}{\theta^n} \right]_0^\theta$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\theta \Rightarrow E(Y) = \frac{n}{n+1}\theta$$

Άρα $Y^* = \frac{n+1}{n} Y$ αμερόληπτος εκτιμητής του θ.

$$Var(Y^*) = Var\left(\frac{n+1}{n} Y\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 Var(Y)$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left[E(Y^2) - (E(Y))^2 \right].$$

Βρίσκουμε: $E(Y^2) = \frac{n}{n+2}\theta^2$.

Άρα

$$Var(Y^*) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left[\frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 \right]$$

$= \frac{1}{n(n+2)}\theta^2$. Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{1}{n(n+2)}\theta^2 < \frac{\theta^2}{n}.$$

Δηλαδή, υπάρχει αμερόληπτος εκτιμητής του θ που έχει μικρότερη διακύμανση

από το ΚΦ C-R. Αυτό συμβαίνει διότι η
κατανομή παίρνει μη-μηδενικές τιμές στο $(0,\theta)$ έχει δηλαδή στήριγμα το σύνολο $(0,\theta)$ που <u>δεν</u> είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου θ. Καταρρίπτεται μία από τις συνθήκες ομαλότητας. $\boxtimes$

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $X_1,\dots,X_n$ τ.δ. από την κατανομή $Bin(2,\theta)$ με πιθανότητα επιτυχίας $\theta\in(0,1)$. (i) Βρείτε το ΑΟΕΔ της θ. (ii) Βρείτε το ΚΦ C-R για την $g(\theta)=P(X=2)$.

<u>Λύση</u> (i) Για τη διωνυμική κατανομή έχουμε σ.π. $p(x;\theta)=\binom{2}{x}\theta^x(1-\theta)^{2-x}, x=0,1,2$

$$=\frac{2!}{x!(2-x)!}\theta^x(1-\theta)^{2-x}, x=0,1,2.$$

$$I_X(\theta)=E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right].$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\ln\left(\frac{2!}{x!(2-x)!}\right)+x\ln\theta+(2-x)\ln(1-\theta)\right)=\frac{x}{\theta}-\frac{2-x}{1-\theta}$$

Άρα, $I_X(\theta)=E\left[\left(\frac{X}{\theta}-\frac{2-X}{1-\theta}\right)^2\right]$

$=E\left[\left(\frac{X-2\theta}{\theta(1-\theta)}\right)^2\right]=\frac{Var(X)}{\theta^2(1-\theta)^2}=\frac{2\theta(1-\theta)}{\theta^2(1-\theta)^2}$

$=\frac{2}{\theta(1-\theta)}$. Άρα, το ΚΦC-R για τον αμερόληπτο εκτιμητή του θ είναι: $K\Phi C\text{-}R=\frac{\theta(1-\theta)}{2n}$.

Αναζητούμε τον αμερόληπτο εκτιμητή του θ στο (i) που έχει διακύμανση ίση με $\frac{\theta(1-\theta)}{2n}$. Ισχύει ότι $E(\overline{X})=2p$. Άρα, ένας αμερόληπτος εκτιμητής του $\theta=p$ είναι ο $T=\frac{\overline{X}}{2}$. Η διακύμανση αυτού του εκτιμητή είναι:

$$Var(T)=Var\left(\frac{\overline{X}}{2}\right)=\frac{1}{4}Var(\overline{X})$$

$$=\frac{1}{4}\frac{Var(X)}{n}=\frac{1}{4}\frac{2\theta(1-\theta)}{n}=\frac{\theta(1-\theta)}{2n}.$$

Άρα, ο εκτιμητής T είναι αμερόληπτος για το θ και έχει διακύμανση ίση με το ΚΦC-R. Άρα, είναι ο ΑΟΕΔ εκτιμητής του θ.

(ii) Για την $g(\theta)=P(X=2)$ έχουμε:

$$g(\theta)=P(X=2)=\binom{2}{2}\theta^2(1-\theta)^0=\theta^2.$$

Άρα το ΚΦ C-R της $g(\theta)=\theta^2$ είναι:

$$\frac{(2\theta)^2}{n\,\frac{2}{\theta(1-\theta)}}=\frac{2\theta^3(1-\theta)}{n}.\ \boxtimes$$

Παρατήρηση: Εάν η $2^{ης}$ τάξης παραγώγιση είναι εφικτή εντός του συμβόλου της ολοκλήρωσης, τότε αποδεικνύεται ότι το μέτρο πληροφορίας ισοδύναμα μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$I_X(\theta)=-E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right).\ \boxtimes$$

Παράδειγμα: Έστω X τ.μ. με κατανομή

$$f(x;\theta)=\frac{x+1}{\theta(\theta+1)}e^{-\frac{x}{\theta}},\ x\in(0,\infty),\ \theta>0.$$

Να βρεθεί το μέτρο πληροφορίας του Fisher για το θ.

Λύση Η f πληροί τις συνθήκες ομαλότητας και επιπλέον ισχύει και η συνθήκη της προηγούμενης παρατήρησης.

Συνεπώς, $I_X(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right)$

$$\ln f(X;\theta) = -\ln\theta - \ln(\theta+1) - \frac{X}{\theta} + \ln(X+1)$$

$$\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta+1} + \frac{X}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta) = \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{(\theta+1)^2} - \frac{2X}{\theta^3}$$

Άρα, $I_X(\theta) = -\frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{(\theta+1)^2} + \frac{2E(X)}{\theta^3}$.

Για την μέση τιμή της X, έχουμε:

$$E(X) = \int_0^\infty x\,\frac{x+1}{\theta(\theta+1)}e^{-\frac{x}{\theta}}dx = \int_0^\infty \frac{x^2}{\theta(\theta+1)}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$$

$$+\int_0^\infty \frac{x}{\theta(\theta+1)}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$$

$$= \frac{\Gamma(3)\theta^3}{\theta(\theta+1)} + \frac{\Gamma(2)\theta^2}{\theta(\theta+1)} = \frac{2!\theta^3}{\theta(\theta+1)} + \frac{1!\theta^2}{\theta(\theta+1)}$$

$$= \frac{2\theta^3+\theta^2}{\theta(\theta+1)} = \frac{\theta^2(2\theta+1)}{\theta(\theta+1)} = \frac{\theta(2\theta+1)}{\theta+1}.$$

Τελικά,

$$I_X(\theta) = -\frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{(1+\theta)^2} + \frac{2\theta(2\theta+1)}{\theta^3(\theta+1)}. \boxtimes$$

<u>Παρατήρηση:</u> Η σχέση:

$$I_X(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right) \text{ αν}$$

και προσφέρει έναν πιο σύντομο τρόπο υπολογισμού του μέτρου πληροφορίας του Fisher, θα πρέπει να εφαρμόζεται μόνο όταν ισχύουν οι προϋποθέσεις. Διαφορετικά, το αποτέλεσμα μπορεί να διαφέρει. $\boxtimes$

<u>Παράδειγμα:</u> Πληθυσμός με κατανομή $f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$. Εύρεση καλύτερου αμερόληπτου εκτιμητή με βάση ένα τ.δ. μεγέθους n. Να βρεθεί το μέτρο πληροφορίας του Fisher.

<u>Λύση</u> Για τον υπολογισμό του μέτρου πληροφορίας του Fisher με τον ορισμό,

ισχύει:

$$I_X(\theta) = E\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2 = E\left(\frac{\partial(-(X-\theta))}{\partial \theta}\right)^2$$

$$= E(1)^2 = 1.$$

Αν ίσχυαν οι συνθήκες ομαλότητας:

$$I_X(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right)$$

$$= -E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial(-x+\theta)}{\partial\theta}\right)\right) = -E\left(\frac{\partial 1}{\partial \theta}\right)$$

$= 0$. Προφανώς $0 \neq 1$ και ο λόγος είναι ότι δεν ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας για την f. ☒

2.4 Εκθετική Οικογένεια Κατανομών

Η τ.μ. X, διακριτή ή συνεχής, θα είναι μέλος της μονοπαραμετρικής Εκθετικής Οικογένειας Κατανομών εάν:

$$f(x;\theta)\ (\text{ή } p(x;\theta)) = c(\theta)h(x)e^{T(x)Q(\theta)},$$

$x \in A$, με A ανεξάρτητο του θ.

Αρκετές κατανομές που έχουμε δει είναι μέλη της Εκθετικής Οικογένειας.

<u>Παραδείγματα:</u> 1. Εκθετική Κατανομή

$f(x)=\theta e^{-\theta x}$, $x\geq 0$ με $A=[0,\infty)$, ανεξάρτητο του θ και η πυκνότητα γράφεται ως $c(\theta)h(x)e^{T(x)Q(\theta)}$, όπου $c(\theta)=\theta$, $h(x)=1$, $Q(\theta)=-\theta$, $T(x)=x$.

2. Διωνυμική με παράμετρο $\theta=p$. Το στήριγμα $A=\{0,1,2,\dots,n\}$ είναι ανεξάρτητο του p και η πυκνότητα γράφεται:

$$p(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}=\binom{n}{x}e^{x\ln\theta}e^{(n-x)\ln(1-\theta)}$$

$$=\binom{n}{x}e^{x\ln\theta+n\ln(1-\theta)-x\ln(1-\theta)},$$ όπου

$c(\theta)=e^{n\ln(1-\theta)}$, $T(x)=x$, $h(x)=\binom{n}{x}$, $Q(\theta)=\ln\theta-\ln(1-\theta)$.

3. Γεωμετρική Κατανομή με $\theta=p$. Το στήριγμα της κατανομής είναι ανεξάρτητο του p και η σ.π. γράφεται:

$$p(x)=(1-\theta)^{x-1}\theta=e^{(x-1)\ln(1-\theta)}\theta$$

$$=c(\theta)h(x)e^{T(x)Q(\theta)},$$ όπου $c(\theta)=\theta$, $T(x)=x-1$, $h(x)=1$, $Q(\theta)=\ln(1-\theta)$.

4. Κανονική Κατανομή για $\theta=\mu$, σ^2 γνωστό,

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2},\ x\in\mathbb{R}.$$

$$f(x)=c(\theta)h(x)\, e^{T(x)Q(\theta)},\text{ όπου}$$

$$c(\theta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\theta^2},\ h(x)=e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2},$$

$$T(x)=x,\ Q(\theta)=-\frac{\theta}{\sigma^2}.$$

5. Κανονική κατανομή για $\theta=\sigma^2$, μ γνωστό,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\theta}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\theta}(x-\mu)^2},\ x\in\mathbb{R}$$

$$=c(\theta)h(x)\, e^{T(x)Q(\theta)}\ \text{ με }\ c(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\theta}\sqrt{2\pi}},$$

$$h(x)=1,\ T(x)=(x-\mu)^2,\ Q(\theta)=-\frac{1}{2\theta}.$$

6. Gamma κατανομή. Αν $X\sim \text{Gamma}(a,\lambda)$ a γνωστό, $\lambda=\theta$.

$$f(x)=\frac{\theta^a}{\Gamma(a)}\, x^{a-1} e^{-\theta x},\ x>0$$

$$=c(\theta)h(x)\, e^{T(x)Q(\theta)},\ \text{όπου } c(\theta)=\frac{\theta^a}{\Gamma(a)},$$

$$h(x)=x^{a-1},\ T(x)=x,\ Q(\theta)=-\frac{1}{\theta}.\ \boxtimes$$

<u>Παρατήρηση:</u> Ένας ισοδύναμος τρόπος παρουσίασης της μονοπαραμετρικής οικογένειας κατανομών είναι:

$$f(x;\theta)=e^{c(\theta)+H(x)+T(x)Q(\theta)},\ x\in A,$$

με A ανεξάρτητο του θ. ⊠

Για την ΕΟΚ και κατά συνέπεια και για κάθε μέλος-κατανομή της οικογένειας, ισχύουν τα εξής αποτελέσματα:

1. Ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας.
2. Λαμβάνεται το "ίσον" στο ΚΦC-R, όταν επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την ποσότητα $\mu(\theta)=E(T(X))$, όπου T είναι η συνάρτηση του X στον εκθέτη της γενικής μορφής.
3. Το μέτρο πληροφορίας του Fisher μπορεί να υπολογισθεί από τον τύπο:

$$I_X(\theta)=-E\left(\frac{\partial^2 \ln f(X;\theta)}{\partial\theta^2}\right).$$

4. Για τα μέλη της ΕΟΚ <u>και μόνο</u> είναι εφικτό να βρούμε την αμερόληπτη εκτιμήτρια με διασπορά να ταυτίζεται με το ΚΦC-R. Και μάλιστα μόνο για την παραμετρική

συνάρτηση $\mu(\theta)$.

5. $\mu(\theta)=E(T(X))=-\dfrac{c'(\theta)}{c(\theta)Q'(\theta)}$

6. $Var(T(X))=\dfrac{\mu'(\theta)}{Q'(\theta)}$.

7. Η σ.σ. $T^*=\sum_{i=1}^{n}T(X_i)$ είναι ο ΑΟΕΔ

εκτιμητής της $\mu(\theta)$ με $Var(T^*)\equiv$ ΚΦ C-R. ☒

Εφαρμογές: 1. $p(x;\theta)=\theta(1-\theta)^x$, $x=0,1,2,\ldots$

$c(\theta)=\theta$, $h(x)=1$, $T(x)=x$, $Q(\theta)=\ln(1-\theta)$.

Τότε $\mu(\theta)=E(T(X))=E(X)=-\dfrac{c'(\theta)}{c(\theta)Q'(\theta)}$

$=-\dfrac{1}{\theta\left(-\frac{1}{1-\theta}\right)}=\dfrac{1-\theta}{\theta}$.

2. Κανονική κατανομή για $\theta=\mu$, σ^2 γνωστό.

$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

$=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2-2x\theta+\theta^2)}$

$=c(\theta)h(x)e^{T(x)Q(\theta)}$

όπου $c(\theta)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}}$, $h(x)=e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$,

$T(x)=x,\ Q(\theta)=-\frac{\theta}{\sigma^2}$

$\mu(\theta)=E(T(X))=EX=\mu=\theta$.

Ο ΑΟΕΔ της $\mu(\theta)=\theta$ είναι ο:

$$T^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}.$$

3. Κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, με μ γνωστό και $\theta=\sigma^2$. Είναι μέλος της ΕΟΚ με:

$c(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\theta}\sqrt{2\pi}}$, $h(x)=1$, $Q(\theta)=-\frac{1}{2\theta}$,

$T(x)=(x-\mu)^2$. Άρα, ο αμερόληπτος εκτιμητής της $\mu(\theta)=E(T(X))=E(X-\mu)^2=\sigma^2=\theta$ είναι ο $T^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$. ⊠

<u>Παραδείγματα</u> 1. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από την κατανομή Bernoulli με παράμετρο θ την πιθανότητα επιτυχίας, $\theta\in(0,1)$. Βρείτε την ΑΟΕΔ του θ.

<u>Λύση</u> Η Bernoulli ανήκει στην ΕΟΚ με:

$c(\theta)=e^{\ln(1-\theta)}$, $T(x)=x$, $h(x)=1$,

$Q(\theta)=\ln\theta-\ln(1-\theta)$.

$\mu(\theta) = E(T(X)) = E(X) = p = \theta$. Άρα, η ΑΟΕΔ για το $\mu(\theta) = \theta = p$ έχει διακύμανση που ταυτίζεται με το ΚΦ C-R και είναι ο:

$$T^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X},$$

δηλαδή ο ΑΟΕΔ εκτιμητής του p είναι ο δειγματικός μέσος. Η διακύμανση του ΑΟΕΔ είναι το ΚΦ C-R, $\frac{1}{n I_X(\theta)}$. Για το μέτρο πληροφορίας του Fisher, ισχύει:

$$I_X(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(X;\theta)}{\partial\theta^2}\right)$$

Είναι:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left(\theta^x(1-\theta)^{1-x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(x\ln\theta + (1-x)\ln(1-\theta)\right) = \frac{x}{\theta} + \frac{1-x}{1-\theta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta) = -\frac{x}{\theta^2} + \frac{1-x}{(1-\theta)^2}$$

Άρα

$$I_X(\theta) = E\left(\frac{X}{\theta^2} - \frac{1-X}{(1-\theta)^2}\right) = \frac{E(X)}{\theta^2} - \frac{E(1-X)}{(1-\theta)^2}$$

$= \frac{\theta}{\theta^2} - \frac{1-\theta}{(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$. Άρα, το ΚΦC-R για τον αμερόληπτο εκτιμητή του θ, είναι:

$$ΚΦC\text{-}R = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

2. Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από την κατανομή Poisson(λ), $\lambda > 0$. Έχουμε δείξει ότι:

$I_X(\lambda = \theta) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\theta}$ και άρα το ΚΦC-R για τον αμερόληπτο εκτιμητή του λ είναι:

$\frac{1}{n\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{n}$. Η Poisson ανήκει στην ΕΟΚ

με $p(x;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\frac{1}{x!}e^{x\ln\lambda}$, $\theta = \lambda$

$= c(\theta)\,h(x)\,e^{T(x)Q(\theta)}$ με $T(x) = x$. Άρα, ο

ΑΟΕΔ εκτιμητής της $\mu(\lambda) = E(T(X)) = E(X)$

$= \lambda$ είναι ο $T^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$.

Η διακύμανση του $\overline{X}$ είναι:

$Var(\overline{X}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\lambda}{n}$ το οποίο ισούται με το ΚΦC-R.

3. Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $X \sim Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$, $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x \geq 0$. Έχουμε $E(X) = \theta$, $Var(X) = \theta^2$. Να βρεθεί ο ΑΟΕΔ του θ.

Δείξαμε ότι $I_X(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$ και συνεπώς το ΚΦ C-R είναι το: $\frac{1}{n\frac{1}{\theta^2}} = \frac{\theta^2}{n}$. Επίσης η Εκθετική ανήκει στην ΕΟΚ με $T(x) = x$. Άρα, ο δειγματικός μέσος είναι ο ΑΟΕΔ εκτιμητής της ποσότητας $\mu(\theta) = E(T(X)) = \theta$. Η διακύμανση του είναι ίση με $\frac{\theta^2}{n} \equiv$ ΚΦ C-R. $\boxtimes$

4. Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από την κατανομή Gamma$\left(a, \frac{1}{\lambda}\right)$ με a γνωστό και λ άγνωστο δηλαδή $\lambda = \theta$. Τότε $E(X) = a\lambda$, $Var(X) = a\lambda^2$. Έχουμε υπολογίσει ότι $I_X(\theta = \lambda) = \frac{a}{\lambda^2}$, και άρα για τον αμερόληπτο εκτιμητή του λ θα είναι: ΚΦ $C-R = \frac{1}{n\frac{a}{\lambda^2}} = \frac{\lambda^2}{na}$.

Η Gamma κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ με a γνωστό, με $T(x) = x$.

Άρα $T^* = \overline{X}$ είναι ο ΑΟΕΔ εκτιμητής της παραμέτρου $\mu(\theta) = \mu(\theta = \lambda) = E(T(X)) = E(X) = a\lambda$. Κατά συνέπεια, ο εκτιμητής $\dfrac{\overline{X}}{a}$ είναι ο ΑΟΕΔ εκτιμητής της παραμέτρου λ. Τυπικά, μπορούμε να γράψουμε:

$$f(x; \lambda = \theta) = \frac{1}{\Gamma(a)\theta^a} x^{a-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, \ x > 0$$

$= c(\theta) h(x) e^{T(x) Q(\theta)}$ όπου $c(\theta) = \dfrac{1}{\Gamma(a)\theta^a}$

$h(x) = x^{a-1}$, $T(x) = x$, $Q(\theta) = -\dfrac{1}{\theta}$.

$\mu(\theta) = E(T) = E\left(\dfrac{X}{a}\right) = \lambda$ και

$$T^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{a} = \frac{\overline{X}}{a}. \ \boxtimes$$

5. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, \ x \in [0,1].$$

Να δειχθεί ότι:

(i) $I_X(\theta) = \dfrac{1}{\theta^2}$ και (ii) $T = -\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)$ είναι ο ΑΟΕΔ εκτιμητής του θ.

Λύση (i) $I_X(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right)$ διότι ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας ($f(x;\theta)$ είναι μέλος της ΕΟΚ).

Υπολογίζουμε: $\ln f = \ln\left(\frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)$

$= -\ln\theta + \frac{1-\theta}{\theta}\ln x$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta} + \ln x\left(\frac{-\theta-(1-\theta)}{\theta^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}\ln x = s(x;\theta)$$

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\ln x$$

Άρα $I_X(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right)$

$= -\left[\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}E(\ln X)\right]$. Αρκεί να υπολογίσουμε το $E(\ln X)$.

$$E(\ln X) = \int_0^1 \ln x \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} dx = \int_0^1 \ln x \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} dx$$

$$= \int_0^1 \ln x \, d\left(x^{\frac{1}{\theta}}\right) = \left[\ln x \cdot x^{\theta^{-1}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} x^{\frac{1}{\theta}} dx$$

$$= 0 - 0 - \int_0^1 x^{\frac{1}{\theta}-1} dx = \left[-\frac{1}{1/\theta} x^{1/\theta} \right]_0^1 = -\theta.$$

Άρα, αντικαθιστώντας το μέτρο πληροφορίας θα είναι: $I_X(\theta) = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\theta = \frac{1}{\theta^2}$,

και το ΚΦ C-R ισούται με $\dfrac{1}{n\frac{1}{\theta^2}} = \dfrac{\theta^2}{n}$.

(ii) Γράφουμε αρχικά την f ως μέλος της ΕΟΚ από όπου προκύπτει ότι $T(X) = \ln X$ και $Q(\theta) = \frac{1-\theta}{\theta}$ ή ισοδύναμα:

$T(X) = -\ln X$ και $Q(\theta) = -\frac{1-\theta}{\theta}$.

Επειδή η τ.μ. X παίρνει τιμές στο $[0,1]$ η τ.μ. $\ln X$ θα παίρνει αρνητικές τιμές ενώ $-\ln X$ παίρνει θετικές τιμές και κατά συνέπεια θετικές τιμές θα παίρνει και η παράμετρος $\mu(\theta) = E(-\ln X)$. Για αυτό το λόγο επιλέγεται η δεύτερη επιλογή συναρτήσεων T και Q.

Από το (i), έχουμε ότι $E(\ln X) = -\theta$.

Άρα, $\mu(\theta) = E(-\ln X) = \theta$.

Άρα, ο ΑΟΕΔ εκτιμητής της παραμέτρου θ, $\mu(\theta)=\theta$ είναι ο:

$$T^{*}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}-\ln(X_i)$$

$$=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i). \boxtimes$$

6. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από την $\mathcal{U}(0,\theta)$. Να βρεθεί ο ΑΟΕΔ για την παράμετρο θ.

Το Θεώρημα C-R δεν ισχύει διότι δεν ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας. Επίσης η Ομοιόμορφη <u>δεν</u> είναι μέλος της ΕΟΚ στο διάστημα $(0,\theta)$, με $\theta>0$ αγνωστο. $\boxtimes$

<u>Παρατήρηση:</u> Η προσέγγιση του προβλήματος εύρεσης του ΑΟΕΔ εκτιμητή σ' αυτήν την περίπτωση <u>δεν</u> <u>εμπίπτει</u> στην ΕΟΚ. Θα γίνει μέσω των ιδιοτήτων της επάρκειας και της πληρότητας που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. $\boxtimes$