Κεφάλαιο 3.

Επάρκεια – Πληρότητα – Συνέπεια Μέγιστη Πιθανοφάνεια – Μέθοδος ροπών.

3.1 Επάρκεια

Η επάρκεια είναι μία από τις αρχές μείωσης της διάστασης στην Εκτιμητική. Σύμφωνα με την αρχή της Επάρκειας για την Εκτιμητική, ένα στατιστικό $T=T(\underset{\sim}{X})$ (δηλ. μία συνάρτηση του δείγματος), όπου $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ ένα δείγμα από τον πληθυσμό είναι <u>επαρκές</u> για την παράμετρο Θ εάν οποιοδήποτε στατιστικό συμπέρασμα για το Θ εξαρτάται από το δείγμα μόνο μέσω της συνάρτησης T.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω n δοκιμές Bernoulli. Δηλαδή $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.μ. με κατανομή Bernoulli(θ). Τότε για την τ.μ. $T=\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1+X_2+\dots+X_n$ του αθροίσματος, θα ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n,\theta)$.

Εκτέλεση πειράματος: $x_1,\dots,x_n$ με $x_1+x_2+\dots+x_n=t$.

Εκτίμηση θ με βάση τα x_i. Γνωρίζουμε περισσότερα για το θ ως προς την εκτίμησή του, αν γνωρίζουμε την ακριβή θέση των x_i μέσα στο δείγμα δηλαδή ποιο είναι το αποτέλεσμα της καθεμιάς προσπάθειας ή το άθροισμα $x_1+x_2+\dots+x_n$ αρκεί;

Διαφορετικά, είναι απαραίτητη η εκτίμηση του θ από τη γνώση n τιμών $x_1,\dots,x_n$ (διάσταση n), δηλαδή και η σειρά των επιτυχιών ή αρκεί να γνωρίζουμε μόνο το πλήθος των επιτυχιών $x_1+x_2+\dots+x_n$ που είναι 1 αριθμός με διάσταση 1. Είναι ισοδύναμες όλες οι n-άδες που έχουν το ίδιο άθροισμα;

Υπολογίζουμε την πιθανότητα:

$$P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n \mid T=t)$$

$$=P(\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{x}\mid T=t)=\frac{P(\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{x},\ T=t)}{P(T=t)}$$

$$=\frac{P(\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{x})}{P(T=t)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)}{P(T=t)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}}{\binom{n}{t}\theta^{t}(1-\theta)^{n-t}}$$

$$= \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}}, \quad t=\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{t}} \text{(ανεξάρτητο του } \theta). \quad \boxtimes$$

<u>Ορισμός Επάρκειας</u> Έστω τ.δ. $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ με σ.π.π. $f(x;\theta)$ ή σ.π. $p(x;\theta)$, $\theta\in\Theta$ και $T=(T_1(\underset{\sim}{X}),\dots,T_k(\underset{\sim}{X}))$ μια στατιστική συνάρτηση (στατιστικό) της $\underset{\sim}{X}$. Τότε λέμε ότι το T είναι <u>επαρκής</u> για το θ ή την οικογένεια κατανομών που ορίζει το Θ, αν η κατανομή του $\underset{\sim}{X} \mid T=t$ είναι ανεξάρτητη του θ, $\forall t$. $\boxtimes$

<u>Παρατήρηση</u> Ο παραπάνω ορισμός έχει δύο πρακτικές δυσκολίες:

(i) Απαιτείται να γνωρίζουμε το στατιστικό T το οποίο επιθυμούμε να διαπιστώσουμε αν είναι επαρκές.

(ii) Η εφαρμογή του ορισμού είναι εύκολη για διακριτές τ.μ. αλλά δύσκολη για συνε-

Εναλλακτικά, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

<u>Ορισμός</u> Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τ.δ. με σ.π.π. $f(x;\theta)$ ή σ.π. $p(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$ και $T=T(x)$. Η σ.σ. T θα είναι <u>επαρκής</u> για το θ <u>ανν</u> $\forall\, U$ η κατανομή $U|T$ είναι ανεξάρτητη του θ. ☒

Αυτός ο εναλλακτικός ορισμός είναι ακόμα πιο δύσκολο να εφαρμοστεί πρακτικά για την αναζήτηση του επαρκούς στατιστικού. Είναι χρήσιμος <u>μόνο</u> προκειμένου να δείξουμε ότι μια <u>σ.σ</u> <u>δεν</u> είναι <u>επαρκής</u> κάνοντας χρήση της αντιθετοαντιστροφής. Αρκεί δηλαδή να βρούμε έστω μία συνάρτηση U για την οποία η δεσμευμένη κατανομή όταν T γνωστό εξαρτάται από το θ. Οι δύο παραπάνω ορισμοί δεν προσφέρονται στην πράξη για τον εντοπισμό του επαρκούς στατιστικού. Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί την προσέγγιση για την εύρεση επαρκούς στατιστικού στην πράξη.

Θεώρημα Fisher-Neyman ή Παραγοντικό Θεώρημα

Έστω τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με σ.π.π. $f(x;\theta)$ ή σ.π. $p(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$ και $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ μια επαρκής σ.σ. για το θ <u>ανν</u> ισχύει ότι: $f(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\theta}) = g(T(\underset{\sim}{x});\underset{\sim}{\theta}) \cdot h(\underset{\sim}{x})$

ή $p(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\theta}) = g(T(\underset{\sim}{x});\underset{\sim}{\theta}) \cdot h(\underset{\sim}{x})$,

δηλ. η από κοινού κατανομή του δείγματος να μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων με την $h(\underset{\sim}{x})$ να είναι συνάρτηση μόνο του δείγματος και την g συνάρτηση της παραμέτρου και του δείγματος <u>μόνο</u> μέσω της T. ⊠.

<u>Παραδείγματα</u> A. Με μία παράμετρο

<u>#1</u> Έστω n δοκιμές Bernoulli(θ), δηλ. $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Bernoulli(\theta)$. Να βρεθεί επαρκές στατιστικό για το θ.

Λύση Είναι:

$$p(\underset{\sim}{x};\theta)=\theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1}\cdots\theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n}$$

$$=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}=g\left(\sum_{i=1}^{n}x_i;\theta\right)h(\underset{\sim}{x})$$

με $h(\underset{\sim}{x})=1$, $T(\underset{\sim}{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i$.

Η $T(\underset{\sim}{x})$ είναι η συνάρτηση του δείγματος από την οποία εξαρτάται η συνάρτηση g και σύμφωνα με το Παραγοντικό Θεώρημα είναι το επαρκές στατιστικό. ☒

#2 Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από την Εκθετική κατανομή, $Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$ και σ.π.π. $f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x>0$. Να βρεθεί επαρκές για το θ.

Λύση Έχουμε ότι:

$$f(\underset{\sim}{x};\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_1}{\theta}}\cdots\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_n}{\theta}}=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}\cdot 1$$

$$=g\left(\sum_{i=1}^{n}x_i;\theta\right)h(\underset{\sim}{x}),$$ με $h(\underset{\sim}{x})=1$ και

$$g\left(\sum_{i=1}^{n}x_i;\theta\right)=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}.$$ Άρα $T=\sum_{i=1}^{n}x_i$ είναι επαρκής για το θ. ☒

#3 Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από την σ.π.π.

$$f(x) = \frac{(x+1)}{\theta(\theta+1)} e^{-\frac{x}{\theta}}, \; x>0.$$ Να βρεθεί

το επαρκές στατιστικό για το θ.

Λύση Έχουμε:

$$f(\underset{\sim}{x};\theta) = \frac{(x_1+1)e^{-\frac{x_1}{\theta}}}{\theta(\theta+1)} \cdots \frac{(x_n+1)e^{-\frac{x_n}{\theta}}}{\theta(\theta+1)}$$

$$= \frac{\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i+1)\right)e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i/\theta}}{\theta^n(\theta+1)^n} = \underbrace{\frac{e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i/\theta}}{\theta^n(\theta+1)^n}}_{g(T;\theta)} \underbrace{\prod_{i=1}^{n}(x_i+1)}_{h(\underset{\sim}{x})}$$

Άρα, η σ.σ. $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$ είναι επαρκής για το θ. ☒

#4 Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$.

Να βρεθεί ένα επαρκές στατιστικό για το θ.

Λύση Είναι $f(\underset{\sim}{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

Όμως $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\theta x_i + \theta^2)$

Άρα $f(\underset{\sim}{x};\theta) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(n\theta^2 - 2\theta\sum_{i=1}^{n} x_i\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n$

$\cdot\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Άρα, $g(T;\theta) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(n\theta^2 - 2\theta\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}$.

και κατά συνέπεια το $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$ είναι <u>επαρκής</u> σ.σ. για το θ. ⊠

<u>#5</u> Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ όπου $\theta = \sigma^2$ είναι η άγνωστη παράμετρος, και μ θεωρείται γνωστό. Να βρεθεί ένα <u>επαρκές</u> στατιστικό για το $\theta = \sigma^2$?

<u>Λύση</u> Είναι $f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\, e^{-\frac{1}{2\theta}(x-\mu)^2}$

Άρα

$$f(\underset{\sim}{x};\theta) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\theta}\right)^n}\, e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi\theta}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}}_{g(T;\theta)} \cdot \underbrace{1}_{h(\underset{\sim}{x})}.$$ Άρα, το

$T = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ είναι <u>επαρκές</u> για το $\theta = \sigma^2$

όταν το μ είναι γνωστό. Ισοδύναμα, ο γραμμικός μετασχηματισμός $T^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ είναι επαρκής για το θ. ☒

Β. Μεγαλύτερη διάσταση του διανύσματος των άγνωστων παραμέτρων.

#6 Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim Gamma(a, 1/\beta)$ με a, β άγνωστα. Ζητούμενο είναι ένα επαρκές στατιστικό για το $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \theta_2) = (a, \beta)$.

Είναι: $$f(\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{\theta}) = \frac{1}{(\Gamma(a))^n \beta^{an}} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a-1} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i / \beta}$$

$$= \frac{1}{(\Gamma(a))^n \beta^{an}} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a-1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta}} \cdot 1$$

όπου $$g(T; \underset{\sim}{\theta}) = \frac{1}{(\Gamma(a))^n \beta^{an}} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a-1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta}}$$

Άρα, το $T = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \prod_{i=1}^{n} x_i\right)$ είναι το επαρκές για το $\underset{\sim}{\theta} = (a, \beta)$. ☒

#7 Έστω τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Beta(a, \beta)$ με a, β άγνωστα. Τότε:

$$f(\underset{\sim}{x};a,\beta)=\frac{1}{[B(a,\beta)]^{n}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{a-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{\beta-1}\cdot 1$$

όπου $B(a,\beta)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(\beta)}{\Gamma(a+\beta)}$. Συνεπώς, το <u>επαρκές</u> για το διάνυσμα (a,β) είναι το $\left(\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)$. ⊠

<u>#8</u> Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n\sim N(\mu,\sigma^2)$ με μ,σ^2 και τα δύο άγνωστα, τότε:

$$f(\underset{\sim}{x};\mu,\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}n(\bar{x}-\mu)^2}$$

Άρα το $T=\left(\bar{X},\ \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)$ είναι επαρκές για το (μ,σ^2). ⊠

<u>Γ. Το στήριγμα της κατανομής του πληθυσμού εξαρτάται από την παράμετρο</u>

<u>#9</u> Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n\sim f(x;\theta)=e^{-(x-\theta)}$,

$x \in (\theta, \infty)$. Άρα $f(\underset{\sim}{x};\theta) = e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta}$, $x_i \geq \theta, \forall i = 1, \dots, n$. Ισοδύναμα, θα πρέπει να ισχύει ότι:

$\theta \leq x_1 < \infty, \theta \leq x_2 < \infty, \dots, \theta \leq x_n < \infty$.

Όμως $\theta \leq x_{(1)} \leq x_i \leq x_{(n)} < \infty, \forall i = 1, \dots, n$

όπου $x_{(1)} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,

$x_{(n)} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Άρα, οι n παραπάνω ανισότητες πληρούνται όταν $\theta \leq x_{(1)} \leq x_{(n)} < \infty$ καθώς $\theta \leq x_{(1)} \leq x_{(n)} < \infty$ επειδή $x_i \geq \theta \Leftrightarrow x_{(1)} \geq \theta$.

Άρα

$$f(\underset{\sim}{x};\theta) = e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i} \underbrace{e^{n\theta} I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)})}_{T = X_{(1)}} \cdot I_{(x_{(1)},\infty)}(x_{(n)})$$

Σ' αυτήν την περίπτωση είναι απαραίτητη η χρήση των $X_{(1)}, X_{(n)}$ διότι το στήριγμα της κατανομής περιέχει την παράμετρο θ και συνεπώς η παραγοντοποίηση και ειδικότερα ο προσδιορισμός της h που δεν εξαρτάται από την παράμετρο θα ήταν δύσκολο να προσδιοριστεί διαφορετικά. $\boxtimes$

#10 Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(0,\theta)$, $\theta > 0$. Να βρεθεί ένα επαρκές στατιστικό για το θ. Η από κοινού σ.π.π. του δείγματος είναι: $f(\underset{\sim}{x};\theta) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i)$

Αλλά $0 < x_i < \theta$ και $0 < x_{(1)} < x_{(n)} < \theta$.

Άρα $0 < x_{(n)} < \theta$ και $0 < x_{(1)} < x_{(n)}$.

Συνεπώς, $$f(\underset{\sim}{x};\theta) = \underbrace{\frac{1}{\theta^n} I_{(0,\theta)}(x_{(n)})}_{g(T(\underset{\sim}{x});\theta)} \underbrace{I_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)})}_{h(\underset{\sim}{x})}$$

και $T(\underset{\sim}{x}) = x_{(n)}$. $\boxtimes$

#11 Έστω τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με $f(x;\theta) = \theta x^{-2}$, $0 < \theta \leq x < \infty$. Ζητείται ένας επαρκής εκτιμητής για το θ.

Λύση $f(\underset{\sim}{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \theta^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{-2}$

$$\cdot \prod_{i=1}^{n} I_{(\theta,\infty)}(x_i) = \underbrace{\theta^n I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)})}_{g(x_{(1)},\theta)} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} x_i^{-2} I_{(x_{(1)},\infty)}(x_{(n)})}_{h(\underset{\sim}{x})}$$

καθώς $\theta \leq x_{(1)} \leq x_{(n)} < \infty$. Επαρκές το ελάχιστο $x_{(1)}$. ⊠

#12 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ένα τ.δ. από τον πληθυσμό με α.σ.κ. $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \left(\frac{x}{\beta}\right)^a, & 0 \leq x \leq \beta \\ 1, & x > \beta \end{cases}$

Λύση Για τη σ.π.π. παραγωγίζουμε την $F(x)$ και έχουμε: $f(x) = \begin{cases} a\left(\frac{x}{\beta}\right)^{a-1} \cdot \frac{1}{\beta}, & 0 \leq x \leq \beta \\ 0, & x \text{ αλλού} \end{cases}$

$$= \begin{cases} a x^{a-1}\left(\frac{1}{\beta}\right)^a, & 0 \leq x \leq \beta \\ 0, & x \text{ αλλού.} \end{cases}$$

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από την παραπάνω κατανομή, τότε:

$$f(\underset{\sim}{x}; a, \beta) = a^n \prod_{i=1}^n x_i^{a-1} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{na} I_{(0,\beta)}(x_i)$$

$$= a^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{a-1} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{na}, \quad 0 \leq x_{(1)} < x_{(n)} \leq \beta.$$

$$f(\underset{\sim}{x}; a, \beta) = a^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{a-1} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{na} I_{(0,\beta)}(x_{(n)})\, I_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)})$$

Άρα, το $\left(\prod_{i=1}^{n} X_i \, ; X_{(n)}\right)$ είναι το διδιάστατο επαρκές για το διάνυσμα (α, β). ⊠

Ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

Πρόταση Κάθε "1-1" μετασχηματισμός μίας επαρκούς σ.σ. είναι επαρκής. ⊠

Πρόταση Εάν $\theta^* = \varphi(\theta)$ ένας "1-1" μετασχηματισμός του θ και επιπλέον εάν T είναι επαρκής για το θ, τότε T είναι επαρκής και για το θ^*. ⊠

Πρόταση (Επάρκεια για ΕΟΚ). Για ένα τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από την μονοπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών $f(x;\theta) = c(\theta)\, h(x)\, e^{T(x) Q(\theta)}$ $x \in A$, A ανεξάρτητο του θ, ισχύει ότι το στατιστικό $\sum_{i=1}^{n} T(X_i)$ είναι επαρκές στατιστικό. ⊠

3.2 Επάρκεια και Αμεροληψία

Το παρακάτω Θεώρημα συνδυάζει δύο από τις ιδιότητες που έχουμε μελετήσει.

Θεώρημα Rao-Blackwell

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ από $f(x;\theta)$ ή $p(x;\theta)$ $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ και T επαρκής σ.σ. για το θ. Έστω $U = U(\underset{\sim}{X})$ μία άλλη αμερόληπτη σ.σ. Τότε η $U^* = E(U|T)$ είναι: (i) αμερόληπτη και (ii) $Var(U^*) \leq Var(U)$ $\forall \theta \in \Theta$. ☒

Το παραπάνω Θεώρημα συνδυάζεται με την ιδιότητα της πληρότητας που μελετάμε στη συνέχεια και δίνει έναν διαφορετικό τρόπο υπολογισμού ΑΟΕΔ εκτιμητών.

3.3 Ιδιότητα της Πληρότητας

Ένας εκτιμητής λέμε ότι είναι πλήρης (complete) αν ικανοποιεί τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός (Πληρότητα) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από $f(x;\theta)$ ή $p(x;\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. Μία $T = T(\underset{\sim}{X})$ σ.σ. είναι πλήρης

$\underline{\underline{\text{ανν}}}$ $E[h(T)]=0 \ \forall \theta \in \Theta \Rightarrow h(t)=0$
$\forall t.$ ☒

<u>Ερμηνεία:</u> Ο ορισμός δηλώνει ότι <u>δεν</u> υπάρχει άλλη σ.σ. του εκτιμητή T πλην της προφανούς που είναι η μηδενική η οποία να έχει αναμενόμενη τιμή 0, για κάθε τιμή της παραμέτρου.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από Poissom(θ), $\theta>0$. Να δειχθεί ότι το $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι πλήρης σ.σ.

<u>Λύση</u> Αρκεί να δειχθεί ότι:
$E[h(T)]=0 \ \forall \theta \in \Theta \Rightarrow h(t)=0 \ \forall t.$

Η αναμενόμενη τιμή με τον ορισμό και κάνοντας χρήση της κατανομής της T είναι: $E[h(T)]=\sum_{t=0}^{\infty} h(t) e^{-n\theta}\frac{(n\theta)^t}{t!}$

$$= e^{-n\theta}\sum_{t=0}^{\infty} h(t)\frac{(n\theta)^t}{t!}.$$

Για την εφαρμογή του ορισμού, απαιτούμε αρχικά: $E[h(T)]=0$, $\forall\theta$ δηλ. $e^{-n\theta}\sum_{t=0}^{\infty} h(t)\frac{(n\theta)^t}{t!}=0\ \forall\theta$

ή ισοδύναμα,

$$\sum_{t=0}^{\infty} h(t)\frac{(n\theta)^t}{t!}=0\ \forall\theta$$

Το πρώτο μέλος είναι μία σειρά την οποία αναπτύσσοντας, έχουμε:

$$h(0)\frac{(n\theta)^0}{0!}+h(1)\frac{(n\theta)^1}{1!}+\dots+\dots=0\ \forall\theta$$

ή $h(0)+h(1)n\theta+h(2)n^2\frac{1}{2}\theta^2$

$+h(3)n^3\frac{1}{6}\theta^3+\dots=0\ \forall\theta.$

Το τελευταίο είναι ένα πολυώνυμο ως προς θ και για να μηδενίζεται θα πρέπει να είναι όλοι οι συντελεστές ίσοι με μηδέν (ώστε να μηδενίζεται $\forall\theta$), δηλαδή: $h(k)n^2\frac{1}{k!}=0\ \forall k$

Άρα, $h(k)=0$ $\forall k$ που είναι το ζητούμενο για τον ορισμό. ⊠

<u>Παρατηρήσεις:</u> (i) Η ιδιότητα της πληρότητας είναι μία μαθηματική (θεωρητική) ιδιότητα και η εφαρμογή του ορισμού μπορεί να παρουσιάζει δυσκολίες ανά περίπτωση.

(ii) Για την εφαρμογή του ορισμού και την επαλήθευση της πληρότητας ενός εκτιμητή T είναι απαιτούμενη και η κατανομή του στατιστικού T. ⊠

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. με σ.π.π. $f(x;\theta)=\theta e^{-\theta x}$, $x \geq 0$. Να δείξετε ότι η $T=\sum_{i=1}^{n} x_i$ είναι πλήρης για το θ.

Γνωρίζουμε ότι αν $X_i \sim Exp(\theta) \equiv Gamma(1,\theta)$, $i=1,\dots,n$

τότε $T=\sum_{i=1}^{n} x_i \sim Gamma(n,\theta)$.

Υπολογίζουμε την $E(h(T))$.

$E(h(T))=0 \ \forall\theta \Rightarrow \int_0^\infty h(t)\frac{1\cdot\theta^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-t\theta}dt=0 \ \forall\theta$

$\Rightarrow \int_0^\infty h(t)t^{n-1}e^{-t\theta}dt=0 \ \forall\theta.$

Προκύπτει ότι: $h(t)t^{n-1}=0$ διότι η συνάρτηση του θ: $\int_0^\infty h(t)t^{n-1}e^{-t\theta}dt$ είναι μετασχηματισμός Laplace της $h(t)t^{n-1}$ και εφόσον ταυτίζεται με το μηδέν η συνάρτηση $h(t)t^{n-1}$ ταυτίζεται με το μηδέν ή ακόμα περισσότερο η συνάρτηση h ταυτίζεται με το μηδέν.

Υπενθυμίζουμε ότι για τον μετασχηματισμό Laplace $F(\theta)=\int_0^\infty f(x)e^{-\theta x}dx=L(f(x))$ ισχύει η ιδιότητα του μονοσήμαντου:

Αν $L(f(x))=L(g(x))$ τότε $f=g$. Επειδή το δεύτερο μέλος της ισότητας είναι μηδέν δηλ. ο μετασχηματισμός Laplace της μηδενικής συνάρτησης έπεται το συμπέρασμα ότι T πλήρης. ⊠

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

<u>Πρόταση</u> Για ένα τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από την μονοπαραμετρική Εκθετική οικογένεια κατανομών $f(x;\theta) = c(\theta) h(x) e^{T(x)Q(\theta)}$ $x \in A$, A ανεξάρτητο του θ, ισχύει ότι το στατιστικό $\sum_{i=1}^{n} T(X_i)$ είναι πλήρες στατιστικό. ⊠

Για παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι:

(i) Αν σ^2 γνωστό, με $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i=1,\dots,n$ τ.δ., το $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι <u>πλήρης</u> σ.σ.

(ii) Αν μ γνωστό, με $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i=1,\dots,n$ τ.δ., το $T = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$ είναι <u>πλήρης σ.σ.</u>

(iii) Αν μ, σ^2 άγνωστα, με $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i=1,\dots,n$, το $T = (\bar{X}, S^2)$ είναι <u>πλήρης</u> σ.σ. ⊠

3.4 Το Θεώρημα Lehmann-Scheffe

Ένας τρόπος προσδιορισμού του ΑΟΕΔ εκτιμητή είναι μέσω του ΚΦ C-R, αλλά πρακτικά μπορεί να δώσει τον ΑΟΕΔ εκτιμητή για (α) την ΕΟΚ, (β) την παραμετρική συνάρτηση μ(θ).

Πιο γενικός τρόπος εύρεσης του ΑΟΕΔ εκτιμητή είναι αυτός μέσω του Θεωρήματος Lehmann-Scheffe το οποίο βασίζεται στις ιδιότητες της επάρκειας, της πληρότητας και της αμεροληψίας.

Θεώρημα Lehmann-Scheffe

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από $f(x;\theta)$ ή $p(x;\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ και T πλήρης και επαρκής σ.σ. και $U = U(T)$ αμερόληπτη σ.σ του $g(\theta)$. Τότε η U είναι αμερόληπτη του $g(\theta)$. ⊠

Το Θεώρημα μας λέει ότι αν βρούμε ένα στατιστικό T που είναι πλήρες και επαρκές και στη συνέχεια μία συνάρτηση αυτού του T που να είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας που μας ενδιαφέρει, έχουμε βρει μια ΑΟΕΔ εκτιμήτρια της παραμέτρου, που θέλουμε να εκτιμήσουμε.

Ασκήσεις Εφαρμογής του Θ. Lehmann-Scheffe

#1 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ένα τ.δ. από τον πληθυσμό με κατανομή $f(x;\theta)=\theta e^{-\theta x}$, $x>0$. Να βρεθεί ο (α) ΑΟΕΔ του $\frac{1}{\theta}$, και (β) ο ΑΟΕΔ του θ.

Λύση (α) Για την Εκθετική κατανομή με σ.π.π. $f(x;\theta)=\theta e^{-\theta x}$, $x>0$, ο εκτιμητής $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής και επιπλέον είδαμε ότι είναι και πλήρης, διότι

$T=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(n,\theta)$ με

$$f_T(t)=\frac{t^{n-1}e^{-t\theta}}{\Gamma(n)}\theta^n,\ t>0.$$

Άρα $E(T)=\frac{n}{\theta} \Rightarrow E\left(\frac{T}{n}\right)=\frac{1}{\theta}$.

Συνεπώς, η συνάρτηση $U=\frac{1}{n}T$ είναι η ζητούμενη συνάρτηση γιατί είναι συνάρτηση του T, ενός πλήρους και επαρκούς στατιστικού και είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του $\frac{1}{\theta}$. Άρα $U=\frac{1}{n}T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$=\overline{X}$ είναι ο αμερόληπτος εκτιμητής του $\frac{1}{\theta}$. Η $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ πλήρης και $\overline{X}=\frac{1}{n}Y$ με $E(\overline{X})=\frac{1}{\theta}$. Άρα από το Θ. Lehmann-Scheffe, αφού $\overline{X}$ είναι συνάρτηση πλήρους και επαρκούς στατιστικού και είναι αμερόληπτο, το $\overline{X}$ είναι ΑΟΕΔ του $1/\theta$.

(β) Αρκεί να βρούμε έναν αμερόληπτο εκτιμητή του θ που να είναι συνάρτηση του $\overline{X}$. Δεδομένου ότι: $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\frac{n}{\theta}$ αναζητούμε την $E\left(T^{-1}\right)=E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)$.

Όμως,

$$E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)=E\left(\frac{1}{T}\right)=\int_0^\infty \frac{1}{t}\,\frac{t^{n-1}e^{-t\theta}\theta^n}{\Gamma(n)}\,dt$$

$$=\int_0^\infty \frac{t^{n-2}e^{-t\theta}\,\theta^n}{\Gamma(n)}\,dt \quad \frac{t\theta=u}{du=\theta dt}$$

$$=\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \left(\frac{u}{\theta}\right)^{n-2} e^{-u}\,\frac{1}{\theta}\,du$$

$$= \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \frac{1}{\theta^{n-2}} \frac{1}{\theta} \int_0^\infty u^{n-2} e^{-u} du$$

$$= \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \frac{1}{\theta^{n-2}} \frac{1}{\theta} \Gamma(n-1) = \frac{\theta (n-2)!}{(n-1)!}$$

$$= \frac{1}{n-1} \theta \Rightarrow E\left(\frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i}\right) = \theta.$$

Συνεπώς, $U' = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i}$ είναι μία συνάρτηση του T που είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ και συνεπώς από το Θεώρημα Lehmann-Scheffe είναι ο ΑΟΕΔ της θ. ⊠

<u>Παρατήρηση:</u> Στο παραπάνω παράδειγμα η f ανήκει στην ΕΟΚ. Παρόλα αυτά το Ερώτημα (β) δεν θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί μέσω της ανισότητας C-R. ⊠

Στο επόμενο παράδειγμα, η κατανομή δεν ανήκει στην ΕΟΚ και δεν μπορούσε να αντιμετωπιστεί μέσω της ανισότητας

#2 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{U}(0,\theta)$.

(α) Να δειχθεί ότι $\max X_i = X_{(n)}$ είναι πλήρες και επαρκές για το θ.

(β) Να βρεθεί ο ΑΟΕΔ για την θ.

Λύση Είναι $f(x) = \frac{1}{\theta}, x \in (0,\theta), \theta > 0$

(α) Επάρκεια: $T = X_{(n)}$ επαρκές, διότι

$$f(\underset{\sim}{x};\theta) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\theta^n} I_{(0,\theta)}(x_{(n)})}_{g(x_{(n)},\theta)} \underbrace{I_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)})}_{h(x)}$$

καθότι $0 < x_{(1)} < x_{(n)} < \theta$.

Πληρότητα: $T = X_{(n)}$ πλήρες διότι η κατανομή του T για το διατεταγμένο στατιστικό $Y_r = X_{(r)}$ είναι:

$$f_{Y_r}(y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(y)]^{r-1} \cdot [1-F(y)]^{n-r} f(y)$$

Για $r=n$,

$$f_{X_{(n)}}(y)=\frac{n!}{(n-1)!\,0!}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}$$

$$=n\frac{y^{n-1}}{\theta^n},\ 0<y<\theta.$$

Άρα $E[h(T)]=0\Rightarrow\int_0^\theta h(t)\,n\frac{t^{n-1}}{\theta^n}dt$

$=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta h(t)t^{n-1}dt=0\Rightarrow\int_0^\theta h(t)t^{n-1}dt$

$=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^\infty h(t)t^{n-1}dt=\frac{\partial}{\partial\theta}0=0$

$\Rightarrow h(\theta)\theta^{n-1}=0\ \forall\theta\Rightarrow h(\theta)=0\ \forall\theta.$

Συνεπώς, $T=X_{(n)}$ πλήρες.

<u>Αμεροληψία:</u> Αρχικά,

$$E(T)=\int_0^\theta tn\frac{t^{n-1}}{\theta^n}dt=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^n dt$$

$$=\frac{n}{\theta^n}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta=\frac{n}{\theta^n}\frac{\theta^{n+1}}{n+1}=\frac{n}{n+1}\theta$$

Άρα, $T^* = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ αμερόληπτος εκτιμητής του θ και T^* συνάρτηση πλήρους και επαρκούς στατιστικού.
Άρα, από Θ. Lehmann-Scheffe, ο εκτιμητής T^* είναι ο ΑΟΕΔ του θ. ⊠

#3 Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από Poisson(θ), $\theta > 0$. Να βρεθεί (i) ΑΟΕΔ του θ (ii) ΑΟΕΔ του θ^2.

Λύση (i) Η κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ. Άρα, η εύρεση ΑΟΕΔ εκτιμητή για την ποσότητα $\mu(\theta) = \theta$, θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί και με τις δύο μεθόδους. Το αποτέλεσμα θα συμφωνεί, προφανώς.
Με την προσέγγιση Lehmann-Scheffe έχουμε:

Επάρκεια: $$p(\underset{\sim}{x};\theta) = \frac{e^{-n\theta}\, \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

$$= e^{-n\theta}\, \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n x_i!\right)} \Rightarrow T = \sum_{i=1}^n X_i \text{ επαρκές.}$$

Έχουμε δει ότι $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι και πλήρες. Άρα, T <u>επαρκές</u> και <u>πλήρες</u>.

<u>Αμεροληψία:</u> $E(T)=E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=n\theta$

$\Rightarrow E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\theta$. Άρα, ο εκτιμητής $\overline{X}$ είναι ο ΑΟΕΔ του θ, λόγω του Θ. Lehmann-Scheffe.

(ii) Είδαμε ότι $T\sim Poisson(n\theta)$.

Άρα $E(T)=n\theta$, $Var(T)=n\theta$.

Όμως,

$$Var(T)=E(T^2)-\left(E(T)\right)^2$$

$$\Rightarrow n\theta=E(T^2)-n^2\theta^2$$

$$\Rightarrow E(T^2)=n^2\theta^2+n\theta$$

$$\Rightarrow E(T^2)-E(T)=n^2\theta^2$$

$$\Rightarrow \frac{E(T^2-T)}{n^2}=\theta^2.$$ Ο εκτιμητής $U=\frac{T^2-T}{n^2}$ είναι

συνάρτηση του T και αμερόληπτος του θ^2, άρα είναι ο ΑΟΕΔ εκτιμητής για το θ^2.

#4 Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από την $f(x) = \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, x>0, \theta>0$. Είναι η κατανομή Rayleigh. Βρείτε το επαρκές και στη συνέχεια τον ΑΟΕΔ εκτιμητή του θ.

Λύση $f(\underset{\sim}{x};\theta) = f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta} e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\theta^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2 / 2\theta}$$

$= g(T;\theta) h(\underset{\sim}{x})$, $x_i > 0$, όπου $h(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i$

$g(T;\theta) = \frac{e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2 / 2\theta}}{\theta^2}$, άρα το $T = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ είναι επαρκές.

Πληρότητα: Αρκεί να δείξουμε ότι: $E(h(T)) = 0 \ \forall \theta \Rightarrow h(T) = 0 \ \forall t$. Επειδή T συνεχής τ.μ. θα είναι: $E(h(T)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) f_T(t)\,dt$

Πρέπει να βρούμε την κατανομή του $T=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Έστω αρχικά η τ.μ. $Y=X^2$ με μετασχηματισμό $y=x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\sqrt{y},\ x>0 \Rightarrow \frac{dx}{dy}=-\frac{1}{2\sqrt{y}}$.

Θα είναι:

$$f_Y(y)=\frac{\sqrt{y}}{\theta}\,e^{-y/2\theta}\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$$

$$=\frac{1}{2\theta}\,e^{-y/2\theta},\ y>0 \Rightarrow Y=X^2 \sim Gamma\left(1,\frac{1}{2\theta}\right)$$

Άρα $T=\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim Gamma\left(n,\frac{1}{2\theta}\right)$

ως άθροισμα ανεξάρτητων Gamma με κοινή παράμετρο $B=1/2\theta$. Συνεπώς, η σ.π.π. της T είναι:

$$f_T(t)=\frac{1}{\Gamma(n)(2\theta)^n}\,t^{n-1}\,e^{-t/2\theta}$$

$$E(h(T))=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,f_T(t)\,dt=\int_{0}^{\infty}\frac{h(t)}{\Gamma(n)(2\theta)^n}\,t^{n-1}e^{-\frac{t}{2\theta}}\,dt$$

Για την πληρότητα:

$$E(h(T))=0\ \forall\theta \Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{h(t)}{\Gamma(n)(2\theta)^n}t^{n-1}e^{-t/2\theta}dt$$

$$=0\ \forall\theta \Rightarrow \frac{1}{\Gamma(n)(2\theta)^n}\int_0^{\infty}h(t)t^{n-1}e^{-t/2\theta}dt$$

$=0 \Rightarrow h(t)t^{n-1}=0\ \forall t$ λόγω ιδιότητας των μετασχηματισμών Laplace. Άρα $h(t)=0\ \forall t$ οπότε ο T είναι πλήρως επαρκής για το θ.

Για την αμεροληψία:

$$E(T)=2n\theta \Rightarrow E\left(\frac{1}{2n}T\right)=\theta.$$

Άρα $U=\frac{1}{2n}T=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ είναι ο ΑΟΕΔ από Θεώρημα Lehmann-Scheffe. ⊠

3.5 Συνέπεια

<u>Ορισμός</u> Η ακολουθία T_n (ή ο εκτιμητής T_n) μίας παραμέτρου θ είναι (ασθενικά) <u>συνεπής</u>, αν $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} P(\theta-\varepsilon < T_n < \theta+\varepsilon) = 1, \forall \theta \in \Theta$$ ☒

Η ιδιότητα της <u>ασθενικής</u> <u>συνέπειας</u> για έναν εκτιμητή **σχετίζεται** με τη σύγκλιση κατά πιθανότητα μίας ακολουθίας τ.μ. Θυμίζουμε ότι:

Η ακολουθία τ.μ. X_n, $n=1,2,\dots$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στην τ.μ. X, συμβολικά $X_n \xrightarrow{P} X$, εάν $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \ \forall \varepsilon > 0$.

Η ιδιότητα της ασθενικής συνέπειας είναι μία σύγκλιση κατά πιθανότητα όταν η τ.μ. X ταυτίζεται με μία σταθερά (εδώ η σταθερά είναι το θ).

Ένα χρήσιμο Θεώρημα για την ασθενική συνέπεια είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα Έστω T_n μία εκτιμήτρια της σ.σ. μίας παραμέτρου θ. Εάν
(i) T_n αμερόληπτη εκτιμήτρια της θ,
(ii) $Var(T_n) \to 0$, όταν $n \to \infty$
τότε ο T_n είναι συνεπής εκτιμητής της θ. $\boxtimes$

Το συμπέρασμα ισχύει ακόμη και αν $E(T_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$.

Παράδειγμα Έστω $X_1, \dots, X_n$ ένα τ.δ. από την Κανονική Κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Να δειχθεί ότι s^2 είναι συνεπής εκτιμητής του σ^2.

Λύση Για τον εκτιμητή s^2, ισχύει ότι $E(s^2) = \sigma^2$, δηλαδή είναι αμερόληπτος εκτιμητής της παραμέτρου, δηλαδή

ικανοποιείται η (i) του παραπάνω Θεωρήματος. Για το (ii), αρκεί να υπολογίσουμε και τη διακύμανση $Var(s^2)$.
Για τη διακύμανση, χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα: $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.
Άρα

$$Var\left[\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1)$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)^2 Var(s^2)}{\sigma^4} = 2(n-1)$$

$$\Rightarrow Var(s^2) = \frac{2\sigma^4}{(n-1)}.$$

Για $n \to \infty$ η τελευταία διακύμανση τείνει στο μηδέν, άρα πληρείται η συνθήκη (ii) του Θεωρήματος. Συνεπώς, ο εκτιμητής s^2 είναι συνεπής εκτιμητής του σ^2 ⊠

3.6 Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας (ΕΜΠ)

<u>Ορισμός (ΜΠ)</u> Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με σ.π.π. $f(x;\theta)$ ή

σ.π. $p(x;\theta)$. Η συνάρτηση:

$L(\theta|\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x};\theta)$ ή $L(\theta|\underset{\sim}{x}) = p(\underset{\sim}{x};\theta)$

που θεωρείται συνάρτηση της παραμέτρου θ, καλείται συνάρτηση πιθανοφάνειας (likelihood function). $\boxtimes$

Εάν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τ.δ. τότε:

$$L(\theta|\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i;\theta)$$

ή $$L(\theta|\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i;\theta)$$

Το σύμβολο $|\underset{\sim}{x}$ δηλώνει: "δοθέντος ότι το δείγμα $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$ έχει παρατηρηθεί.

Ορισμός (ΕΜΠ) (Maximum Likelihood Estimator)

'Εστω $L(\theta|\underset{\sim}{x})$ η συνάρτηση πιθανοφάνειας ενός δείγματος $X_1, \ldots, X_n$. Ο εκτιμητής $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ λέγεται Εκτιμητής Μεγίστης Πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) του θ, αν $L(\hat{\theta}|\underset{\sim}{x}) = \max\limits_{\theta \in \Theta} L(\theta|\underset{\sim}{x})$, όπου Θ είναι ο παραμετρικός χώρος του θ. ⊠

$\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$ είναι η τιμή της παραμέτρου για την οποία λαμβάνεται η μέγιστη τιμή της $L(\theta|\underset{\sim}{x})$.

<u>Παρατηρήσεις:</u> ① Το εύρος τιμών του ΕΜΠ, $\hat{\theta}$ συμφωνεί με τον παραμετρικό χώρο Θ, γιατί Θ είναι το πεδίο ορισμού της $L(\theta|\underset{\sim}{x})$. Η αναζήτηση μεγίστου γίνεται εντός του πεδίου ορισμού.

② Ο ΕΜΠ έχει γενικά πολύ καλές ιδιότητες, είναι ο εκτιμητής που εφαρμόζεται περισσότερο στην πράξη και συνδέεται με αρκετές από τις ιδιότητες που έχουμε δει, π.χ επάρκεια.

③ Το πρόβλημα εύρεσης ΕΜΠ ισοδυναμεί με ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης $L(\theta|\underset{\sim}{x})$. Ανάλογα με την κατανομή και τον τρόπο επιλογής του δείγματος, το πρόβλημα αυτό μπορεί να ποικίλει σε δυσκολία. Κάποια από τα πρακτικά προβλήματα είναι τα ακόλουθα:

(α) Συχνά είναι δύσκολη η μεγιστοποίηση σε κλειστή μορφή. Απαιτούνται αριθμητικές μέθοδοι.

(β) Το μέγιστο δε λαμβάνεται μονοσήμαντα.

(γ) Το μέγιστο λαμβάνεται στο άκρο του διαστήματος Θ.

(δ) Υπάρχουν τοπικά μέγιστα.

(ε) Υπάρχει αριθμητική ευαισθησία. Μικρές αλλαγές στα δεδομένα επηρεάζουν τους εκτιμητές.

Για τη μεγιστοποίηση της $L(\theta|\underset{\sim}{x})$ επιλέγουμε πρακτικά να μεγιστοποιήσουμε την $\ln L(\theta|\underset{\sim}{x})$. Οι συναρτήσεις $L(\theta|\underset{\sim}{x})$ και $\ln L(\theta|\underset{\sim}{x})$ λαμβάνουν ακρότατα στα ίδια σημεία του Θ. Η συνάρτηση $\ln L(\theta|\underset{\sim}{x})$ συμβολίζεται ως $\ell(\theta|\underset{\sim}{x})$ και ονομάζεται log-likelihood.

Δηλαδή: $\ell(\theta|\underset{\sim}{x}) = \ln L(\theta|\underset{\sim}{x})$.

Ασκήσεις

#1 $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0<x<1, \theta>0$

Βρείτε τον ΕΜΠ του θ.

Λύση $L(\theta|\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1}$

$$= \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1}$$

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta|\underset{\sim}{x}) = n\ln(\theta) + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i^{\theta-1})$$

$$= n\ln(\theta) + \sum_{i=1}^{n} (\theta-1)\ln(x_i)$$

$$= n\ln(\theta) + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i),$$

$\theta \in \Theta = (0,\infty)$.

Παραγωγίζουμε:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(\theta|\underset{\sim}{x}) = 0 \Rightarrow \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}.$$

Επιπλέον, $\theta = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)} > 0$ είναι σημείο του (~), άρα είναι ένα σημείο πιθανού ακροτάτου. Εξετάζουμε την 2^{η} παράγωγο:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln L(\theta|\underset{\sim}{x}) = -\frac{n}{\theta^2} < 0$$

Άρα το $-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}$ είναι το σημείο που μεγιστοποιείται η $\ell(\theta|\underset{\sim}{x})$ και κατά συνέπεια και η $L(\theta|\underset{\sim}{x})$, οπότε ο ΕΜΠ για το θ είναι $\hat{\theta} = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}$. ☒

#2 Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από την γεωμετρική: $p(x;\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1} I_{\{1,2,\dots\}}(x)$, $0<\theta<1$. Να βρεθεί ο ΕΜΠ του θ.

Λύση $L(\theta|\underset{\sim}{x}) = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1}$, $\theta \in (0,1)$. $\ln L(\theta|\underset{\sim}{x}) = n\ln(\theta) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right)\ln(1-\theta)$,

$\theta \in (0,1)$.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta | \underset{\sim}{x}) = \frac{n}{\theta} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right)}{(1-\theta)}(-1) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\theta) n = \theta \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right)$$

$$\Rightarrow n - n\theta = \theta \sum_{i=1}^{n} x_i - \theta$$

$$\Rightarrow n = n\theta - \theta + \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow n = \theta \left(n - 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i + n - 1} < 1 \text{ και } \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i + n - 1} > 0$$

άρα $\theta \in \Theta$. Επίσης $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} < 0$ διότι

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L = -\frac{n}{\theta^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-\theta)^2} < 0$$

Άρα $$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i + n - 1} = \frac{1}{\overline{x} + 1 - 1}$$

$$= \frac{1}{\overline{x}}. \boxtimes$$

#3 Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από την κατανομή:
$X \sim f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}, \ x \geq \theta, \ \theta \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η σ.σ. $T = X_{(1)}$ είναι ΕΜΠ της θ.

Λύση $L(\theta|\underset{\sim}{x}) = e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, \ x_i \geq \theta \ \forall i$

$\Rightarrow L(\theta|\underset{\sim}{x}) = e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i + n\theta}, \ \theta \leq x_{(1)}$

ή $\theta \in (-\infty, x_{(1)}]$

$\Rightarrow \ell(\theta|\underset{\sim}{x}) = -\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta, \ \theta \leq x_{(1)}$.

Άρα, $\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = n > 0 \ \forall \theta \leq x_{(1)}$. Η $\frac{\partial \ell}{\partial \theta}$ δεν μηδενίζεται στο εσωτερικό του Θ άρα δεν υπάρχει ακρότατο στο εσωτερικό του Θ. Ειδικότερα, επειδή $\frac{\partial \ell}{\partial \theta} > 0$ η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση ως προς θ, συνεπώς έχει μέγιστο στο άνω άκρο του διαστήματος που είναι κλειστό, δηλ. $\hat{\theta} = X_{(1)}$. ☒

#4' Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. από την κατανομή $f(x;\lambda) = \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}$, $x>0$, $\lambda, a > 0$.

Για a γνωστό, ζητείται ο ΕΜΠ του λ.

Λύση $L(\lambda | \underset{\sim}{x}) = \dfrac{\lambda^{na}}{(\Gamma(a))^n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$

$$\ln L = na \ln(\lambda) - n \ln \Gamma(a) + (a-1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L = 0 \Rightarrow \frac{na}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{na}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{a}{\bar{x}} > 0$$

$\dfrac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln L = -\dfrac{na}{\lambda^2} < 0$. Άρα, ο ΕΜΠ του λ είναι ο $\hat{\lambda} = \dfrac{a}{\bar{X}}$. ∎

#5' Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. από την κατανομή $f(x) = \dfrac{\theta v^\theta}{x^{\theta+1}}$, $x \geq v$, $\theta, v > 0$. Να προσδιοριστούν οι ΕΜΠ των παραμέτρων ν και θ.

<u>Λύση</u> Η πιθανοφάνεια θα είναι:

$$L(\theta,\nu|\underset{\sim}{x})=\frac{\theta^n \nu^{n\theta}}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta+1}},\ x_i\geq \nu\ \forall i.$$

$$\text{ή } x_{(1)}\geq \nu.$$

Ο παραμετρικός χώρος είναι:

$$(\theta,\nu)\in(0,\infty)\times(0,x_{(1)}].$$

$$\ell=\ln L(\theta,\nu)=n\ln(\theta)+n\theta\ln\nu-(\theta+1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right),\ x_{(1)}\geq\nu.$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}+n\ln\nu-\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{n}{\theta}=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)-n\ln\nu$$

$$\Rightarrow\theta=\frac{n}{\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)-n\ln\nu}=\theta_0$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)-\ln\nu},\quad\frac{\partial\ell}{\partial\nu}=n\theta\frac{1}{\nu}>0$$

'Αρα, η ℓ είναι γνησίως αύξουσα ως προς ν και συνεπώς $\hat{\nu} = x_{(1)}$.

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0$$ παντού άρα και στο

$\theta = \theta_0$ οπότε έχει μέγιστο στο σημείο αυτό. 'Αρα $$\hat{\theta} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \ln\nu}.$$

'Αρα, οι ΕΜΠ θα είναι:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \ln\nu}, \quad \hat{\nu} = x_{(1)}. \boxtimes$$

#6 'Εστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από την κατανομή

$$f(x;\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{(x-\theta_1)}{\theta_2}}, \quad x > \theta_1, \ \theta_1 < x_{(1)},$$

$\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_2 > 0$. Να βρεθούν οι ΕΜΠ των θ_1, θ_2.

Λύση $$L(\theta_1,\theta_2|\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{\theta_2^n} e^{-\frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)},$$

$\theta_1 > x_{(1)}$.

$$\ell = \ln L(\theta_1,\theta_2|\underset{\sim}{x}) = \ln\left[\frac{1}{\theta_2^n} e^{-\frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\frac{\theta_1}{\theta_2}}\right]$$

$$= -n\ln(\theta_2) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)}{\theta_2}$$

$$= -n\ln(\theta_2) - \frac{n(\bar{x}-\theta_1)}{\theta_2},\ \theta_1 > x_{(1)},\ \theta_2 > 0$$

$\frac{\partial \ell}{\partial \theta_1} = \frac{n}{\theta_2} > 0$. Αύξουσα ως προς θ_1, άρα το ακρότατο λαμβάνεται στο άνω άκρο του πεδίου ορισμού (είναι μέγιστο). Άρα $\hat{\theta}_1 = x_{(1)}$.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2}\ln L = -\frac{n}{\theta_2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)}{\theta_2^2} = 0$$

$$\Rightarrow -n + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)}{\theta_2} = 0$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1) \Rightarrow \underline{\theta_2 = \bar{x}-\theta_1}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2}\ln L\right|_{\theta_2=\bar{x}-\theta_1} = -\frac{n}{\theta_2^2} < 0 \text{ και}$$

$\hat{\theta}_1 = x_{(1)}$. Συνεπώς, $\hat{\theta}_1 = x_{(1)}$, $\hat{\theta}_2 = \bar{x} - x_{(1)}$. ⊠

#7 Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. από την κατανομή με α.σ.κ. $F(x;\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} 1-\left(\frac{\theta_1}{x}\right)^{\theta_2}, & x \geq \theta_1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$.

Να βρεθούν οι ΕΜΠ των παραμέτρων θ_1, θ_2.

<u>Λύση</u> $F'(x;\theta_1,\theta_2) = \theta_2\left(\frac{\theta_1}{x}\right)^{\theta_2-1}\frac{\theta_1}{x^2}$

$= \theta_2\,\theta_1^{\theta_2}\frac{1}{x^{\theta_2+1}},\ x \geq \theta_1$

Άρα η σ.π.π. είναι:

$$f(x;\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} \theta_2\,\theta_1^{\theta_2}\dfrac{1}{x^{\theta_2+1}}, & x \geq \theta_1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$L(\theta_1,\theta_2|\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1,\theta_2)$$

$$= \theta_2^n\,\theta_1^{n\theta_2}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i^{\theta_2+1}}\right),\quad x_i \geq \theta_1\ \forall i$$

$$L(\theta_1,\theta_2|\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1,\theta_2)$$

$$= \theta_2^n\,\theta_1^{n\theta_2}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i^{\theta_2+1}}\right),\ \theta_1 \leq x_{(1)} \leq x_{(n)} < \infty$$

$$\ell = \ln L(\theta_1,\theta_2|\underset{\sim}{x}) = n\ln(\theta_2) + n\theta_2\ln(\theta_1) + (\theta_2+1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right),$$

$\theta_1 \leq x_{(1)}$.

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta_1} = n\frac{\theta_2}{\theta_1} > 0$$ άρα ℓ αύξουσα ως προς θ_1. Άρα $\hat{\theta}_1 = x_{(1)}$.

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta_2} = \frac{n}{\theta_2} + n\ln(\theta_1) - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$$

$$\theta_2 = \left(\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - \ln(x_{(1)})\right)^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_2^2} = -\frac{n}{\theta_2^2} < 0 \ \forall \theta_2$$ άρα και

για $$\hat{\theta}_2 = \left(\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - \ln(x_{(1)})\right)^{-1}$$ ή

ισοδύναμα $$\hat{\theta}_2 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{x_i}{x_{(1)}}}. \boxtimes$$

Υπενθύμιση: Για εύρεση ακροτάτων συνάρτησης δύο ανεξάρτητων μεταβλητών: (i) Εντοπίζουμε πιθανά σημεία του επιπέδου (θ_1^0, θ_2^0), λύνοντας το σύστημα των πρώτων παραγώγων ίσων με το μηδέν.

(ii) Υπολογισμός Εσσιανού πίνακα:

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1^2} & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_2^2} \end{bmatrix}$$

(iii) Για να λαμβάνεται μέγιστο στο σημείο (θ_1^0, θ_2^0) που μηδενίζει την 1η παράγωγο θα πρέπει:

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1^2}\right|_{(\theta_1^0, \theta_2^0)} < 0, \quad \left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_2^2}\right|_{(\theta_1^0, \theta_2^0)} < 0$$

και $|H| > 0$. ⊠

<u>Εφαρμογή</u> (Κανονική Κατανομή). Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με κατανομή $N(\mu = \theta_1, \sigma^2 = \theta_2)$. Να προσδιοριστούν οι ΕΜΠ των θ_1, θ_2.

<u>Λύση</u>

$$L(\underset{\sim}{\theta} | \underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2\pi\theta_2}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2\theta_2}(x_i - \theta_1)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\theta_2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2}.$$

$$\ln L(\theta|\underset{\sim}{x}) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\theta_2) - \frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta|\underset{\sim}{x})}{\partial\theta_1} = \frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\theta_1) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x_i - n\theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{\partial \ln L(\underset{\sim}{\theta}|\underset{\sim}{x})}{\partial\theta_2} = -\frac{n}{2}\cdot\frac{2\pi}{2\pi\theta_2} + \frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2$$

$$= 0 \Rightarrow \theta_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2.$$

Επαληθεύεται ότι:

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_1^2}\right|_{(\hat\theta_1,\hat\theta_2)} < 0 \quad \text{ή} \quad \left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_2^2}\right|_{(\hat\theta_1,\hat\theta_2)} < 0$$

και $|H| > 0$. Έτσι, επιβεβαιώνεται ότι με τις $2^{ης}$ τάξεως παραγώγους στο παραπάνω σημείο έχουμε μέγιστο.

Άρα $\hat\theta_1 = \hat\mu = \overline{X}$, $\hat\theta_2 = \hat\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n}$

$\boxtimes$

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

<u>Πρόταση</u> Εάν οι συνθήκες ομαλότητας ισχύουν και ο ΕΜΠ είναι μονοσήμαντα ορισμένος, τότε:

(i) $\hat{\theta}_n$ συνεπής εκτιμητής για το θ.

(ii) $\hat{\theta}_n$ ασυμπτωτικά κανονικός εκτιμητής για το θ, δηλαδή

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right) \xrightarrow[\substack{\text{(σύγκλιση}\\ \text{κατά κατανομή)}}]{d} N\left(0, \frac{1}{I_X(\theta)}\right). \boxtimes$$

<u>Παράδειγμα</u> (Συνέχεια του προηγούμενου Παραδείγματος).

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με κατανομή $N(\mu=\theta_1, \sigma^2=\theta_2)$. Να βρεθεί η ασυμπτωτική κατανομή του διανύσματος των ΕΜΠ $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ των παραμέτρων θ_1, θ_2.

<u>Λύση</u> Για την ασυμπτωτική κατανομή των ΕΜΠ χρειαζόμαστε τον πίνακα πληροφορίας των θ_1, θ_2, $I_X(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\theta_2^2} \end{pmatrix}$

διότι:

$$I_X(\theta_1) = E\left(\frac{\partial \ln f(X; \underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_1}\right)^2 = E\left(\frac{1}{\theta_2^2}(X-\theta_1)^2\right)$$
$$= \theta_2^{-1}.$$

$$I_X(\theta_2) = E\left(\frac{\partial \ln f(X;\underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_2}\right)^2$$

$$= E\left(-\frac{1}{2\theta_2} + \frac{1}{2\theta_2^2}(X-\theta_1)^2\right) = \frac{1}{2\theta_2^2}.$$

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\theta_2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\theta_2^2}{n} \end{pmatrix}\right). \boxtimes$$

Επιπλέον, ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

<u>Πρόταση</u> (Ιδιότητα του αμετάβλητου για ΕΜΠ - Invariance Property of MLE)

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. με σ.π.π. $f(x;\theta)$ ή σ.π. $p(x;\theta)$ και $\hat{\theta}$ ΕΜΠ της θ. Εαν $\phi(\theta)$ είναι ένας μετασχηματισμός της θ, τότε ο ΕΜΠ της $\phi(\theta)$, $\widehat{\phi(\theta)}$ είναι $\phi(\hat{\theta})$, όπου $\hat{\theta}$ ο ΕΜΠ της θ. $\boxtimes$

Η παραπάνω πρόταση επιτρέπει την αναζήτηση ΕΜΠ μίας συνάρτησης του θ που βασίζεται στον ΕΜΠ του θ και στη μορφή της συνάρτησης. π.χ. αν $\hat{\theta}=\bar{X}$ είναι ο ΕΜΠ του θ και ενδιαφερόμαστε για τον ΕΜΠ της $g(\theta)=\ln(\theta)$, τότε:

$$\widehat{g(\theta)}=g(\hat{\theta})=\ln(\hat{\theta})=\ln(\bar{X}).$$

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $X_1,\dots,X_n$ τ.δ. από

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}, & 0<x\leq\theta\\ 0, & x \text{ αλλού}\end{cases}$$

. Ποιος ο ΕΜΠ της παραμέτρου θ και ποιος ο ΕΜΠ της διαμέσου της κατανομής.

<u>Λύση</u> $f(\underset{\sim}{x};\theta)=L(\theta|\underset{\sim}{x})=\dfrac{2^n\prod_{i=1}^{n}x_i}{\theta^{2n}}$,

$x_i\in(0,\theta)$, $\forall i=1,\dots,n$.

$$\ell(\theta|\underset{\sim}{x})=n\ln 2+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-2n\ln\theta$$

$x_i\in(0,\theta)$ $\forall i$ με $0\leq x_{(1)}\leq x_i\leq x_{(n)}\leq\theta$

$\Rightarrow \theta\in[x_{(n)},\infty)$.

Άρα $\dfrac{\partial\ell}{\partial\theta}=-\dfrac{2n}{\theta}<0$ άρα ℓ είναι γνησίως φθίνουσα ως συνάρτηση του θ. Άρα,

$\hat{\theta}=X_{(n)}$. Έστω α η διάμεσος της κατανομής. Τότε εξ ορισμού, θα έχουμε ότι:

$$P(X>a)=\frac{1}{2} \Rightarrow \int_a^{\theta} \frac{2x}{\theta^2}dx=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\theta^2}\left[x^2\right]_a^{\theta}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\theta^2}\left(\theta^2-a^2\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{a^2}{\theta^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{\theta^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow a^2=\frac{\theta^2}{2}$$

$\overset{a>0}{\Longrightarrow} a=\frac{\theta}{\sqrt{2}}$. Άρα, η διάμεσος είναι

$a=g(\theta)=\frac{\theta}{\sqrt{2}}$ και με τη βοήθεια της ιδιότητας του αμετάβλητου για τον ΕΜΠ θα ισχύει: $\hat{a}=g(\hat{\theta})=\frac{\hat{\theta}}{\sqrt{2}}=\frac{X_{(n)}}{\sqrt{2}}$.

Ο εκτιμητής $\frac{X_{(n)}}{\sqrt{2}}$ είναι ο ΕΜΠ της πληθυσμιακής διαμέσου. ⊠

3.7 Μέθοδος των ροπών

Σύμφωνα με τη μέθοδο, οι θεωρητικές ροπές μίας κατανομής θα πρέπει να έχουν σχέση με τις αντίστοιχες δειγματικές που υπολογίζονται από ένα δείγμα που προέρχεται από τον ίδιο πληθυσμό. Η ιδέα της μεθόδου και η τεχνική είναι απλή, ενδέχεται όμως η υλοποίησή της να έχει πρακτικά προβλήματα.

Ως θεωρητικές ροπές r τάξεως, θεωρούμε τις ποσότητες: $\mu_r(X)=E(X^r)$ $r=1,2,\dots$ και οι αντίστοιχες δειγματικές είναι: $m_r(X_1,\dots,X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r$, $r=1,2,\dots$. Οι θεωρητικές μέσες τιμές είναι συνάρτηση των παραμέτρων του πληθυσμού ενώ οι δειγματικές ροπές είναι συνάρτηση των τμ. του δείγματος. Η μέθοδος προτείνει να εξισωθούν οι k (αν k είναι η διάσταση του παραμετρικού χώρου Θ) πρώτες θεωρητικές ροπές με τις k πρώτες δειγματικές ροπές και να λυθούν ως προς τις άγνωστες παραμέτρους. Η λύση που θα προκύψει αποτελεί και την εκτίμηση σύμφωνα με τη μέθοδο.

Δεν είναι πάντα εφικτό να εφαρμοστεί η μέθοδος (το σύστημα δεν έχει λύση ή κάποια από τις θεωρητικές ροπές δεν υπάρχει).

Ασκήσεις #1 Έστω ένα δείγμα μεγέθους $n=1$ από την κατανομή:

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2(\theta-x)}{\theta^2}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}.$$

Να βρεθεί: (α) ο ΕΜΠ του θ και (β) ο εκτιμητής των ροπών του θ.

Λύση (α) $L(\theta|\underset{\sim}{x})=\dfrac{2(\theta-x)}{\theta^2}$, $0<x<\theta$

$$\ln L(\theta|\underset{\sim}{x})=\ln 2+\ln(\theta-x)-2\ln(\theta)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}=\frac{1}{\theta-x}-2\frac{1}{\theta}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\theta-2(\theta-x)}{\theta(\theta-x)}=0 \Rightarrow \theta-2\theta+2x=0$$

$$\Rightarrow -\theta+2x=0$$

$$\Rightarrow \theta=2x.$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = \ldots = \frac{-\theta^2 + \theta x - (-2\theta^2 + 5\theta x - 2x^2)}{[\theta(\theta - x)]^2}$$

Για $\theta = 2x$, $\left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right|_{\theta = 2x} = -\frac{2x}{4x^4} < 0.$

Άρα $\hat{\theta} = 2x$ είναι ο ΕΜΠ.

(β) Εκτιμητής με τη μέθοδο των ροπών.

$$\mu_1 = E(X) = \int_0^\theta x f(x)\,dx = \int_0^\theta x \frac{2\theta}{\theta^2}\,dx$$

$$- \int_0^\theta x \frac{2x}{\theta^2}\,dx = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta x\,dx - \frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta 2x^2\,dx$$

$$= \frac{2}{\theta}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\theta - \frac{1}{\theta^2}\left[2\frac{x^3}{3}\right]_0^\theta = \frac{2}{\theta}\frac{\theta^2}{2} - \frac{2\theta^3}{3\theta^2}$$

$$= \theta - \frac{2\theta}{3} = \frac{\theta}{3}. \quad \mu_1 = m_1 \Rightarrow \frac{\theta}{3} = \bar{X} \Rightarrow \tilde{\theta} = 3\bar{X}$$

$Var(\hat{\theta}) = 4Var(\bar{X})$, $Var(\tilde{\theta}) = 9Var(\bar{X})$

$$Var(\hat{\theta}) - Var(\tilde{\theta}) = 4Var(\bar{X}) - 9Var(\bar{X})$$

$$= -5Var(\bar{X}) < 0.$$

Άρα ΕΜΠ είναι καλύτερος. ∎

#2 Έστω $X_1,\dots,X_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή την $f(x;\theta)=1+\theta\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $0<x<1$.
(i) Υπολογίστε τον παραμετρικό χώρο Θ. (ii) Υπολογίστε τον εκτιμητή των ροπών για το θ.

Λύση (i) Πρέπει θ: $f(x;\theta)\geq 0$ και $\int_0^1 f(x)dx=1$ δηλ. $1+\theta\left(x-\frac{1}{2}\right)>0$

Όμως $0<x<1 \Rightarrow -\frac{1}{2}<x-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow -\frac{\theta}{2}<x-\frac{\theta}{2}<\frac{\theta}{2}\Rightarrow 1-\frac{\theta}{2}<1+\theta\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$<1+\frac{\theta}{2}\Rightarrow \begin{cases} 1-\frac{\theta}{2}>0\Rightarrow\frac{\theta}{2}<1\Rightarrow\theta<2 \\ 1+\frac{\theta}{2}>0\Rightarrow\frac{\theta}{2}>-1\Rightarrow \\ \Rightarrow\theta>-2\end{cases}$$

Άρα $\Theta=[-2,2]$ δηλ. $\theta\in[-2,2]$.

(ii) Εκτιμητής του θ με τη μέθοδο των ροπών, βάσει ενός τ.δ. $X_1, X_2,\dots,X_n$.

$$\mu_1 = E(X) = \int_0^1 x\left[1+\theta\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]dx$$

$$= \int_0^1 x\,dx - \theta\int_0^1 x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \theta\left[\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \theta\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{12}\theta$$

$$m_1 = \overline{X} = \mu_1 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{12}\theta = \overline{X} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6+\theta = 12\overline{X} \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = 12\overline{X}-6.}$$ ⊠

#3: Έστω $X_1,\dots,X_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή την Gamma$(a, 1/\beta)$ με σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)\beta^a}x^{a-1}e^{-\frac{x}{\beta}}$, $x>0$
$a, \beta > 0$.

$E(X) = a\beta$, $Var(X) = a\beta^2$ άρα

$$E(X^2) = Var(X) + (E(X))^2$$

$$\Rightarrow E(X^2) = a\beta^2 + a^2\beta^2$$

$$\Rightarrow E(X^2) = a\beta^2(1+a).$$

Λύνουμε το (Σ): $\begin{cases} a\beta = \overline{X} \\ a\beta^2(1+a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\beta = \overline{X} \\ a\beta^2(1+a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X} + \overline{X})^2 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a\beta = \overline{X} \\ a\beta^2(1+a) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + \overline{X}^2\right] \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a\beta = \overline{X} \\ a\beta^2(1+a) = S'^2 + \frac{1}{n}\overline{X}^2 \end{array}$$ όπου

$$S'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta = \frac{\overline{X}}{a} \\ a\frac{\overline{X}^2}{a^2}(1+a) = S'^2 + \frac{1}{n}\overline{X}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \beta = \frac{\overline{X}}{a} \\ \frac{\overline{X}^2}{a}(1+a) = S'^2 + \frac{1}{n}\overline{X}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \beta = \overline{X}/a \\ \frac{\overline{X}^2}{a} = S'^2 + \overline{X}^2\left(\frac{1}{n} - 1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{\overline{X}}{a} \\ a &= \frac{\overline{X}^2}{S'^2+\overline{X}^2\left(\frac{1}{n}-1\right)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{\beta} = \dfrac{S'^2+\overline{X}^2\left(\frac{1}{n}-1\right)}{\overline{X}} \\ \tilde{a} = \dfrac{\overline{X}^2}{S'^2+\overline{X}^2\left(\frac{1}{n}-1\right)} \end{cases}$$

Οι $\tilde{a}, \tilde{\beta}$ είναι οι εκτιμητές των ροπών των παραμέτρων a, β. ⊠

#4 Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από ένα πληθυσμό με κατανομή την Ομοιόμορφη στο διάστημα $(0, \theta)$. (i) Βρείτε τον ΕΜΠ του θ. (ii) Βρείτε τον εκτιμητή των ροπών του θ (iii) Συγκρίνετε τους δύο εκτιμητές ως προς την αμεροληψία και την ελάχιστη διακύμανση.

Λύση (i) Για τον ΕΜΠ, θα είναι:

$$L(\theta|\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{\theta^n}, \quad x_i \le \theta \ \forall i$$

$L(\theta|\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{\theta^n}$, $\theta \geq x_{(n)}$ ή $\theta \in [x_{(n)}, \infty)$.

$\Rightarrow \ell(\theta|\underset{\sim}{x}) = -n\ln(\theta)$, $\theta \geq x_{(n)}$

$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} < 0$. Η πρώτη παράγωγος είναι αρνητική, άρα ℓ γνησίως φθίνουσα και συνεπώς λαμβάνει μέγιστο στο άνω άκρο (είναι κλειστό σύνολο). Άρα $\hat{\theta} = X_{(n)}$.

(ii) Για τον εκτιμητή των ροπών

$\mu_1 = m_1 \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \bar{X} \Rightarrow \tilde{\theta} = 2\bar{X}$.

(iii) Για τον εκτιμητή των ροπών:

$E(\tilde{\theta}) = 2E(\bar{X}) = 2\frac{\theta}{2} = \theta$. Άρα αμερόληπτη εκτιμήτρια, και

$Var(\tilde{\theta}) = 4Var(\bar{X}) = 4\frac{Var(X)}{n}$

$= 4\frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$. Για τον ΕΜΠ, $\hat{\theta} = X_{(n)}$

θα χρειαστεί να υπολογίσουμε την κατανομή του $X_{(n)}$ ώστε να υπολογιστεί η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανσή του. Από τα διατεταγμένα στατιστικά, για το $X_{(n)}$, για την Ομοιόμορφη κατανομή έχουμε ότι:

$$f_T(t) = n\frac{t^{n-1}}{\theta^{n-1}}\frac{1}{\theta} = \frac{nt^{n-1}}{\theta^n},$$

$t \in (0,\theta)$, $T = X_{(n)}$.

$$E(T) = \int_0^\theta t\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta$$

$= \frac{n}{n+1}\theta$ άρα ο $T = X_{(n)}$ <u>δεν</u> είναι αμερόληπτος. Όμως $E(T) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ άρα είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος.

$$E(T^2) = \frac{n}{n+2}\theta^2.$$

$$Var(T) = \frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2$$

$$= \left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right)\theta^2.$$

Για τη σύγκριση:

$Var(\tilde{\theta}) - Var(T)$

$= \left(\frac{1}{3n} - \frac{n}{n+2} + \frac{n^2}{(n+1)^2}\right)\theta^2$. Ο συντελεστής $\frac{1}{3n} - \frac{n}{n+2} + \frac{n^2}{(n+1)^2}$ είναι θετικός $\forall n$ άρα $Var(\tilde{\theta}) \geq Var(T)$. ⊠

<u>#5</u> Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. από έναν κανονικό πληθυσμό με παραμέτρους μ, σ^2. Να βρεθούν οι εκτιμητές των ροπών για τις παραμέτρους.

<u>Λύση</u> $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$
$\Rightarrow E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$. Έχουμε το

$$(\Sigma): \begin{cases} \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\tilde{\mu} = \overline{X}} \text{ και}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}\right)$$

$= S'^2$, όπου $S'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$. ⊠