Κεφάλαιο 5
Έλεγχος Υποθέσεων

5.1 Εισαγωγή

Έστω $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τ.δ. που έχει επιλεγεί από μία κατανομή $X \in F$, όπου F οικογένεια κατανομών. Ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε μία υπόθεση η οποία αφορά π.χ. παραμέτρους του πληθυσμού, όταν η κατανομή του πληθυσμού θεωρούμε ότι είναι γνωστή.

Τα στοιχεία ενός στατιστικού ελέγχου είναι:

(i) Οι στατιστικές υποθέσεις: Είναι δηλώσεις που ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε. Οι δύο υποθέσεις καλούνται μηδενική και εναλλακτική υπόθεση. Συμβολίζονται με H_0 και H_1 ή H_a, αντίστοιχα.

(ii) Ελεγχοσυνάρτηση ή σ.σ. του τεστ. Για τον στατιστικό έλεγχο και προκειμένου να απορρίψουμε ή να μην απορρίψουμε την ισχύ ενός τεστ βασιζόμαστε σε ένα στατιστικό κριτήριο. Το κριτήριο αποτελείται από μια συνά-

ρτηση των σ.σ. του δείγματος $X_1, \ldots, X_n$, -1.66-
που καλείται και ελεγχοσυνάρτηση.
ή σ.σ. του τεστ. Η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης, υπολογισμένη για τις τιμές των τ.μ. του δείγματος $X_1, \ldots, X_n$ συγκρίνεται με μία σταθερή τιμή και αναλόγως προκύπτει το συμπέρασμα ως προς τον έλεγχο των υποθέσεων.

(iii) Κρίσιμη περιοχή. Είναι ο καθορισμός των τιμών που λαμβάνει η ελεγχοσυνάρτηση για τις οποίες απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση.

(iv) Επίπεδο του στατιστικού τεστ ή μέγεθος της κρίσιμης περιοχής. Η ποσότητα αυτή συνδέεται με τα στατιστικά σφάλματα που εμπλέκονται σε ένα στατιστικό τεστ.

Κάποια παραδείγματα υποθέσεων είναι:

$H_0: \theta = \theta_0$, $H_0: \theta \geq \theta_0$, $H_1: \theta = \theta_1$,

$H_1: \theta \neq \theta_0$.

Κατηγορίες στατιστικών τεστς:

(i) Παραμετρικά τεστς. Η οικογένεια κατανομών της X είναι παραμετρική. Δηλαδή, η F έχει γνωστή συναρτησιακή μορφή και ο έλεγχος αφορά τις παραμέτρους της F. Συγκεκριμένα, οι δύο υποθέσεις του στατιστικού τεστ είναι δηλώσεις σχετικά με τις παραμέτρους της κατανομής και η ισχύς των υποθέσεων προσδιορίζει πλήρως ή μερικώς την κατανομή του πληθυσμού από τον οποίον έχει επιλεγεί το δείγμα.

(ii) Μη-παραμετρικά τεστ: Η οικογένεια κατανομών της X είναι μη-παραμετρική. Δεν είναι γνωστή η συναρτησιακή μορφή της F. Ο έλεγχος αφορά την μορφή της κατανομής ή κάποιο χαρακτηριστικό της πχ μέση τιμή. ⊠

Οι στατιστικές υποθέσεις, η μηδενική και η εναλλακτική, χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: Απλή και σύνθετη υπόθεση. (i) Απλή υπόθεση έχουμε όταν η ισχύς της υπόθεσης καθορίζει πλήρως την κατανομή του πληθυσμού, ενώ (ii) σύνθετη, όταν η κατανομή προσδιορίζεται μερικώς.

<u>Π.χ.</u> Αν ο πληθυσμός υποθέσουμε ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ, η υπόθεση $H_0: \lambda = 1$ είναι <u>απλή</u> γιατί δοθέντος ότι ισχύει η H_0, η κατανομή του πληθυσμού είναι η Poisson$(\lambda = 1)$, και είναι πλήρως προσδιορισμένη. Η υπόθεση $H_0: \lambda \geq 1$, είναι σύνθετη, γιατί η παραδοχή της προσδιορίζει μόνο μερικώς την κατανομή. Θα είναι η Poisson(λ), με $\lambda \geq 1$. Γενικά, αν Θ ο παραμετρικός χώρος και προσδιορίζεται η μία από όλες (ολικώς ή μερικώς) παραμέτρους κάτω από την H_0, λέμε ότι οι υπόλοιπες παράμετροι είναι <u>ενοχλητικές παράμετροι</u>. Π.χ. αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, και $H_0: \mu = \mu_0$, αλλά η παράμετρος σ^2 του πληθυσμού είναι άγνωστη, τότε παρόλο που η H_0 προσδιορίζει την παράμετρο μ ακριβώς, η κατανομή <u>δεν</u> είναι προσδιορισμένη, γιατί περιέχεται και η παράμετρος σ^2.

Ωστόσο, η παράμετρος αυτή δεν αποτελεί την παράμετρο που ενδιαφερόμαστε, γιατί η H_0 **δεν αφορά** μόνο την παράμετρο μ και για το λόγο αυτό καλείται **ενοχλητική παράμετρος**.

Η κατασκευή ενός στατιστικού τεστ συνίσταται στη διαίρεση του δειγματικού χώρου S του πειράματος σε δύο σύνολα, C και $S-C$. Το σύνολο C καλείται **κρίσιμη περιοχή** ή **περιοχή απόρριψης** (rejection region) ενώ το συμπλήρωμά της καλείται **περιοχή αποδοχής** (acceptance region). Το πρόβλημα του στατιστικού ελέγχου είναι ένα **δυαδικό πρόβλημα**, δηλαδή απορρίπτουμε ή **δεν απορρίπτουμε** την μηδενική υπόθεση. Δεν υπάρχει **τρίτη** επιλογή, και για τον ίδιο λόγο οι δύο υποθέσεις, **μηδενική** και **εναλλακτική** είναι τις πιο πολλές φορές, συμπληρωματικές.

π.χ. $H_0: \theta=\theta_0$ και $H_1: \theta \neq \theta_0$ ή

$H_0: \theta \geq \theta_0$ και $H_1: \theta < \theta_0$.

5.2 Σφάλματα τύπου I και II

Σφάλματα που ενδέχεται να συμβούν σε έναν στατιστικό έλεγχο.

		Αποτελέσματα Στατιστικού Ελέγχου	
		Δεχόμαστε H_0	Απορρίπτουμε H_0
Πραγματικότητα	H_0 αληθινή	—	Σφάλμα τύπου I
	H_a αληθινή	Σφάλμα τύπου II	—

Για τα δύο σφάλματα, τύπου I και II, θέτουμε ως α, β τις αντίστοιχες πιθανότητές τους:

$$\alpha = P(\text{απορρίπτω } H_0 \mid H_0 \text{ αληθής})$$

$$\beta = P(\underline{\text{δεν}} \text{ απορρίπτω } H_0 \mid H_a \text{ αληθής})$$

Εάν H_0, H_a απλές, τότε τα α, β έχουν μία μόνο τιμή. Διαφορετικά, για την περίπτωση σύνθετης υπόθεσης:

$\alpha=\alpha(\theta)$, $\beta=\beta(\theta)$, συναρτήσεις του θ.

α: επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας του στατιστικού τεστ

$$= \sup_{f \in H_0} P(\text{απόρριψη } H_0 / f).$$

$f \in H_0$ σημαίνει ότι η f είναι η κατανομή της X που ανήκει στην οικογένεια που καθορίζεται από την H_0.

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P(X \in C / \theta)$$

α: μέγεθος του τεστ ή επίπεδο σημαντικότητας του τεστ.

$P(X \in C / f) \leq \alpha$, $f \in H_0$. Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση των α, β.

Έστω H_0: απλή και H_a: απλή. Για τον έλεγχο αυτό υπάρχουν περισσότερα του ενός τεστ. Έχει αποδειχθεί ότι ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση των α, β είναι αδύνατη. Κρατάμε ένα από τα δύο σφάλματα σταθερό και ελαχιστοποιούμε το δεύτερο.

Για να συγκριθούν τα τεστ που αναφέρονται όλα στον ίδιο έλεγχο:
Για σταθερό α, το καλύτερο τεστ είναι εκείνο για το οποίο το β είναι όσον το δυνατόν μικρότερο για κάθε δυνατή κατανομή της H_o. Στατιστικά τεστ με αυτήν την ιδιότητα καλούνται άριστα ή βέλτιστα.
Ορίζουμε την ισχύ ενός στατιστικού τεστ, γ, ως εξής:
Αν H_a απλή τότε $\gamma = 1-\beta$. Αν H_a σύνθετη, η συνάρτηση ισχύος ορίζεται ως: $\gamma(f) = 1-\beta(f)$

$$= 1 - P(\text{μη-απόρριψη } H_o \mid f \in H_a)$$
$$= P(\text{απόρριψης } H_o \mid f \in H_a) = P(X \in C \mid f \in H_a)$$

Άρα, $\gamma(f) = \begin{cases} 1-\beta(f), & f \in H_a \\ \alpha(f), & f \in H_o \end{cases}$

5.3 Ισχυρότατο τεστ - Ομοιόμορφα Ισχυρότατο τεστ

Αν το γ γίνεται μέγιστο, για κάθε άλλο στατιστικό τεστ με το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας, τότε το τεστ καλείται ισχυρότατο, αν H_0: απλή ή σύνθετη H_a: απλή. Για H_a απλή, η ισχύς $\gamma = 1-\beta$ είναι μία τιμή και όχι συνάρτηση.

Αν H_0: απλή ή σύνθετη, H_a: σύνθετη και $\gamma(f) = 1-\beta(f)$, $f \in H_a$ τη συνάρτηση ισχύος του στατιστικού ελέγχου, ένα στατιστικό τεστ του παραπάνω ελέγχου θα καλείται ομοιόμορφα ισχυρότατο τεστ, εάν η συνάρτηση $\gamma(f)$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από την ισχύ κάθε άλλου τεστ με ίδια μηδενική και εναλλακτική υπόθεση.

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεμελιώδες Θεώρημα των Neyman-Pearson</u> Έστω ότι ο έλεγχος αφορά απλή H_0 έναντι απλής H_a. Εάν υπά-

έχει <u>κρίσιμη</u> <u>περιοχή</u> C μεγέθους
α και σταθερός αριθμός $k \geq 0$ τ.ω.

$\frac{L_0}{L_a} \leq k, \forall x \in C$ και $\frac{L_0}{L_a} > k$,

$\forall x \in C' = S - C$, τότε η C είναι η <u>ισχυρότατη</u> <u>κρίσιμη</u> <u>περιοχή</u> <u>μεγέθους</u> α για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0 vs H_a.

$$\frac{L_0}{L_a} = \frac{f_0(\underset{\sim}{x})}{f_a(\underset{\sim}{x})}\Bigg|_{H_0}, \forall x \in C. \;\boxtimes$$

<u>Παράδειγμα</u> Έστω τ.δ. από $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
$H_0: \mu = \mu_0$ και $H_a: \mu = \mu_a$ με $\mu_a > \mu_0$.

<u>Λύση</u> Η πιθανοφάνεια είναι:

$$L = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right).$$

Κάτω από τις δύο υποθέσεις:

$$L_0 = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right)$$

για $\mu=\mu_0$

$$L_a=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_a)^2\right)$$

για $\mu=\mu_a$

$$C=\left\{\underset{\sim}{x} \,\middle|\, \frac{L_0}{L_a}\le k\right\}$$

$$=\left\{\underset{\sim}{x} \,\middle|\, \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_a)^2\right]\right)\le k\right\}=\left\{\underset{\sim}{x} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_a)^2 \ge -2\sigma^2 \ln k\right\}$$

$$=\left\{\underset{\sim}{x} \,\middle|\, n(\mu_0^2-\mu_a^2)-2(\mu_0-\mu_a)\sum_{i=1}^{n}x_i \le -2\sigma^2\ln k\right\}$$

$$=\left\{\underset{\sim}{x} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}x_i \ge \frac{-2\sigma^2\ln k-n(\mu_0^2-\mu_a^2)}{-2(\mu_0-\mu_a)}\right\}$$

$$=\left\{\underset{\sim}{x} \,\middle|\, \bar{x}\ge\frac{2\sigma^2\ln k+n(\mu_0^2-\mu_a^2)}{2n(\mu_0-\mu_a)}\right\}$$

$$=\left\{\underset{\sim}{x} \,\middle|\, \bar{x}\ge K\right\},$$ K σταθερά.

Το αποτέλεσμα δίνει τη μορφή του στατιστικού τεστ. Αναλυτικά (α) την ελεγχοσυνάρτηση, δηλ. τη συνάρτηση των σ.σ. του δείγματος, βάσει της οποίας θα γίνει ο στατιστικός έλεγχος που είναι ο $\bar{X}$ και (β) ότι μεγάλες τιμές του $\bar{X}$ θα είναι οι τιμές που θα προτείνουν απόρριψη της H_0. Το τελευταίο προκύπτει από το γεγονός ότι η κρίσιμη περιοχή που καταλήξαμε είναι της μορφής $\bar{X} \geq K$, όπου K είναι μία σταθερά.

Ο υπολογισμός της σταθεράς K θα γίνει με βάση το επιθυμητό μέγεθος της κρίσιμης περιοχής ή ισοδύναμα την πιθανότητα του σφάλματος τύπου I.

Αναλυτικά: $P(C'|H_0) = \alpha$ ή $P(\bar{X} \geq K | \mu = \mu_0) = \alpha$. Είναι μία εξίσωση που περιέχει τον άγνωστο αριθμό K.

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ και κάτω από την H_0:

Θα είναι $\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Τότε:

$$P\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{K-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha \text{ ή}$$

$$P(Z \geq K') = \alpha, \text{ όπου } K' = \frac{K-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Αλλά από τον ορισμό του z_α ως εκατοστιαίου ή ποσοστιαίου σημείου της Z, z_α: $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$, έπεται ότι $K' = z_\alpha$. Άρα,

$$z_\alpha = \frac{K-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \Rightarrow K = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha.$$

Συνεπώς, η κρίσιμη περιοχή είναι:

$\left\{\underline{x} : \overline{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right\}$. Ο έλεγχος θα γίνει με την ελεγχοσυνάρτηση $\overline{X}$ και κρίσιμη περιοχή:

$\left\{\underline{x} \mid \overline{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right\}$. Ισοδύναμα, με ελεγχοσυνάρτηση: $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ με κρίσιμη περιοχή $\{Z \geq z_\alpha\}$.

<u>Ασκήσεις</u> <u>#1</u> Έστω $X_1, \dots, X_{10}$ τ.δ. από πληθυσμό Gamma$(1, 1/\theta)$. Να βρεθεί ένα τεστ με $\alpha = 5\%$ για $H_0: \theta = 2$ vs $H_a: \theta = 4$, $\theta_0 = 2$, $\theta_a = 4$.

<u>Λύση</u> Εύρεση της μορφής της κρίσιμης περιοχής:

$$\frac{L_0}{L_a} \le k \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_0} e^{-x_i/\theta_0}}{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_a} e^{-x_i/\theta_a}} \le k.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\theta_0^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i/\theta_0}}{1/\theta_a^n \, e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i/\theta_a}} \le k \Leftrightarrow \frac{\theta_a^n}{\theta_0^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i(\theta_0^{-1} - \theta_a^{-1})} \le k$$

$$\Leftrightarrow e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i(\theta_0^{-1} - \theta_a^{-1})} \le k \frac{\theta_0^n}{\theta_a^n}$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{n} x_i(\theta_0^{-1} - \theta_a^{-1}) \le n(\ln\theta_0 - \ln\theta_a) + \ln k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \ge \frac{n(\ln\theta_0 - \ln\theta_a) + \ln k}{-(1/\theta_0 - 1/\theta_a)} = K$$

$\Leftrightarrow \theta_0 < \theta_a \Rightarrow \frac{1}{\theta_a} < 1/\theta_0$ (*). Άρα, η ελεγχοσυνάρτηση είναι η $\sum_{i=1}^{n} X_i$ και η μορφή της κρίσιμης περιοχής.

είναι: $C = \{ \underset{\sim}{x} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \geq K \}$.

Υπολογισμός του K με βάση την πιθανότητα σφάλματος τύπου I για πλήρη προσδιορισμό της κρίσιμης περιοχής.

$$P(C \mid H_0) = \alpha \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq K \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Gamma}(n, 1/\theta_0) \right)$$

$$\overset{\theta_0 = 2}{=} \alpha \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq K \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n} \right)$$

$$= \alpha \Rightarrow P\left(\chi^2_{2n} \geq K \right) = \alpha$$

$$\Rightarrow K = \chi^2_{2n,\alpha} = \chi^2_{20,0.05} = 31.410.$$

Άρα, η κρίσιμη περιοχή για $\alpha = 5\%$ είναι: $C = \{ \underset{\sim}{x} \mid \sum_{i=1}^{n} X_i \geq 31.41 \}$. ∎

Στην Άσκηση #2, γίνεται εφαρμογή πώς θα μπορούσε το Θεμελιώδες Λήμμα Neyman-Pearson να εφαρμοστεί και στην περίπτωση σύνθετης αλλά μονόπλευρης H_a.

<u>#2</u> Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό Gamma$(3, 1/\theta)$. Να βρεθεί ένα τεστ με $\alpha = 5\%$ για $H_0: \theta = \theta_0$ και $H_a: \theta > \theta_0$.

<u>Λύση</u> Επειδή για την εναλλακτική υπόθεση είναι: $H_a: \theta > \theta_0$ ισοδύναμα μπορεί να γραφεί: $H_0: \theta = \theta_0$ και $H_a: \theta = \theta_a$ με $\theta_a > \theta_0$, με τη βοήθεια μίας σταθερής τιμής θ_a η οποία είναι στο εύρος των τιμών της H_a $(\theta > \theta_0)$. Έτσι και οι δύο υποθέσεις είναι απλές και εφαρμόζεται το Θ. Neyman-Pearson.

Έτσι, αν η κρίσιμη περιοχή για τον έλεγχο $H_0: \theta=\theta_0$ vs $H_a: \theta=\theta_a$ με $\theta_a>\theta_0$ έχει κρίσιμη περιοχή ανεξάρτητη της συγκεκριμένης θ_a τιμής που χρησιμοποιήσαμε, τότε το τεστ που προκύπτει είναι ομοιομόρφως ισχυρότατο και για τον αρχικό έλεγχο: $H_0: \theta=\theta_0$ και $H_a: \theta>\theta_0$.

Για την Gamma$(3, 1/\theta)$ η πυκνότητα είναι: $f(x)=\dfrac{1}{2\theta^3}x^2 e^{-x/\theta}$, $x>0$.

Συνεπώς,

$$\frac{L_0}{L_a}\le k \Leftrightarrow \frac{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\theta_0^3}x_i^2 e^{-x_i/\theta_0}}{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\theta_a^3}x_i^2 e^{-x_i/\theta_a}}\le k$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{2\theta_0^3}\right)^n \prod_{i=1}^{n}x_i^2 e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i/\theta_0}}{\left(\frac{1}{2\theta_a^3}\right)^n \prod_{i=1}^{n}x_i^2 e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i/\theta_a}}\le k$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\theta_a}{\theta_0}\right)^{3n} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_a}\right)} \leq k$$

$$\Leftrightarrow e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_a}\right)} \leq k \cdot \frac{\theta_0^{3n}}{\theta_a^{3n}}$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_a}\right) \leq 3n(\ln\theta_0 - \ln\theta_a) + \ln k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{3n(\ln\theta_0-\ln\theta_a)+\ln k}{\left(1/\theta_a - 1/\theta_0\right)} = k$$

$\Rightarrow \theta_0 < \theta_a \Rightarrow \frac{1}{\theta_a} < \frac{1}{\theta_0}$ (*). Άρα η κρίσιμη περιοχή είναι: $C = \left\{x \mid \sum_{i=1}^{n} X_i \geq k\right\}$, όπου $\sum_{i=1}^{n} X_i$ η ελεγχοσυνάρτηση του τεστ. Εφόσον το δείγμα προέρχεται από την Gamma$(3, 1/\theta)$ για την κατανομή της ελεγχοσυνάρτησης, θα είναι:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(3n, 1/\theta).$$

Εύρεση της σταθεράς K για τον πλήρη καθορισμό του ελέγχου:

$$P(C|H_0)=\alpha \Rightarrow P\Bigg(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq K \,\Bigg|\, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\sim Gamma(3n,1/\theta_0)}\Bigg)$$

$=\alpha$. Αν $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(3n, 1/\theta_0)$

τότε $2/\theta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(3n, 1/2)$

$\equiv \chi^2_{6n}$. Θα υιοθετήσουμε τον μετασχηματισμό αυτό, ώστε η κατανομή που θα χρησιμοποιήσουμε να είναι η χ^2 (για την οποία έχουμε πίνακες), αντί για την Gamma. Θα είναι:

$$P\Bigg(\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{2}{\theta_0}K \,\Bigg|\, \underbrace{\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\sim Gamma(3n,\frac{1}{2}) \equiv \chi^2_{6n}}\Bigg)$$

$=\alpha$, ή αν θέσουμε $W=\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} X_i$, τότε η παραπάνω σχέση, δίνει:

$$P\left(W \geq \frac{2}{\theta_0}k \,\middle|\, W\sim\chi^2_{6n}\right)=\alpha$$

από όπου με βάση τον ορισμό των άνω εκατοστιαίων σημείων της χ^2-κατανομής έπεται ότι:

$$\frac{2}{\theta_0}k=\chi^2_{6n,\alpha}\Rightarrow k=\frac{\theta_0}{2}\chi^2_{6n,\alpha}$$

Άρα, συνολικά, η κρίσιμη περιοχή για $\alpha=5\%$ είναι: $\left\{\underset{\sim}{x} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}x_i \geq \frac{\theta_0}{a}\chi^2_{6n,\alpha}\right\}$ ανεξάρτητη της θ_a. Για παράδειγμα, αν ο έλεγχος είναι $H_0:\theta=4$ και $H_a:\theta>4$, και έχουμε λάβει ένα δείγμα μεγέθους $n=45$, τότε η κρίσιμη περιοχή μεγέθους 5% για τον παραπάνω έλεγχο είναι:

$$\sum_{i=1}^{45}X_i \geq \frac{4}{2}\chi^2_{90,0.05}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{45}X_i \geq 2\cdot 113.1453. \quad \boxtimes$$

#3 Έστω $X_1, \dots, X_{20}$ τ.δ. από πληθυσμό Poisson (λ). $H_0: \lambda = \frac{1}{10}$ και $H_a: \lambda > 1/10$, με κρίσιμη περιοχή $\sum_{i=1}^{20} X_i \geq 5$. Βρείτε την πιθανότητα σφάλματος τύπου I για τον παραπάνω έλεγχο.

Λύση Η υπόθεση H_0 είναι σύνθετη, αλλά όχι δίπλευρη. Αυτό μας επιτρέπει να γράψουμε τις δύο υποθέσεις ισοδύναμα:

$$H_0: \lambda = \frac{1}{10} = \lambda_0 \text{ και } H_a: \lambda = \lambda_a, \lambda > \lambda_0$$

$$\frac{L_0}{L_a} \leq k \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_0} \frac{\lambda_0^{x_i}}{x_i!}}{\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_a} \frac{\lambda_a^{x_i}}{x_i!}} \leq k$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-n\lambda_0} \lambda_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{e^{-n\lambda_a} \lambda_a^{\sum_{i=1}^{n} x_i}} \leq k$$

$$\Leftrightarrow e^{-n(\lambda_0 - \lambda_a)} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_a}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \leq k$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_a}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \leq \underbrace{k e^{n(\lambda_0 - \lambda_a)}}_{k'} \Rightarrow \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_a}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \leq k'$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_a}\right) \leq k'$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \underbrace{k'\left[\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_a}\right)\right]^{-1}}_{k''} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k'' \xRightarrow[\substack{n=20 \\ k''=5}]{} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poisson(20\lambda)$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_0 < \lambda_a \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\lambda_0 - \lambda_a < 0 \\ &\frac{\lambda_0}{\lambda_a} < 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\lambda_0 - \lambda_a < 0 \\ &\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_a}\right) < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k \,\middle|\, H_0\right) = \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 5 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poisson(2)\right)$$

$$= \alpha \Rightarrow 1 - P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < 5 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poiss(2)\right)$$

$$= \alpha \Rightarrow 1 - P(0) - P(1) - P(2) - P(3) - P(4)$$

$$= \alpha \Rightarrow 1 - e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!}\right) = \alpha$$

$\overset{\lambda=2}{\Longrightarrow} 1-e^{-2}\left(1+\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}\right)=\alpha$

$\Rightarrow \alpha = 0.0256.$ ☒

#4 Έστω $X_1, \ldots, X_{20}$ τ.δ. από πληθυσμό με κατανομή $Bin(1,\theta)$. Για $\alpha = 0.2517$ υπολογίστε την ισχύ του τεστ $H_0: p = 1/2$ και $H_a: p = 1/4$.

Λύση Η πιθανοφάνεια για το παραπάνω μοντέλο είναι: $L = \prod_{i=1}^{20} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$.

Για τις δύο υποθέσεις, θα είναι:

$$L_0 = \prod_{i=1}^{20} p_0^{x_i}(1-p_0)^{1-x_i} = p_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p_0)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

με $n = 20$.

$$L_a = \prod_{i=1}^{20} p_a^{x_i}(1-p_a)^{1-x_i} = p_a^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p_a)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$C: \left\{\underset{\sim}{x} \,\middle|\, \frac{L_0}{L_a} \le k\right\} = \left\{\underset{\sim}{x} \,\middle|\, \frac{p_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p_0)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{p_a^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p_a)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}} \le k\right\}$$

$$= \left\{ \underset{\sim}{x} \,\middle|\, \left(\frac{p_0}{p_a}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \left(\frac{1-p_0}{1-p_a}\right)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \le k \right\}$$

$$= \left\{ \underset{\sim}{x} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{p_0}{p_a}\right) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln\left(\frac{1-p_0}{1-p_a}\right) \le \ln k \right\}$$

$$= \left\{ \underset{\sim}{x} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\ln\left(\frac{p_0}{p_a}\right) - \ln\left(\frac{1-p_0}{1-p_a}\right) \right) \le \ln k - n \ln\left(\frac{1-p_0}{1-p_a}\right) \right\}$$

$$= \left\{ \underset{\sim}{x} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\ln\left(\frac{p_0}{p_a}\right) - \ln\left(\frac{1-p_0}{1-p_a}\right) \right) \le \ln k - n \ln\left(\frac{1-p_0}{1-p_a}\right) \right\}$$

$$= \left\{ \underset{\sim}{x} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\ln\left(\frac{p_0}{p_a}\right) - \ln\left(\frac{1-p_0}{1-p_a}\right) \right) \le \ln(k) - n \ln\left(\frac{1-p_0}{1-p_a}\right) \right\}$$

Για $p_0 = 1/2$, $p_a = 1/4$ επιβεβαιώνουμε ότι $\ln(p_0/p_a) - \ln\left(\frac{1-p_0}{1-p_a}\right) > 0$ και κατά συνέ-

πεια, η κρίσιμη περιοχή είναι ισό-
δύναμα, $C = \{ \underset{\sim}{x} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \le K \}$, όπου

$$K = \frac{\ln k - n \ln\left(\frac{1-p_0}{1-p_a}\right)}{\ln\left(\frac{p_0}{p_a}\right) - \ln\left(\frac{1-p_0}{1-p_a}\right)}.$$

Εύρεση του K για $\alpha = 0.2517$. Θα είναι:

$$P(C \mid H_0) = \alpha \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le K \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, p_0)\right)$$

$$= \alpha \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le K \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(20, \tfrac{1}{2})\right)$$

$= 0.2517$. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα της α.σ.κ για την $Bin(20, 1/2)$ έχουμε ότι η παραπάνω πιθανότητα επιτυγχάνεται για $K = 8$. Άρα, η κρίσιμη περιοχή είναι $\sum_{i=1}^{20} X_i \le 8$. Η ισχύς του τεστ είναι:

$$\gamma = 1-\beta = P(\underset{\sim}{x} \in C \mid p = p_a)$$
$$= P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i \leq 8 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{20} X_i \sim Bin(20, 1/4)\right)$$

$= 0.7339$. Η τελευταία πιθανότητα προκύπτει από την α.σ.κ. της $Bin(20, 1/4)$.

5.4 Τεστ Πηλίκου Πιθανοφανειών

Η μέθοδος κατασκευής ενός στατιστικού τεστ έχει τα εξής βασικά χαρακτηριστικά: (i) Μπορεί να εφαρμοστεί όταν η H_0 και η H_a είναι απλές υποθέσεις. Ο περιορισμός για την H_a μπορεί να χαλαρώσει και να εφαρμοστεί και σε σύνθετη, αλλά μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση. (ii) Όταν μπορεί να εφαρμοστεί δίνει ισχυρότατα τεστς. Το τεστ πηλίκου πιθανοφανειών εφαρμόζεται για κάθε τύπο της μηδενικής και εναλλακτικής υπόθεσης. Απλή ή σύνθετη και στην περίπτωση της

σύνθεσης, αυτή μπορεί να είναι
είτε μονόπλευρη, είτε δίπλευρη.
π.χ. $H_0: \theta \geq \theta_0$ vs $H_a: \theta < \theta_0$
ή $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_a: \theta \neq \theta_0$.
Δεν εγγυάται μέγιστη ισχύ, αλλά
είναι το στατιστικό τεστ που εφαρμόζουμε πιο συχνά στην πράξη, λόγω:
(i) της μεγάλης ευρύτητας στην
εφαρμογή του, και
(ii) του γεγονότος ότι υπάρχει ένα
ασυμπτωτικό αποτέλεσμα για το τεστ
πηλίκου πιθανοφάνειας που προσφέρει ένα προσεγγιστικό τεστ για
σχετικά μεγάλα δείγματα, ακόμη
και στην περίπτωση που η μέθοδος
παρουσιάζει πρακτικές δυσκολίες
στην εφαρμογή. Η μέθοδος βασίζεται
στους ΕΜΠ.

<u>Ορισμός</u> Έστω ο έλεγχος της υπόθεσης $H_0: \theta \in \widetilde{\Theta}_0$ vs $H_a: \theta \in \widetilde{\Theta}_0^c$, όπου

Θ_0 είναι υποσύνολο του παραμετρικού χώρου και Θ_0^c είναι το συμπλήρωμα του Θ_0. Το πηλίκο ή λόγος πιθανοφανειών (likelihood ratio) ορίζεται ως:

$$\lambda = \frac{\max\limits_{\theta \in \Theta_0} L(\theta|\underset{\sim}{x})}{\max\limits_{\theta \in \Theta} L(\theta|\underset{\sim}{x})},$$

όπου $\underset{\sim}{x} = (x_1, \dots, x_n)$ είναι ένα τ.δ. από τον πληθυσμό με συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\theta|\underset{\sim}{x})$. Συμβολίζεται με λ ή με Λ. Για το λ ισχύει: $0 \leq \lambda \leq 1$. Αυτό ισχύει διότι το μέγιστο στον παρονομαστή είναι το ολικό μέγιστο, ενώ το μέγιστο στον αριθμητή είναι το μέγιστο σ' ένα υποσύνολο του παραμετρικού χώρου και κατά συνέπεια είναι μικρότερο ή ίσο με το ολικό μέγιστο.

Για τις περιπτώσεις ελέγχου υποθέσεων που ισχύει η H_0, τότε αναμένουμε το μέγιστο στον αριθμητή να προσεγγίζει το μέγιστο στον παρονομαστή και το λ να παίρνει τιμές κοντά στο 1.

Για την εύρεση του στατιστικού ελέγχου με τη μέθοδο του πηλίκου πιθανοφανειών, απορρίπτουμε την H_0 όταν $\lambda \leq k$, δηλαδή η κρίσιμη περιοχή για τον έλεγχο προκύπτει αναζητώντας τα $\underset{\sim}{x}$ για τα οποία το λ παίρνει τιμές κοντά στο μηδέν. Αναλυτικά, η κρίσιμη περιοχή C του ελέγχου προσδιορίζεται ως: $C = \{\underset{\sim}{x} \mid \lambda \leq k\}$ με $k > 0$.

Το τεστ πηλίκου πιθανοφανειών εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε μορφή των στατιστικών υποθέσεων H_0 και H_a, π.χ. σύνθετη εναντίον σύνθετης. π.χ. $H_0: \theta \geq \theta_0$ vs $H_a: \theta < \theta_0$. Στη πιο συνηθισμένη περίπτωση στατιστικών ελέγχων, οι υποθέσεις H_0, H_a είναι συμπληρωματικές, δηλαδή κα-

λύπτουν το σύνολο του παραμετρικού
χώρου Θ και το πηλίκο πιθανοφανειών ορίζεται όπως παραπάνω. Αν οι δύο υποθέσεις <u>δεν</u> είναι συμπληρωματικές δηλ. $H_0: \theta \in \Theta_0$ vs $H_a: \theta \in \Theta_a$ με $\Theta_0 \cup \Theta_a \subset \Theta$, τότε το πηλίκο πιθανοφανειών ορίζεται ως:

$$\lambda = \frac{\max\limits_{\theta \in \Theta_0} L(\theta|\underset{\sim}{x})}{\max\limits_{\theta \in \Theta} L(\theta|\underset{\sim}{x})}.$$

Το ακριβές τεστ πηλίκου πιθανοφανειών βασίζεται στον υπολογισμό του πηλίκου $\lambda = \lambda(\underset{\sim}{x})$ που απαιτεί την εύρεση δύο μεγίστων. Το μέγιστο στον παρονομαστή είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης πιθανοφάνειας ενώ το μέγιστο στον αριθμητή που αναφέρεται σ' ένα μέγιστο της ίδιας συνάρτησης σε υποσύνολο του πεδίου ορισμού αναφέρεται ως μέγιστο σε περιορισμό. Για τον πλήρη καθορισμό του στατιστικού τεστ θα χρειαστεί ο υπολογισμός της κατανομής του λ.

Παράδειγμα Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με κατανομή $f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$. Να βρεθεί το στατιστικό τεστ και η κρίσιμη περιοχή μεγέθους 5% για τον έλεγχο $H_0: \theta \leq \theta_0$ έναντι της $H_a: \theta > \theta_0$.

Λύση Υπολογισμός του $\lambda = \dfrac{\max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta|\underline{x})}{}$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας $\max_{\theta \in \Theta} L(\theta|\underline{x})$ για το παραπάνω μοντέλο είναι:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i - \theta)}, \quad x_i \geq \theta$$

$$L(\theta) = e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta}, \quad x_{(1)} \geq \theta.$$

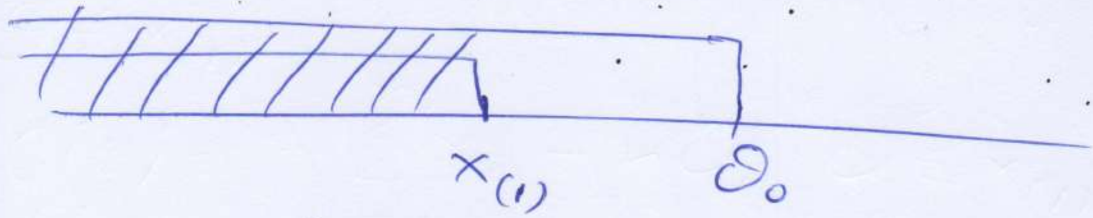
Εύρεση παρονομαστή. Είναι το ολικό μέγιστο. Μεγιστοποίηση $L(\theta)$ για

$\theta \leq x_{(1)}$.

$$\ell(\theta) = -\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta, \quad \theta \leq x_{(1)}$$

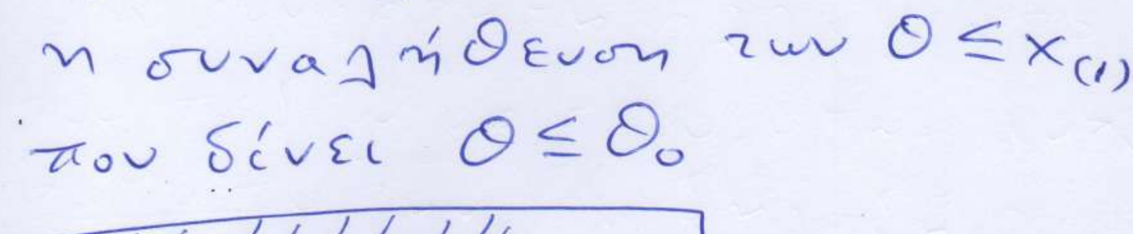
$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = n > 0.$$ Η $\ell(\theta)$ είναι αύξουσα συνάρτηση και επειδή $\theta \leq x_{(1)}$, θα είναι $\hat{\theta} = x_{(1)}$. Άρα, ο παρονομαστής του λ είναι: $\max_{\theta \in \Theta} L(\theta|\underset{\sim}{x}) = e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n x_{(1)}}$.

Για τον αριθμητή, μεγιστοποιούμε την ίδια συνάρτηση, αλλά για το υποσύνολο του πεδίου ορισμού, όπως αυτό ορίζεται από την H_0, δηλαδή για παράδειγμα: $\theta \leq \theta_0$. Η παράγωγος της L έχει υπολογιστεί, η συνάρτηση είναι αύξουσα άρα λαμβάνει μέγιστο στο άνω άκρο του πεδίου ορισμού της, εφόσον αυτό λαμβάνεται. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: (i) $\theta_0 > x_{(1)}$, τότε το πεδίο ορισμού είναι η συναλήθευση των $\theta \leq x_{(1)}$ και $\theta \leq \theta_0$ που δίνει $\theta \leq x_{(1)}$.



και κατά συνέπεια ο ΕΜΠ θα είναι το άνω άκρο του διαστήματος, δηλαδή $\hat{\theta}=x_{(1)}$. Ο αριθμητής συνεπώς ταυτίζεται με τον παρονομαστή και είναι: $e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n x_{(1)}}$, οπότε το πηλίκο λ είναι ίσο με 1.

(ii) $\theta_0 \leq x_{(1)}$, τότε το πεδίο ορισμού είναι η συναλήθευση των $\theta \leq x_{(1)}$ και $\theta \leq \theta_0$ που δίνει $\theta \leq \theta_0$



Αναζητούμε συνεπώς το μέγιστο της $L(\theta) = e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta}$ στο σύνολο $\theta \leq \theta_0$. Η μονοτονία της συνάρτησης έχει ήδη εξεταστεί, είναι γνησίως αύξουσα. Αλλάζει το πεδίο ορισμού που είναι $\theta \leq \theta_0$. Άρα, το μέγιστο λαμβάνεται στο άνω

άκρο του πεδίου ορισμού της $L(\theta)$,
δηλ. $\hat{\theta}=\theta_0$. Ο αριθμητής για την
(ii) θα είναι: $L(\theta)=e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_0}$.
Το πηλίκο πιθανοφανειών, λ, θα είναι:

$$\lambda=\frac{e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_0}}{e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i+n x_{(1)}}}=e^{n(\theta_0-x_{(1)})}$$

Συνοψίζοντας τις δύο περιπτώσεις:

$$\lambda=\begin{cases}1, & \theta_0>x_{(1)}\\ e^{n(\theta_0-x_{(1)})}, & \theta_0\leq x_{(1)}\end{cases}$$

Αναζητούμε την κρίσιμη περιοχή. Η κρίσιμη περιοχή προκύπτει για $\lambda\leq k$ δηλ. τα $\underset{\sim}{x}$ για τα οποία $\lambda(\underset{\sim}{x})$ παίρνει μικρές τιμές. Για τον πρώτο κλάδο, δεν υπάρχουν $\underset{\sim}{x}$ για τα οποία $\lambda\leq k$. Είναι ο τετριμμένος κλάδος και δεν οδηγεί σε κρίσιμη περιοχή. Από τον δεύτερο κλάδο, $\lambda\leq k$ έχουμε:

$e^{n(\theta_0 - x_{(1)})} \leq k \Rightarrow n(\theta_0 - x_{(1)}) \leq \ln k$

$\Rightarrow x_{(1)} \geq K$. Αυτή είναι η κρίσιμη περιοχή. Για δοθέν α, θα είναι:

$\alpha = P\left(x_{(1)} \geq K \middle| \theta \leq \theta_0\right)$. Χρειάζεται να υπολογίσουμε την κατανομή του $T = x_{(1)}$. Είναι $f_T(t) = n e^{-n(t-\theta)}$, $t \geq \theta$. Η παραπάνω πιθανότητα θα είναι:

$$\alpha = P\left(x_{(1)} \geq K \middle| f_T(t), \theta \leq \theta_0\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \int_K^{\infty} n e^{-n(t-\theta)} dt = \left[-e^{-n(t-\theta)}\right]_K^{\infty}$$

$$\Rightarrow \alpha = e^{-n(K-\theta)}.$$

Για $\theta \leq \theta_0$ το $e^{-n(K-\theta)}$ γίνεται μέγιστο όταν $\theta = \theta_0$.

$$\alpha = e^{-n(K-\theta_0)} \Rightarrow n(K-\theta_0) = -\ln \alpha$$

$$\Rightarrow K = \theta_0 - \frac{\ln \alpha}{n}.$$

Η κρίσιμη περιοχή, για πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι, α είναι:

$$X_{(1)} \geq \theta_0 - \frac{\ln \alpha}{n}. \boxtimes$$

<u>Ασκήσεις</u> <u>#1</u> Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$ με μ, σ^2 άγνωστα. Να βρεθεί η κρίσιμη περιοχή για $\alpha = 5\%$ για τον έλεγχο $H_0: \mu = \mu_0$ έναντι της $H_a: \mu \neq \mu_0$.

<u>Λύση</u> Για ένα τ.δ. μεγέθους n από την Κανονική Κατανομή, η συνάρτηση πιθανοφάνειας για $\theta_1 = \mu$, $\theta_2 = \sigma^2$ είναι:

$$L(\underset{\sim}{\theta} | \underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2\pi\theta_2} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2\theta_2}(x_i - \theta_1)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\theta_2} \right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\theta_2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_1)^2}.$$ Οι ΕΜΠ

είναι: $\hat{\theta}_1 = \hat{\mu} = \overline{X}$, $\hat{\theta}_2 = \hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n}$.

Στον παρονομαστή, το μέγιστο λαμβάνεται

για τους ΕΜΠ παραπάνω, άρα η μέγιστη τιμή της πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2 \mid \underset{\sim}{x}) = \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2}$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{n/2} e^{-n/2}.$$ Για τον αριθμητή του λ, χρειαζόμαστε το μέγιστο κάτω από την H_0, δηλ. $\mu=\mu_0$. Κάτω από αυτήν τη συνθήκη, η παράμετρος μ παίρνει μία μοναδική τιμή, την μ_0, και για την παράμετρο σ^2 που είναι άγνωστη, αλλά δεν εμπλέκεται στην H_0 (ενοχλητική παράμετρος) ο ΕΜΠ της για $\mu=\mu_0$ θα είναι: $\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{n}$. Άρα, ο αριθμητής του λ, θα είναι:

$$L(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2 \mid \underset{\sim}{x}) = \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_0^2}\right)^{n/2} \cdot e^{-\frac{n}{2}}$$

Συνεπώς,

$$\lambda = \frac{\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_0^2}\right)^{n/2} e^{-n/2}}{\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{n/2} e^{-n/2}} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2}\right)^{n/2}.$$

$$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}\right)^{n/2}.$$ Αναπτύσουμε

στον παρονομαστή, το τετράγωνο:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu_0)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\mu_0)^2.$$

Όμως $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ και

$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$. Άρα, $\lambda = \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{n-1}}\right)^{n/2}$.

Για την κρίσιμη περιοχή,

$$\lambda \le k \Rightarrow \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{n-1}}\right)^{n/2} \le k.$$ Κάνοντας πράξεις, λύνοντας ως προς t, θα έχουμε $t^2 \ge k'$ ή $|t| \ge k$. Για την εύρεση της σταθεράς k, $\alpha = P(|t| \ge k \mid \mu=\mu_0)$.

Για $\mu=\mu_0$ η τ.μ. $t = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$.

Άρα

$$\alpha = P\left(|t| \ge k \mid t \sim t_{n-1}\right) \Rightarrow k = t_{n-1,\alpha/2}.$$

Συνολικά, η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$|t| \ge t_{n-1,\alpha/2}. \quad \blacksquare$$

#2 Έστω $X_1,\dots,X_n$ τ.δ. από κανονικό πληθυσμό $N(\mu,\sigma^2)$ με μ,σ^2 άγνωστα. Να βρεθεί η κρίσιμη περιοχή για $\alpha=5\%$ για τον έλεγχο $H_0: \mu \ge \mu_0$ έναντι της $H_a: \mu<\mu_0$.

Λύση Οι ΕΜΠ για τον πλήρη παραμετρικό χώρο είναι $\hat{\mu}=\bar{X}$, $\hat{\sigma}^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$.

Ο παρονομαστής στον υπολογισμό του λ, είναι:

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2 | \underset{\sim}{x}) = \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{n/2} e^{-n/2}.$$ Για τον αριθμητή του λ, η μεγιστοποίηση θα γίνει για τον περιορισμένο χώρο, όπου $\mu \geq \mu_0$ για την πρώτη παράμετρο. Η 1^{η} παράγωγος της $\ln L(\mu, \sigma^2 | \underset{\sim}{x})$ έδινε:

$$\frac{\partial \ln L(\underset{\sim}{\theta} | \underset{\sim}{x})}{\partial \mu} = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \mu) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\Rightarrow \mu = \bar{x}$. Η τιμή $\mu = \bar{x}$, όταν ο παραμετρικός χώρος για το μ είναι πλήρης δηλαδή το $\mathbb{R}$ ήταν αποδεκτή τιμή για πιθανό ακρότατο. Στην περίπτωση που $\mu \geq \mu_0$

δηλ. $\mu \in [\mu_0, \infty)$, τότε $\mu = \bar{x}$, γίνεται αποδεκτό, αν $\bar{x} \in [\mu_0, \infty)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $\bar{x} > \mu_0$ ή $\bar{x} \in (\mu_0, \infty)$. Τότε στο $\mu = \bar{x}$ έχουμε μέγιστο, άρα $\hat{\mu} = \bar{x}$, $\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$. Επειδή οι ΕΜΠ ταυτίζονται σε αριθμητή και παρονομαστή, $\lambda = 1$.

(ii) $\bar{x} \leq \mu_0$.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας ως προς μ είναι αύξουσα στο $(-\infty, \bar{x})$ και φθίνουσα στο $[\bar{x}, \infty)$, εφόσον στο $\mu = \bar{x}$ έχουμε μέγιστο. Άρα, για το περιορισμένο πεδίο ορισμού $[\mu_0, \infty)$ η συνάρτηση είναι φθίνουσα και συνεπώς το μέγιστο λαμβάνεται στο κάτω άκρο δηλ. $\hat{\mu} = \mu_0$. Συνολικά, για τις δύο παραμέτρους, κάτω από την H_0, οι ΕΜΠ είναι: $\hat{\mu}_0 = \mu_0$, $\hat{\sigma}_0^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2$.

Η μέγιστη τιμή της πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}_0^2 | \underset{\sim}{x}) = \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_0^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}_0)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_0^2}\right)^{n/2} \cdot e^{-n/2}$$

Άρα για την (ii), $\lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{n/2}$. Και για τις δύο περιπτώσεις:

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \text{αν } \bar{x} > \mu_0 \\ \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{n/2}, & \text{αν } \bar{x} \leq \mu_0 . \end{cases}$$

Ως προς την κρίσιμη περιοχή, αναζητούμε $\lambda \leq k$. Επειδή, ο πρώτος κλάδος του λ είναι σταθερά μονάδα (μέγιστη τιμή του λ) δεν οδηγεί σε κρίσιμη περιοχή. Αναζητούμε την κρίσιμη περιοχή από το δεύτερο κλάδο, δηλ. $\left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{n/2} \leq k$ ή

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^{n/2} \leq k.$$ Παρόμοια, όπως στην #1, βρίσκουμε $t \leq K$, όπου

$t = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$. Επειδή $\bar{x} \leq \mu_0$ το t μπορεί να πάρει μόνο αρνητικές τιμές.
Για τον υπολογισμό του K:

$\alpha = P(t \leq K \mid \mu \geq \mu_0)$. Η μέγιστη τιμή της πιθανότητας λαμβάνεται για $\mu = \mu_0$.
Επειδή $t \sim t_{n-1}$, από τον ορισμό των εκατοστιαίων σημείων, προκύπτει ότι:

$K = -t_{n-1,\alpha}$. Άρα, συνολικά, η κρίσιμη περιοχή είναι $t \leq -t_{n-1,\alpha}$ ☒

5.5 Ασυμπτωτικό Τεστ πηλίκου πιθανοφανειών

Πολύ συχνά η γνώση της κατανομής του λ δεν είναι εφικτή και δεν είναι εφικτό, να προσδιορίσουμε το ακριβές τεστ πηλίκου πιθανοφανειών. Το παρακάτω αποτέλεσμα δίνει, την κατανομή του λ, για μεγάλο μέγεθος δείγματος και την κρίσιμη περιοχή του τεστ.

Θεώρημα Έστω ο έλεγχος της υπόθεσης $H_0: \theta \in \Theta_0$ vs $H_a: \theta \in \Theta_0^c$ όπου Θ_0 είναι υποσύνολο του παραμετρικού χώρου Θ και Θ_0^c το συμπλήρωμα του Θ_0. Αν ο παραμετρικός χώρος Θ έχει διάσταση r και ο παραμετρικός χώρος Θ_0 έχει διάσταση s κάτω από την H_0, τότε κάτω από ορισμένες συνθήκες, για μεγάλες τιμές του n, ισχύει:

$$-2\ln\lambda \sim \chi^2_{r-s}$$ κάτω από την H_0 και η κρίσιμη περιοχή για τον έλεγχο της υπόθεσης είναι:

$\{\underset{\sim}{x} \mid -2\ln\lambda > \chi^2_{r-s,\alpha}\}$, όπου α είναι το επίπεδο σημαντικότητας του τεστ. ☒

Παράδειγμα Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. από $Exp(\theta^{-1})$, με $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$, $x \geq 0$ και θ άγνωστη θετική παράμετρο. Να βρεθεί η κρίσιμη περιοχή για $\alpha = 5\%$ και για τον έλεγχο $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι της $H_a : \theta \neq \theta_0$.

Λύση Ο ΕΜΠ για τον πλήρη παραμετρικό χώρο είναι: $\hat{\theta} = \overline{X}$. Άρα, η μέγιστη πιθανοφάνεια για τον παρονομαστή του λόγου πιθανοφανειών είναι:

$$L(\hat{\theta}) = \frac{1}{\overline{X}^n} e^{-n}.$$

Για τον αριθμητή του λ, θα είναι $\theta = \theta_0$, κάτω από την H_0 και άρα ο παραμετρικός χώρος είναι το μονοσύνολο $\widetilde{\Theta}_0=\{\theta_0\}$ και η μέγιστη τιμή της πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\theta_0)=\frac{1}{\theta_0^n}e^{-n\bar{X}/\theta_0}.$$ Το πηλίκο πιθανοφανειών είναι:

$$\lambda=\frac{\frac{1}{\theta_0^n}e^{-n\bar{X}/\theta_0}}{\frac{1}{\bar{X}^n}e^{-n}}=\left(\frac{\bar{X}}{\theta_0}\right)^n e^{-n\left(\frac{\bar{X}}{\theta_0}-1\right)}$$

Για το ακριβές τεστ πηλίκου πιθανοφανειών, η κρίσιμη περιοχή θα έπρεπε να αναζητηθεί από την ανισότητα $\lambda\leq\kappa$. Η επίλυση της ανισότητας ως προς τη σ.σ. $\bar{X}$ που εμφανίζεται στο λ είναι δύσκολη, διότι το $\bar{X}$ συμμετέχει και στη δύναμη $\bar{X}^n$ και στον εκθέτη. Για το ασυμπτωτικό τεστ:

$$-2\ln\lambda=-2n(\ln\bar{X}-\ln\theta_0)+2n\left(\frac{\bar{X}}{\theta_0}-1\right).$$

Η κρίσιμη περιοχή είναι:

$-2\ln\lambda \sim \chi^2_1$. Οι βαθμοί ελευθερίας είναι 1, γιατί στον παρονομαστή εκτιμάται μία παράμετρος και στον αριθμητή καμία. Άρα, η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$-2n\left(\ln\bar{X}-\ln\theta_0\right)+2n\left(\frac{\bar{X}}{\theta_0}-1\right).$$

Για τον έλεγχο με $\alpha=5\%$, συγκρίνουμε την τιμή της ελεγχοσυνάρτησης που δίνει το δείγμα με την τιμή $\chi^2_{1,0.05}=3.841$. Απορρίπτουμε την H_0, αν η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης για το δείγμα υπερβαίνει την τιμή 3.841.

<u>Άσκηση</u> Έστω $X_1,\dots,X_n$ τ.δ. από $Exp(\theta_1^{-1})$ με $f(x)=\frac{1}{\theta_1}e^{-x/\theta_1}$, $x\geq 0$ και θ_1 άγνωστη θετική παράμετρο και έστω

$Y_1, \ldots, Y_m$ ένα ανεξάρτητο με το πρώτο τ.δ. από την $Exp(\theta_2^{-1})$ με $f(x) = \frac{1}{\theta_2} e^{-x/\theta_2}$, $x \geq 0$ και θ_2 άγνωστη θετική παράμετρο. Να βρεθεί η κρίσιμη περιοχή για $\alpha = 5\%$ για τον έλεγχο $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ έναντι της $H_a : \theta_1 \neq \theta_2$.

Λύση Υπολογίζουμε αρχικά το πηλίκο πιθανοφανειών. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι, αρχικά:

$$L(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1) L_2(\theta_2)$$

$$= \frac{1}{\theta_1^n} e^{-n\bar{x}/\theta_1} \frac{1}{\theta_2^m} e^{-m\bar{y}/\theta_2}.$$

Οι άγνωστοι παράμετροι είναι οι θ_1, θ_2 και ο παραμετρικός χώρος είναι $(0,\infty) \times (0,\infty)$. Το γινόμενο των δύο πιθανοφανειών προκύπτει από το γεγονός ότι τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα. Ακολουθεί η μεγιστοποίηση της πιθανοφάνειας ως προς θ_1, θ_2 για τον πλήρη παραμετρικό χώρο και τον υπολογισμό του παρονομαστή του λ.

$$\ell(\theta_1,\theta_2) = -n\ln\theta_1 - \frac{n\overline{X}}{\theta_1} - m\ln\theta_2 - \frac{m\overline{Y}}{\theta_2}$$

$$\frac{\partial \ell(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1} = -\frac{n}{\theta_1} + \frac{n\overline{X}}{\theta_1^2}$$

$$\frac{\partial \ell(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2} = -\frac{m}{\theta_2} + \frac{m\overline{Y}}{\theta_2^2}$$

Εξισώνοντας με το μηδέν και λύνοντας το σύστημα, λαμβάνουμε $\theta_1=\overline{X}$, $\theta_2=\overline{Y}$. Με τη $2^{η}$ παράγωγο, επιβεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση στο παραπάνω σημείο λαμβάνει μέγιστο. Άρα $\hat{\theta}_1=\overline{X}$ και $\hat{\theta}_2=\overline{Y}$. Η μέγιστη τιμή της πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) = \frac{1}{\hat{\theta}_1^{\,n}} e^{-\frac{n\overline{X}}{\hat{\theta}_1}} \frac{1}{\hat{\theta}_2} e^{-\frac{m\overline{Y}}{\hat{\theta}_2}}$$

$$= \frac{1}{\bar{X}^n}\frac{1}{\bar{Y}^m}e^{-(n+m)}.$$ Για τον αριθμητή του λ, λαμβάνουμε υπόψη την H_0 δηλ. $\theta_1=\theta_2=\theta$. Ο παραμετρικός χώρος είναι μονοδιάστατος και συγκεκριμένα είναι το $(0,\infty)$. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας γίνεται:

$$L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}e^{-n\bar{X}/\theta}\frac{1}{\theta^m}e^{-m\bar{Y}/\theta}.$$

Λογαριθμούμε και παραγωγίζουμε ως προς την άγνωστη παράμετρο θ.

$$\ell(\theta)=-n\ln\theta-\frac{n\bar{X}}{\theta}-m\ln\theta-\frac{m\bar{Y}}{\theta}$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{n\bar{X}}{\theta^2}-\frac{m}{\theta}+\frac{m\bar{Y}}{\theta^2}.$$

Εξισώνοντας με το μηδέν και λύνοντας ως προς θ, έχουμε $\theta=\dfrac{n\bar{X}+m\bar{Y}}{n+m}.$

Με $2^{η}$ παράγωγο, επιβεβαιώνουμε ότι στο σημείο αυτό, έχουμε μέγιστο, δηλ. $\hat{\theta} = \dfrac{n\overline{X} + m\overline{Y}}{n+m}$, κάτω από την H_0. Άρα, η μέγιστη τιμή της πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\hat{\theta}) = \frac{1}{\hat{\theta}^{n+m}} \cdot e^{-\frac{n\overline{X}+m\overline{Y}}{\hat{\theta}}}$$

$$= \left(\frac{n+m}{n\overline{X}+m\overline{Y}}\right)^{n+m} \cdot e^{-(n+m)}.$$

Το πηλίκο πιθανοφανειών είναι:

$$\lambda = \frac{\left(\frac{n+m}{n\overline{X}+m\overline{Y}}\right)^{n+m} \cdot e^{-(n+m)}}{\frac{1}{\overline{X}^n} \frac{1}{\overline{Y}^m} e^{-(n+m)}}$$

$$= \left(\frac{n+m}{n\overline{X}+m\overline{Y}}\right)^{n+m} \Big/ \left(\frac{1}{\overline{X}^n} \frac{1}{\overline{Y}^m}\right).$$

Ο τύπος του λ είναι πολύπλοκος, ώστε να είναι εφικτή η επίλυση της ανισότητας $\lambda \leq k$ και καταφεύγουμε σ' ένα ασυμπτωτικό τεστ.

$$-2\ln\lambda = -2(n+m)\ln\left(\frac{n+m}{n\bar{X}+m\bar{Y}}\right) - 2n\ln\bar{X} - 2m\ln\bar{Y}.$$

Η κρίσιμη περιοχή του τεστ είναι: $-2\ln\lambda \geq \chi^2_{1,\alpha}$. Η διαφορά της διάστασης των παραμετρικών χώρων είναι 1, γιατί στον παρονομαστή εκτιμούμε δύο παραμέτρους και στον αριθμητή εκτιμούμε μία παράμετρο.