



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΡΟΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

Σημειώσεις για το μάθημα

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Θεοδόσης Δημητράκος

e-mail: dimitheo@aegean.gr

Σάμος

2014

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Συνδυαστική από τα πρώτα στάδια της εμφάνισης της είχε ως αντικείμενο τη μελέτη του σχηματισμού, της απαρίθμησης και των ιδιοτήτων των διατάξεων, των συνδυασμών και των διαμερίσεων ενός πεπερασμένου συνόλου κάτω από ορισμένες συνθήκες. Η ανάπτυξη της θεωρίας των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής και η συνεχώς αυξανόμενη απαίτηση για πιο γενικούς από τις διατάξεις, συνδυασμούς και διαμερίσεις σχηματισμούς όπως και η εμφάνιση και ανάπτυξη των υπολογιστών έχουν συμβάλει στην αλματώδη ανάπτυξη της Συνδυαστικής στις τελευταίες δεκαετίες. Αξίζει να αναφερθεί ότι ένα μεγάλο πλήθος εφαρμογών της Θεωρίας Πιθανοτήτων σε περιοχές, όπως η Βιολογία, η Πληροφορική, η Γενετική, η Ψυχολογία και η Στατιστική βρίσκει ικανοποιητικές απαντήσεις μόνο μέσω καλά θεμελιωμένων συνδυαστικών τεχνικών, πράγμα που εξηγεί γιατί τα αντικείμενα που πραγματεύεται η Συνδυαστική είναι χρήσιμα για τους ερευνητές αυτών των γνωστικών περιοχών. Το ευρύ πεδίο των εφαρμογών των μεθόδων της Συνδυαστικής, την καθιστά πολύ χρήσιμη στους ερευνητές που ασχολούνται με την Επιχειρησιακή Έρευνα, τις φυσικές και τις κοινωνικές επιστήμες.

Σκοπός των παρόντων σημειώσεων, είναι η παροχή ενός κατάλληλου βοηθήματος για τους φοιτητές που διδάσκονται το μάθημα της Συνδυαστικής. Στο Κεφάλαιο 1 εισάγονται οι βασικές αρχές απαρίθμησης (δηλαδή η αρχή του αθροίσματος και η πολλαπλασιαστική αρχή). Επίσης, γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της σχέσης μεταξύ της συνδυαστικής ανάλυσης και του λογισμού πιθανοτήτων σε πεπερασμένους και ισοπίθανους δειγματικούς χώρους. Στο Κεφάλαιο 2 αφιερώνεται στην απαρίθμηση των διατάξεων, των συνδυασμών, των διαιρέσεων και των διαμερίσεων ενός πεπερασμένου συνόλου. Εξετάζονται επίσης, κλασσικές εφαρμογές στη Θεωρία των Πιθανοτήτων και στη Στατιστική. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται το Διωνυμικό Θεώρημα και οι γενικεύσεις του και δείχνεται πως αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη συνδυαστικών ταυτοτήτων και χρήσιμων τύπων. Η αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού είναι ένα από τα βασικά εργαλεία απαρίθμησης σχηματισμών και αποτελεί το κύριο αντικείμενο του Κεφαλαίου 4. Στο Κεφάλαιο 5 εισάγεται η έννοια της γεννήτριας συνάρτησης και παρουσιάζονται ποικίλες εφαρμογές της. Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον φοιτητή Νικόλαο Παπά και την φοιτήτρια Ευαγγελία Αντωνοπούλου που επιμελήθηκαν την ηλεκτρονική δακτυλογράφηση των παρόντων σημειώσεων. Ως συγγράμματα για περαιτέρω μελέτη, εκτός των παρόντων σημειώσεων, προτείνονται τα εξής:

A. Ελληνική Βιβλιογραφία

1. Κούτρας Μ. (2006) Εισαγωγή στη Συνδυαστική, Εκδόσεις Σταμούλη Α.Ε., Αθήνα.
2. Μωυσιάδης Χ. (2002) Συνδυαστική Απαρίθμηση, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

3. Χαραλαμπίδης Χ. (2000) Συνδυαστική, Τεύχος Ι, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Β. Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

1. Anderson I.A. (1974) A First Course in Combinatorial Mathematics, Clarendon Press, Oxford.
2. Berge C. (1971) Principles of Combinatorics, Academic Press, New York.
3. Bose R.C. and Manvel B. (1984) Introduction to Combinatorial Theory, Wiley, New York.
4. Brualdi R.A. (1999) Introductory Combinatorics, Prentice Hall, New Jersey.
5. Cohen D.I.A. (1978) Basic Techniques of Combinatorial Theory, Wiley, New York.
6. Riordan J. (1958) An Introduction to Combinatorial Analysis, Wiley, New York.
7. Riordan J. (1968) Combination Identities, Wiley, New York.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Εισαγωγή. Αρκετά συχνά εμφανίζεται η ανάγκη να βρούμε τα στοιχεία ενός συγκεκριμένου πεπερασμένου συνόλου ατόμων, πραγμάτων, ενεργειών κλπ. Οι τεχνικές υπολογισμού του πλήθους των στοιχείων πεπερασμένων συνόλων ή υποσυνόλων τους με συγκεκριμένες ιδιότητες αναφέρονται ως μέθοδοι απαρίθμησης και αποτελούν το κύριο αντικείμενο της Συνδυαστικής. Η ανάπτυξη αυτών των μεθόδων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν τα σύνολα αυτά έχουν μεγάλο πλήθος στοιχείων.

1.1 Απαρίθμηση και καταγραφή

Όταν το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου το οποίο θέλουμε να απαριθμήσουμε είναι μικρό, μπορούμε να προχωρήσουμε στη συστηματική καταγραφή των στοιχείων και στη συνέχεια να μετρήσουμε το πλήθος τους. Ο αριθμός των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου A συμβολίζεται με $|A|$ ή με $N(A)$ και καλείται **πληθικός αριθμός** ή **ισχύς** αυτού. Ας δούμε δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.1 Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε $n=3$ άτομα σε μία σειρά;

Λύση. Έστω A_1, A_2, A_3 τα τρία άτομα και έστω 1,2,3 οι τρεις θέσεις που θα καταλάβουν. Το πρώτο άτομο μπορεί να καταλάβει:

είτε την πρώτη θέση

A_1		
-------	--	--

είτε τη δεύτερη θέση

	A_1	
--	-------	--

είτε την τρίτη θέση

		A_1
--	--	-------

Σε κάθε περίπτωση οι θέσεις των υπολοίπων δύο ατόμων θα είναι:

A_1	A_2	A_3
-------	-------	-------

A_1	A_3	A_2
-------	-------	-------

A_3	A_1	A_2
-------	-------	-------

A ₂	A ₁	A ₃
----------------	----------------	----------------

A ₂	A ₃	A ₁
----------------	----------------	----------------

A ₃	A ₂	A ₁
----------------	----------------	----------------

Συνεπώς, οι δυνατές τοποθετήσεις των τριών ατόμων στις τρεις θέσεις είναι 6 και είναι οι ακόλουθες:

$A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_2$, $A_2A_1A_3$, $A_3A_1A_2$, $A_2A_3A_1$, $A_3A_2A_1$.

Τελικά, το σύνολο A που απαριθμήσαμε αποτελείται από διατεταγμένες τριάδες και μπορεί να γραφεί στη μορφή $A = \{(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_2, a_1, a_3), (a_3, a_1, a_2), (a_2, a_3, a_1), (a_3, a_2, a_1)\}$. Όταν το n μεγαλώσει, το αντίστοιχο πλήθος παίρνει υπερβολικά μεγάλες τιμές π.χ. όταν n = 6 άτομα, ο αριθμός των διαφορετικών τοποθετήσεων γίνεται 720, ενώ για n = 10 γίνεται 3628800. ■

ÜÜ

Παράδειγμα 1.2 Μία τριμελής επιτροπή αποτελείται από έναν εκπρόσωπο των εργατών έναν των βιομηχάνων και έναν των καταναλωτών. Οι υποψήφιοι για τη θέση του εκπροσώπου των εργατών είναι τρεις, του εκπροσώπου των βιομηχάνων δύο και του εκπροσώπου των καταναλωτών τέσσερις. Πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν;

Λύση. Συμβολίζουμε τους υποψηφίους για τη θέση του εκπροσώπου των εργατών με L_1, L_2, L_3 των βιομηχάνων με M_1, M_2 και των καταναλωτών με P_1, P_2, P_3, P_4 . Το διάγραμμα δέντρου (βλέπε π.χ. Κεφ. 1, Βιβλίο [1], Μ. Κούτρας) που μπορεί να σχεδιαστεί σε αυτήν την περίπτωση, δείχνει ότι υπάρχουν 24 δυνατές συνθέσεις της επιτροπής. Οι συνθέσεις αυτές είναι $L_1M_1P_1$, $L_1M_1P_2$, κτλ. ■

Στο επόμενο εδάφιο, θα δούμε τις δύο βασικές αρχές απαρίθμησης με τις οποίες μπορούμε να υπολογίζουμε το πλήθος των σχηματισμών που μας ενδιαφέρουν χωρίς να χρειάζεται να καταφύγουμε στην πλήρη καταγραφή των επιμέρους στοιχείων.

1.2 Η Αρχή του Αθροίσματος

Συχνά η επιλογή των στοιχείων ενός συνόλου μπορεί να χωριστεί σε ομάδες στοιχείων των οποίων η απαρίθμηση είναι πιο εύκολη. Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.2.1 (Αρχή του Αθροίσματος). Αν το στοιχείο a_1 μπορεί να επιλεγεί με n_1 διαφορετικούς τρόπους, το a_2 με n_2 διαφορετικούς τρόπους, ..., το a_k με n_k διαφορετικούς τρόπους και η επιλογή του στοιχείου a_i αποκλείει την επιλογή του στοιχείου a_j με $i \neq j$, τότε η επιλογή του a_1 ή του a_2 ή ... ή του a_k μπορεί να γίνει με $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ διαφορετικούς τρόπους.

Μία ισοδύναμη διατύπωση της αρχής του αθροίσματος είναι η ακόλουθη:

Πρόταση 1.2.2 (Αρχή του Αθροίσματος με συνολοθεωρητικούς όρους). Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n$ οποιαδήποτε $n \geq 2$ πεπερασμένα σύνολα τα οποία είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i, j = 1, \dots, n$ με $i \neq j$. Τότε $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$ ή $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$. (*)

Απόδειξη. Με επαγωγή. Για $n=2$, επειδή $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, οποιοδήποτε στοιχείο του $A_1 \cup A_2$ ανήκει είτε μόνο στο σύνολο A_1 είτε μόνο στο σύνολο A_2 . Άρα, $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$. Έστω ότι η σχέση (*) ισχύει για $n-1$, δηλαδή $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_{n-1}|$. Θα δείξουμε ότι αυτή ισχύει για n . Θέτουμε $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}$, $B = A_n$ και έχουμε:

$$A \cap B = (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n = (A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \dots \cup (A_{n-1} \cap A_n) = \emptyset \text{ και}$$

$$A \cup B = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

Άρα τα σύνολα A και B είναι πεπερασμένα και ξένα μεταξύ τους, συνεπώς η (*) ισχύει για κάθε $n \geq 2$.

Παράδειγμα 1.3 Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της ανίσωσης $x^2 + y^2 \leq 4$

Λύση. Το σύνολο που μας ενδιαφέρει είναι το σύνολο:

$$A = \{(x, y) | x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \text{ και } x^2 + y^2 \leq 4\}$$

και μπορεί να διαμεριστεί σε 5 υποσύνολα A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$A_i = \{(x, y) | x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = i\}, i = 0, 1, 2, 3, 4$$

Είναι:

$$A_0 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)\},$$

$$A_1 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = 1\} = \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\},$$

$$A_2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = 2\} = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\},$$

$$A_3 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = 3\} = \emptyset,$$

$$A_4 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = 4\} = \{(-2, 0), (2, 0), (0, -2), (0, 2)\},$$

ενώ $\forall i \neq j$ ισχύει $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Σύμφωνα με την αρχή του αθροίσματος $|A| = \left| \bigcup_{i=0}^4 A_i \right| = \sum_{i=0}^4 |A_i| = 1 + 4 + 4 + 0 + 4 = 13$. ■

1.3 Η Πολλαπλασιαστική Αρχή

Έστω ότι κατά την απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- (i) Η διαδικασία της απαρίθμησης μπορεί να χωριστεί σε n διαφορετικές φάσεις που εκτελούνται διαδοχικά ή μία μετά την άλλη.
- (ii) Το πλήθος των δυνατών επιλογών της κάθε φάσης είναι εντελώς καθορισμένο, όταν είναι γνωστά τα αποτελέσματα όλων των προηγούμενων φάσεων. Τότε η απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου μπορεί να γίνει με χρήση της καλούμενης αρχής του γινομένου ή πολλαπλασιαστικής αρχής (multiplication principle) που διατυπώνεται ως εξής:

Πρόταση 1.3.1 (Πολλαπλασιαστική Αρχή). Αν το στοιχείο a_1 μπορεί να επιλεγεί με n_1 διαφορετικούς τρόπους και για κάθε επιλογή του a_1 , το στοιχείο a_2 μπορεί να επιλεγεί με n_2 διαφορετικούς τρόπους, ..., και για κάθε επιλογή των $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, το στοιχείο a_k μπορεί να επιλεγεί με n_k διαφορετικούς τρόπους, τότε όλα τα στοιχεία $a_1, a_2, \dots, a_k$ μπορούν να επιλεγούν διαδοχικά και με αυτή τη συγκεκριμένη σειρά κατά $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ τρόπους.

Μία ειδική περίπτωση εφαρμογής της πολλαπλασιαστικής αρχής κατά τον υπολογισμό του πληθικού αριθμού του καρτεσιανού γινομένου n συνόλων:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.3.2 (Πολλαπλασιαστική αρχή με συνολοθεωρητικούς όρους). Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n$ οποιαδήποτε $n \geq 2$ πεπερασμένα σύνολα και $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ το καρτεσιανό τους γινόμενο. Τότε

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i| \quad (**)$$

Απόδειξη. Με επαγωγή. Για $n = 2, |A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$

Έστω $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ και $A_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$.

Τότε το σύνολο A_1 μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$A_1 = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k \text{ με } C_i = \{a_i\}, i = 1, \dots, k$$

και το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2$ γράφεται:

$$A_1 \times A_2 = (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k) \times A_2 = (C_1 \times A_2) \cup (C_2 \times A_2) \cup \dots \cup (C_k \times A_2)$$

όπου τα καρτεσιανά γινόμενα $C_1 \times A_2, C_2 \times A_2, \dots, C_k \times A_2$ είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους. Συνεπώς,

$$A_1 \times A_2 = C_1 \times A_2 \cup (C_2 \times A_2) \cup \dots \cup (C_k \times A_2)$$

και σύμφωνα με την αρχή του αθροίσματος:

$$|A_1 \times A_2| = |C_1 \times A_2| + |C_2 \times A_2| + \dots + |C_k \times A_2|$$

Παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε $i \in \{1, \dots, k\}$ το καρτεσιανό γινόμενο $C_i \times A_2$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (a_i, β_j) με πρώτο στοιχείο πάντα το a_i και δεύτερο στοιχείο ένα από τα στοιχεία $\beta_j, j = 1, \dots, r$ του συνόλου A_2 . Επομένως ο πληθικός αριθμός $|C_i \times A_2|$ είναι ίσος με $|A_2|$. Άρα $|C_i \times A_2| = |A_2|$ για οποιοδήποτε $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$|A_1 \times A_2| = |C_1 \times A_2| + |C_2 \times A_2| + \dots + |C_k \times A_2| = k \cdot |A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$$

Άρα η σχέση (**) ισχύει για $n = 2$.

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για $n - 1$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για n .

Αν θέσουμε $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}$ και $B = A_n$ τότε:

$$A \times B = (A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$\text{και } |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A \times B| = |A| \cdot |B| = |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}| \cdot |A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

Άρα, η σχέση (**) ισχύει για κάθε ακέραιο $n \geq 2$. ■

Παράδειγμα 1.4 (Αριθμός υποσυνόλων ενός πεπερασμένου συνόλου). Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο $Q_v = \{q_1, \dots, q_v\}$ και έστω $B_v = \mathbb{P}(Q_v)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Q_v . Ο αριθμός $s_v = |B_v|$ των υποσυνόλων του Q_v μπορεί να υπολογισθεί ως εξής: Σε κάθε υποσύνολο του S του Q_v αντιστοιχούμε μία διατεταγμένη v -άδα $(a_1, \dots, a_v)$ τέτοια ώστε $a_j = 0$ αν το στοιχείο $q_j \notin S$ για $j = 1, 2, \dots, v$ και $a_j = 1$ αν το στοιχείο $q_j \in S$ για $j = 1, 2, \dots, v$. Στο κενό σύνολο $\emptyset \subseteq Q_v$ αντιστοιχεί η v -άδα $(0, 0, \dots, 0)$ με όλες τις συνιστώσες μηδενικές, στο μονοσύνολο $\{q_1\} \subseteq Q_v$ αντιστοιχεί η v -άδα $(1, 0, \dots, 0)$ με την πρώτη συνιστώσα ίση με τη μονάδα και τις υπόλοιπες μηδενικές και στο σύνολο $Q_v \subseteq Q_v$ αντιστοιχεί η v -άδα $(1, 1, \dots, 1)$ με όλες τις συνιστώσες ίσες με τη μονάδα. Άρα, ο αριθμός s_v των υποσυνόλων του Q_v είναι ίσος με τον αριθμό των v -άδων $(a_1, \dots, a_v)$ με $a_j \in A_j = \{0, 1\}$ που είναι ίσος με τον αριθμό των στοιχείων του καρτεσιανού γινομένου $A_1 \times \dots \times A_v$ με $A_j = \{0, 1\}, j = 1, \dots, v$. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, ο αριθμός αυτός είναι ίσος με $s_v = 2^v$. ■

Παράδειγμα 1.5 Για την εγγραφή των αυτοκινήτων στο τμήμα μηχανοκίνητων οχημάτων και την έκδοση των πινακίδων κυκλοφορίας χρησιμοποιούνται δύο γράμματα και ένας τετραψήφιος αριθμός. Τα χρησιμοποιούμενα γράμματα του αλφαβήτου είναι τα εξής 14: Α, Β, Ε, Ζ, Η, Ι, Κ, Μ, Ν, Ο, Ρ, Τ, Υ, Χ. Να υπολογισθεί ο αριθμός των αυτοκινήτων που μπορούν να εγγραφούν με το σύστημα αυτό.

Λύση. Ο αριθμός εγγραφής αυτοκινήτων αποτελείται από 6 στοιχεία τοποθετημένα με μία σειρά $(a_1, \dots, a_6)$ όπου $a_j \in A_j, j = 1, 2, \dots, 6$ και $A_1 = A_2$ είναι το σύνολο των 14 γραμμάτων του αλφαβήτου που χρησιμοποιούνται, $A_3 = \{1, 2, \dots, 9\}, A_4 = A_5 = A_6 = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Επομένως, ο αριθμός των αυτοκινήτων που μπορούν να εγγραφούν με το σύστημα αυτό είναι ίσος με τον αριθμό των στοιχείων του καρτεσιανού γινομένου $B_1 = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_6 = \{(a_1, a_2, \dots, a_6), a_j \in A_j, j = 1, 2, \dots, 6\}$.

που σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή είναι ίσος με:

$$|B_1| = |A_1| * |A_2| * \dots * |A_6| = 14^2 * 9 * 10^3 = 1764000. \blacksquare$$

Παράδειγμα 1.6 Ένα διαγώνισμα πολλαπλής επιλογής περιέχει n ερωτήσεις με $k_1, k_2, \dots, k_n$ απαντήσεις αντίστοιχα. Ο διαγωνιζόμενος σημειώνει μία απάντηση για κάθε μία ερώτηση. Να υπολογισθεί το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που μπορεί να απαντηθεί το διαγώνισμα.

Λύση. Έστω A_r το σύνολο των δυνατών απαντήσεων στην r -οστή ερώτηση, $r = 1, \dots, n$ και B το σύνολο των απαντήσεων στο διαγώνισμα. Τότε: $B = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n), a_j \in A_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ και σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή: $|B| = |A_1| * |A_2| * \dots * |A_n| = k_1, k_2, \dots, k_n. \blacksquare$

Παράδειγμα 1.7 (Σήματα Morse). Τα γράμματα στον κώδικα Morse σχηματίζονται με μια διαδοχή από παύλες και τελείες επιτρεπομένων των επαναλήψεων. Να υπολογισθεί ο αριθμός των γραμμάτων με n το πολύ σύμβολα που μπορούν να σχηματισθούν.

Λύση. Ας θεωρήσουμε τα σύνολα B_v και A_k των γραμμάτων που σχηματίζονται με v το πολύ και k ακριβώς σύμβολα αντίστοιχα, $k = 1, \dots, v$. Τότε $A_i \cap A_j = \emptyset, i, j = 1, \dots, v, B_v = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_v$. Άρα σύμφωνα με την αρχή του αθροίσματος $|B_v| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_v|$.

Ο αριθμός $|A_k|$, επειδή καθένα από τα k σύμβολα μπορεί να επιλεγεί με δύο τρόπους (παύλα ή τελεία) είναι ίσως σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή με $|A_k| = 2^k, k = 1, \dots, v$ και συνεπώς, $|B_v| = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^v = 2(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{v-1})$.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του αθροίσματος των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο $\omega=2$ έχουμε:

$$|B_v| = 2 (2^v - 1). \blacksquare$$

1.4 Άλλοι κανόνες Απαρίθμησης

Συχνά τα σύνολα που θέλουμε να απαριθμήσουμε εκφράζονται μέσω άλλων συνόλων. Η επόμενη πρόταση, σε αυτές τις περιπτώσεις, μπορεί να αποδειχτεί ιδιαίτερα χρήσιμη.

Πρόταση 1.4.1 Αν A, B είναι πεπερασμένα υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω τότε:

A) $|A^c| = |\Omega| - |A|$

B) $|A \cap B^c| = |A| - |A \cap B|$

Γ) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Απόδειξη.

A) Είναι $|A \cup A^c| = |A| + |A^c|$. Όμως, $A \cup A^c = \Omega$. Άρα $|\Omega| = |A| + |A^c|$ ή $|A^c| = |\Omega| - |A|$

B) Αν $A_1 = A \cap B$, $A_2 = A \cap B^c$

$$A_1 \cap A_2 = (A \cap B) \cap (A \cap B^c) = A \cap (B \cap B^c) = A \cap \emptyset = \emptyset \text{ οπότε,}$$

$$|(A \cap B) \cap (A \cap B^c)| = |A \cap B| + |A \cap B^c|, \text{ όμως, } (A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A.$$

Γ) $A \cup B = (A \cap B^c) \cup B = A_1 \cup A_2$

$$|A \cup B| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = |A \cap B^c| + |B|. \text{ Από (β)}$$

$$|A \cup B| = (|A| - |A \cap B|) + |B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \blacksquare$$

Παράδειγμα 1.8 Από τους 200 φοιτητές που συμμετείχαν στις εξετάσεις των μαθημάτων μίας εξεταστικής περιόδου, 120 πέρασαν το μάθημα της Συνδυαστικής, 110 πέρασαν το μάθημα της Περιγραφικής Στατιστικής, ενώ 50 φοιτητές πέρασαν και τα δύο μαθήματα. Πόσοι φοιτητές (α) πέρασαν το μάθημα της Συνδυαστικής

χωρίς να περάσουν συγχρόνως και το μάθημα της Περιγραφικής Στατιστικής; (β) πέρασαν το μάθημα της Περιγραφικής Στατιστικής, χωρίς να περάσουν συγχρόνως και το μάθημα της Συνδυαστικής; (γ) πέρασαν τουλάχιστον σε ένα από τα δύο μαθήματα; (δ) δεν πέρασαν κανένα από τα δύο μαθήματα;

Λύση. Έστω Ω : σύνολο φοιτητών που προσήλθαν στις εξετάσεις

A : σύνολο φοιτητών που πέρασαν το μάθημα της Συνδυαστικής

B : σύνολο φοιτητών που πέρασαν το μάθημα της Περιγραφικής Στατιστικής

Τότε: $|\Omega| = 200$, $|A| = 120$, $|B| = 110$, $|A \cap B| = 50$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.4.1, έχουμε:

$$(\alpha) |A \cap B^c| = |A| - |A \cap B| = 120 - 50 = 70.$$

$$(\beta) |A^c \cap B| = |B| - |A \cap B| = 110 - 50 = 60.$$

$$(\gamma) |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 120 + 110 - 50 = 180.$$

$$(\delta) |(A \cup B)^c| = |\Omega| - |A \cup B| = 200 - 180 = 20. \blacksquare$$

1.5 Πιθανότητες σε πεπερασμένους δειγματικούς χώρους

Ο όρος «πιθανότητα» είναι άμεσα συνυφασμένος με τη μελέτη φαινομένων, όπου υπάρχει τυχαιότητα ή αβεβαιότητα. Ένα από τα παλαιότερα προβλήματα των πιθανοτήτων είναι εκείνο όπου ο Γάλλος κόμης Chavalier de Mere, επαγγελματίας παίκτης τυχερών παιχνιδιών του 16^{ου} αιώνα, έθεσε υπόψη του διάσημου Μαθηματικού και Φιλοσόφου της εποχής Pascal το ακόλουθο ερώτημα: είναι προτιμότερο να στοιχηματίσει κανείς ότι ρίχνοντας ένα ζάρι 4 φορές θα φέρει ένα τουλάχιστον 6 ή ότι ρίχνοντας δύο ζάρια 24 φορές θα φέρει τουλάχιστον μία φορά εξάρες; Ο όρος πείραμα τύχης χρησιμοποιείται για μια διαδικασία με τυχαίο ή αβέβαιο αποτέλεσμα. Π.χ. η ρίψη νομίσματος μία ή περισσότερες φορές, η επιλογή ενός φύλλου από μία τράπουλα, η καταγραφή του χρόνου που απαιτείται για να διανύσουμε μία συγκεκριμένη διαδρομή. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται δειγματικός χώρος (sample space) και συνήθως συμβολίζεται με Ω . Για παράδειγμα, κατά τη ρίψη ενός νομίσματος τρεις φορές τα δυνατά αποτελέσματα είναι τριάδες από κεφαλές (Κ) και γράμματα (Γ). Ο δειγματικός χώρος, συνεπώς, είναι:

$$\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}.$$

Κάθε υποσύνολο A του δειγματικού χώρου Ω ονομάζεται ενδεχόμενο (ή γεγονός). Ένα ενδεχόμενο λέγεται απλό ή στοιχειώδες, αν περιέχει ένα μόνο στοιχείο ενώ λέγεται σύνθετο, αν περιέχει περισσότερα του ενός στοιχεία. Αν τα ενδεχόμενα A και B δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο θα καλούνται ξένα ή ασυμβίβαστα. Το κενό σύνολο $\emptyset$ αναφέρεται συνήθως ως αδύνατο ενδεχόμενο ενώ ο δειγματικός χώρος Ω ως βέβαιο ενδεχόμενο.

Παράδειγμα 1.9 Τα ενδεχόμενα A_i εμφανίζονται i κεφαλές (Κ) $i=0,1,2,3$ δίνονται από τα σύνολα:

$$A_0 = \{\Gamma\Gamma\Gamma\} \text{ (απλό ενδεχόμενο)}$$

$$A_1 = \{\text{Κ}\Gamma\Gamma, \Gamma\text{Κ}\Gamma, \Gamma\Gamma\text{Κ}\} \text{ (σύνθετο ενδεχόμενο)}$$

$$A_2 = \{\text{ΚΚ}\Gamma, \text{Κ}\Gamma\text{Κ}, \Gamma\text{ΚΚ}\} \text{ (σύνθετο ενδεχόμενο)}$$

$$A_3 = \{\text{ΚΚΚ}\} \text{ (απλό ενδεχόμενο)}$$

Το ενδεχόμενο A : στις 3 ρίψεις έχει εμφανιστεί τουλάχιστον 1 φορά κεφαλή και τουλάχιστον 1 φορά γράμματα περιγράφεται από την ένωση $A_1 \cup A_2$

Το ενδεχόμενο B : οι τρεις ρίψεις δίνουν ίδιο αποτέλεσμα περιγράφεται από την ένωση $A_0 \cup A_3$

Το ενδεχόμενο Γ : δεν εμφανίζονται δύο κεφαλές εκφράζεται από το συμπλήρωμα A_2^c . ■

Στο ενδεχόμενο A , θα ήταν σημαντικό, με κάποιο συστηματικό τρόπο, να αντιστοιχήσουμε μία αριθμητική ποσότητα που θα δηλώνει πόσο αναμενόμενο ή μη αναμενόμενο είναι να πάρουμε αποτελέσματα που ανήκουν στο A , δηλαδή να πραγματοποιηθεί ή όχι το ενδεχόμενο A . Αυτή η αναγκαιότητα οδηγεί στην έννοια της πιθανότητας. Εδώ, θα περιοριστούμε στον ορισμό της πιθανότητας $P(A)$ στα ενδεχόμενα A ενός δειγματικού χώρου Ω στην ειδική περίπτωση όπου ισχύουν οι επόμενες δύο υποθέσεις:

(α) Ο δειγματικός χώρος Ω είναι πεπερασμένος δηλαδή $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$.

(β) Όλα τα απλά ενδεχόμενα $\omega_i, i=1, \dots, N$ έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης, δηλαδή $P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_N\})$.

Στην περίπτωση αυτή τα ενδεχόμενα ονομάζονται ισοπίθανα. Ο Laplace (1812) έδωσε τον επόμενο ορισμό που είναι γνωστός ως ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας.

Ορισμός 1.5.1 (Κλασσικός ορισμός της πιθανότητας κατά Laplace). Αν ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος είναι πεπερασμένος και όλα τα απλά (στοιχειώδη) ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A δίνεται από τον τύπο:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{πλήθος των στοιχείων του } A}{\text{πλήθος των στοιχείων του } \Omega}$$

Τα στοιχεία του ενδεχομένου A καλούνται συνήθως ευνοϊκές περιπτώσεις (ή ευνοϊκά αποτελέσματα) ενώ τα στοιχεία του βασικού συνόλου (δειγματικού χώρου) Ω δυνατές περιπτώσεις (ή δυνατά αποτελέσματα).

Παράδειγμα 1.10 Σε μία λαχειοφόρο αγορά πουλήθηκαν 10.000 λαχνοί αριθμημένοι από το 1 μέχρι το 10.000. Κατά την κλήρωση επιλέγεται ένας λαχνός στην τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα ο λαχνός που κερδίζει να έχει ζυγό αριθμό ή αριθμό που διαιρείται με το 5;

Λύση Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A : ο αριθμός που κερδίζει είναι ζυγός

B : ο αριθμός που κερδίζει διαιρείται με το 5

του δειγματικού χώρου $\Omega = \{1, 2, \dots, 10.000\}$.

Προφανώς $|\Omega| = 10.000$, ενώ $|A| = \frac{10.000}{2} = 5.000$, $|B| = \frac{10.000}{5} = 2.000$ διότι υπάρχουν 10.000:2 άρτιοι

θετικοί ακέραιοι μικρότεροι ή ίσοι του 10.000 και 10.000:5 θετικοί ακέραιοι μικρότεροι ή ίσοι του 10.000 οι οποίοι διαιρούνται με το 5. Το σύνολο $A \cap B$ περιέχει τα στοιχεία του Ω τα οποία διαιρούνται και με το 2 και με το 5, συνεπώς θα διαιρούνται και με το $2 \cdot 5 = 10$.

$$\text{Άρα } |A \cap B| = \frac{10.000}{10} = 1.000.$$

Το ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει αντιστοιχεί στο σύνολο $A \cup B$ για το οποίο:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5.000 + 2.000 - 1.000 = 6.000.$$

$$\text{Άρα, } P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{6000}{10000} = \frac{3}{5} = 60\%. \blacksquare$$

Για τη συνολοσυνάρτηση P , όπως αυτή ορίστηκε από τον Laplace ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.5.1 (Ιδιότητες της πιθανότητας). Η συνάρτηση P ικανοποιεί τις επόμενες τρεις ιδιότητες:

(P1) $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο A του Ω .

(P2) $P(\Omega) = 1$.

(P3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, για κάθε ζεύγος ξένων ανά δύο ενδεχομένων A, B του Ω .

Απόδειξη. (P1) Προφανής, αφού $|A| \geq 0, |\Omega| > 0$ άρα $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \geq 0$.

(P2) Είναι $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$.

(P3) Είναι συνέπεια της αρχής του αθροίσματος, αφού για $A \cap B = \emptyset$, θα έχουμε:

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B)$$

Οι ιδιότητες P1-P3 χρησιμοποιήθηκαν από τον Ρώσο Μαθηματικό Kolmogorov (1903-1988) για την εισαγωγή του αξιωματικού ορισμού της πιθανότητας. Ο ορισμός αυτός καλύπτει και την περίπτωση δειγματικών χώρων στους οποίους δεν ισχύει η συνθήκη του ισοπίθανου των απλών ενδεχομένων που απαιτεί ο κλασσικός ορισμός.

Τρεις χρήσιμες ιδιότητες της πιθανότητας προκύπτουν άμεσα από την προηγούμενη πρόταση:

i) $P(A') = 1 - P(A)$.

ii) Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ισχύει

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Ειδικά αν $B \subseteq A$ ισχύει ότι: $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

iii) Αν $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ τότε $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$.

Παραδείγματα εφαρμογής του κλασσικού ορισμού της πιθανότητας δίνονται στο επόμενο κεφάλαιο μετά την εισαγωγή των απαραίτητων για την παρουσίαση τους εννοιών της Συνδυαστικής.