

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Εισαγωγή. Οι αριθμοί $\binom{n}{k}$ που εκφράζουν το πλήθος των n στοιχείων ανά k αποτελούν ίσως τους πιο σημαντικούς αριθμούς της Συνδυαστικής και καλούνται διωνυμικοί συντελεστές, διότι εμφανίζονται ως συντελεστές κατά την ανάπτυξη της n -οστής δύναμης του διωνύμου $a + b$ σε δυνάμεις των a και b . Στο κεφάλαιο αυτό θα διατυπώσουμε το διωνυμικό θεώρημα και θα εξετάσουμε διάφορες εφαρμογές του στον υπολογισμό συνδυαστικών αθροισμάτων.

3.1 Παραγοντικά και Διωνυμικοί συντελεστές

Αν $x \in \mathbb{R}$ και k ένας θετικό ακέραιος, ορίζουμε ως παραγοντικό k τάξης του x την ποσότητα:

$$(x)_k = x \cdot (x-1) \cdots (x-k+1).$$

Για $k=0$, θέτουμε $(x)_0 = 1$.

Αν στην προηγούμενη σχέση θέσουμε όπου x το $-x$, θα έχουμε:

$$(-x)_k = (-x) \cdot (-x-1) \cdots (-x-k+1) = (-1)^k \cdot x \cdot (x+1) \cdots (x+k-1).$$

Η ποσότητα $x \cdot (x+1) \cdots (x+k-1)$ καλείται ανοδικό παραγοντικό k τάξης του x και συμβολίζεται με $[x]_k$, δηλαδή, $[x]_k = x \cdot (x+1) \cdots (x+k-1)$. Για $k=0$, θέτουμε $[x]_0 = 1$.

Συχνά το $(x)_k$ καλείται καθοδικό παραγοντικό k τάξης (ή απλά παραγοντικό k τάξης). Ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες των παραγοντικών δίνονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.1.1 Αν $x \in \mathbb{R}$ και k, r θετικοί ακέραιοι, τότε:

$$(\alpha) (-x)_k = (-1)^k [x]_k, (\beta) [-x]_k = (-1)^k (x)_k, (\gamma) (x)_{k+r} = (x)_k (x-k)_r, (\delta) [x]_{k+r} = [x]_k [x+k]_r.$$

Απόδειξη. (α) $(-x)_k = (-1)^k x(x+1) \cdots (x+k-1) = (-1)^k [x]_k$.

(β) Προκύπτει άμεσα από το (α) θέτοντας το $-x$ στη θέση του x .

$$[-x]_k = (-x)(-x+1) \cdots (-x+k-1) = (-1)^k x(x-1) \cdots (x-k+1) = (-1)^k (x)_k.$$

(γ) Έχουμε:

$$\begin{aligned} (x)_{k+r} &= x(x-1) \cdots (x-(k+r)+1) = x(x-1) \cdots (x-k-r+1) \\ &= [x(x-1) \cdots (x-k+1)][(x-k)(x-k-1) \cdots (x-k-r+1)] = (x)_k (x-k)_r. \end{aligned}$$

(δ) Αν στην ταυτότητα που αποδείξαμε στο (γ) θέσουμε στη θέση του x το $-x$, έχουμε:

$(-x)_{k+r} = (-x)_k (-x-k)_r$ και από το (α) προκύπτει

$$(-1)^{k+r} [x]_{k+r} = (-1)^k [x]_k (-1)^r [x+k]_r \Rightarrow [x]_{k+r} = [x]_k [x+k]_r.$$

Για κάθε $x \in \mathfrak{R}$ και κάθε θετικό ακέραιο k , οι ποσότητες $\binom{x}{k} = \frac{(x)_k}{k!} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ καλούνται

διωνυμικοί συντελεστές. Όμοια ορίζουμε: $\left[\begin{smallmatrix} x \\ k \end{smallmatrix} \right] = \frac{[x]_k}{k!} = \frac{x(x+1)\cdots(x+k-1)}{k!}$. Για $k=0$, θέτουμε:

$$\binom{x}{0} = \left[\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 1. \text{ Μερικές σχέσεις μεταξύ των } \binom{x}{k} \text{ και } \left[\begin{smallmatrix} x \\ k \end{smallmatrix} \right] \text{ παρουσιάζονται στην επόμενη πρόταση.}$$

Πρόταση 3.1.2 Αν $x \in \mathfrak{R}$ και k θετικός ακέραιος, τότε:

$$(\alpha) \binom{-x}{k} = (-1)^k \left[\begin{smallmatrix} x \\ k \end{smallmatrix} \right] \quad (\beta) \left[\begin{smallmatrix} -x \\ k \end{smallmatrix} \right] = (-1)^k \binom{x}{k} \quad (\gamma) \binom{x}{k} = \left[\begin{smallmatrix} x-k+1 \\ k \end{smallmatrix} \right]$$

$$(\delta) \left[\begin{smallmatrix} x \\ k \end{smallmatrix} \right] = \binom{x+k-1}{k}.$$

Απόδειξη. (α), (β). Άμεση συνέπεια του ορισμού και της Πρότασης 3.1.1 ((α) και (β)).

$$(\alpha) \binom{-x}{k} = \frac{(-x)_k}{k!} = (-1)^k \frac{[x]_k}{k!} = (-1)^k \left[\begin{smallmatrix} x \\ k \end{smallmatrix} \right].$$

$$(\beta) \left[\begin{smallmatrix} -x \\ k \end{smallmatrix} \right] = \frac{[-x]_k}{k!} = \frac{(-1)^k (x)_k}{k!} = (-1)^k \binom{x}{k}.$$

(γ) Έχουμε

$$\begin{aligned} \binom{x}{k} &= \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} = \frac{(x-k+1)(x-k+2)\cdots x}{k!} = \frac{(x-k+1)[(x-k+1)+1]\cdots[(x-k+1)+k-1]}{k!} \\ &= \frac{[x-k+1]_k}{k!} = \left[\begin{smallmatrix} x-k+1 \\ k \end{smallmatrix} \right]. \end{aligned}$$

(δ) Προκύπτει αν στην (γ) θέσουμε $x+k-1$ στη θέση του x .

$$\binom{x+k-1}{k} = \left[\begin{smallmatrix} x+k-1-k+1 \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} x \\ k \end{smallmatrix} \right].$$

Παράδειγμα 3.1 Έστω $x \in \mathfrak{R}$ και k θετικός ακέραιος. Ναδειχτεί ότι:

(α) $(x)_{k+1} = x(x)_k - k(x)_k$. (β) Το παραγοντικό k τάξεως $(x)_k$ ως πολυώνυμο βαθμού k ως προς x , γράφεται

στη μορφή $(x)_k = \sum_{r=0}^k a_r x^r$. Οι συντελεστές a_r του πολυωνύμου καλούνται αριθμοί Stirling πρώτου είδους και

συμβολίζονται με $s(k, r)$. Δείξτε ότι οι αριθμοί Stirling $s(k+1, r)$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$s(k+1, r) = s(k, r-1) - ks(k, r).$$

Λύση. (α) Είναι $(x)_{k+1} = (x)_k(x-k)_1 = (x)_k(x-k) = x(x)_k - k(x)_k$.

(β) Σύμφωνα με τον ορισμό των $s(k+1, r), s(k, r)$ έχουμε:

$$(x)_{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} s(k+1, r)x^r, (x)_k = \sum_{r=0}^k s(k, r)x^r. \text{ Αντικαθιστώντας στη σχέση του (α) βρίσκουμε:}$$

$$\sum_{r=0}^{k+1} s(k+1, r)x^r = \sum_{r=0}^k s(k, r)x^{r+1} - k \sum_{r=0}^k s(k, r)x^r.$$

Αν στο δεύτερο άθροισμα θέσουμε $r+1 = j$, προκύπτει

$$\sum_{r=0}^{k+1} s(k+1, r)x^r = \sum_{j=1}^{k+1} s(k, j-1)x^j - k \sum_{r=0}^k s(k, r)x^r \quad \text{ή}$$

$$\sum_{r=0}^{k+1} s(k+1, r)x^r = \sum_{r=1}^{k+1} s(k, r-1)x^r - k \sum_{r=0}^k s(k, r)x^r.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $x \in \mathfrak{R}$, άρα θα πρέπει

$$s(k+1, r) = s(k, r-1) - ks(k, r), \text{ για } r = 1, 2, \dots, k$$

$$s(k+1, 0) = -ks(k, 0), r = 0$$

$$s(k+1, k+1) = s(k, k), r = k+1.$$

Η πρώτη σχέση είναι η ζητούμενη.

Από τη δεύτερη προκύπτει ότι:

$$s(1, 0) = s(1+0, 0) = (-0)s(0, 0) = 0 \text{ για } k = 0.$$

$$s(2, 0) = s(1+1, 0) = (-1)s(1, 0) = 0 \text{ κ.ο.κ. δηλαδή } s(k, 0) = 0, \text{ για } k = 1, 2, \dots$$

Η τρίτη σχέση δίνει $s(k, k) = s(k-1, k-1) = \dots = s(1, 1)$.

$$\text{Για το } s(1, 1), \text{ ισχύει: } (x)_1 = s(1, 1)x + s(1, 0) = \sum_{r=0}^1 s(k, r)x^r = x^0 s(1, 0) + xs(1, 1).$$

Όμως, $s(1, 0) = 0$ άρα $s(1, 1) = 1$. Τελικά, $s(k, k) = 1$, για $k = 1, 2, \dots$ $\square$

3.2 Το Διωνυμικό Θεώρημα

Η πιο απλή μορφή του διωνυμικού θεωρήματος διατυπώθηκε από τον Newton.

Θεώρημα 3.2.1 (Τύπος του Νεύτωνα). Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και n θετικός ακέραιος. Το ανάπτυγμα n -οστής δύναμης του διώνυμου $a + b$ δίνεται από τον τύπο:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

Απόδειξη. (Με επαγωγή). Για $n=0$, ο τύπος ισχύει, γιατί $(a + b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k}a^k b^{0-k} = \binom{0}{0}a^0 b^0$. Έστω ότι

ισχύει για $n=r$, δηλαδή $(a + b)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k}a^k b^{r-k}$. Θα δείξουμε ότι ο τύπος ισχύει για $n=r+1$,

δηλαδή, $(a + b)^{r+1} = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k}a^k b^{r+1-k}$. Όμως, $(a + b)^{r+1} = (a + b)^r (a + b)$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση για $n=r$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} (a + b)^{r+1} &= (a + b) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k}a^k b^{r-k} = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k}a^{k+1}b^{r-k} + \sum_{k=0}^r \binom{r}{k}a^k b^{r-k+1} \\ &= \binom{r}{0}ab^r + \binom{r}{1}a^2b^{r-1} + \dots + \binom{r}{r-1}a^r b + \binom{r}{r}a^{r+1} + \binom{r}{0}b^{r+1} + \binom{r}{1}ab^r + \binom{r}{2}a^2b^{r-1} + \dots + \binom{r}{r}a^r b. \end{aligned}$$

Από το τρίγωνο του Pascal: $\binom{r}{j-1} + \binom{r}{j} = \binom{r+1}{j}$, $j=1, 2, \dots, r-1$ και τις ισότητες $\binom{r}{0} = \binom{r}{r} = 1$ έχουμε:

$$(a + b)^{r+1} = b^{r+1} + \binom{r+1}{1}ab^r + \binom{r+1}{2}a^2b^{r-1} + \dots + \binom{r+1}{r}a^r b + a^{r+1} = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k}a^k b^{r+1-k}.$$

Αποδείχθηκε το ζητούμενο για $n=r+1$. Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, ο τύπος ισχύει για όλες τις μη-αρνητικές ακέραιες τιμές του n .

β' τρόπος: (Συνδυαστική απόδειξη). Αφού $(a + b)^n = (a + b) \cdots (a + b)$ n -φορές, για να βρούμε το ανάπτυγμα (δηλαδή να γράψουμε το $(a + b)^n$ ως άθροισμα δυνάμεων των a, b), θα πρέπει από κάθε παράγοντα $(a + b)$ να επιλέξουμε είτε το a είτε το b και να τα πολλαπλασιάσουμε μεταξύ τους. Αν το a επιλεγεί από k παράγοντες, $k=0, \dots, n$ τότε το b θα επιλεγεί από τους υπόλοιπους $n-k$ παράγοντες και εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό θα προκύψει το μονώνυμο $a^k b^{n-k}$, $k=0, \dots, n$. Όμως η επιλογή του a μπορεί να γίνει με $\binom{n}{k}$ τρόπους, όσοι και οι τρόποι επιλογής k παραγόντων από τους n διαθέσιμους. Επομένως, το μονωνύμο

$a^k b^{n-k}$ εμφανίζεται συνολικά $\binom{n}{k}$ φορές, δηλαδή ο γενικός όρος του αθροίσματος είναι της μορφής $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$. Έτσι, ολοκληρώνεται η συνδυαστική απόδειξη. $\square$

Παράδειγμα 3.2 Να βρεθούν οι συντελεστές του a^8 στο ανάπτυγμα των παραστάσεων: $(a+2)^{15}$ και $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{14}$.

$$\text{Λύση. } (a+2)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} a^k 2^{15-k} = \sum_{k=0}^{15} \left\{ 2^{15-k} \binom{15}{k} \right\} a^k.$$

Άρα, ο συντελεστής του a^8 θα είναι:

$$\text{Για } k=8, 2^{15-8} \binom{15}{8} = 2^7 \frac{(15)_8}{8!} = 2^7 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13.$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^{14} = \sum_{k=0}^{14} \binom{14}{k} a^k \left(\frac{1}{a}\right)^{14-k} = \sum_{k=0}^{14} \binom{14}{k} a^{2k-14}.$$

Άρα ο συντελεστής του a^8 θα προκύψει αν θέσουμε $2k - 14 = 8$ δηλαδή $k = 11$. Ο ζητούμενος αριθμός είναι:

$$\binom{14}{11} = \binom{14}{14-11} = \binom{14}{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \square$$

Ο τύπος του Νεύτωνα επεκτείνεται και για μη-ακέραιες θετικές τιμές του n . Ισχύει το θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.2 (Διωνυμικό θεώρημα). Έστω $a, b, x \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $|a| < |b|$. Τότε: $(a+b)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} a^k b^{x-k}$.

Η συνθήκη $|a| < |b|$ εξασφαλίζει τη σύγκλιση της σειράς στο δεξιό μέλος. Ειδική περίπτωση του προηγούμενου θεωρήματος είναι το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.2.3 Έστω $t \in \mathbb{R}$ ώστε $|t| < 1$ και n θετικός ακέραιος. Τότε: $\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.2.2, για $a = -t, b = 1, x = -n$ παίρνουμε $\frac{1}{(1-t)^n} = (1-t)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-t)^k 1^{-n-k}$.

Όμως, ισχύει ότι: $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$.

Άρα $\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} (-t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k$.

Παράδειγμα 3.3 Να υπολογιστούν οι συντελεστές του t^k στο ανάπτυγμα των επόμενων συναρτήσεων σε δυνάμεις του t .

(α) $f(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)^n, |t| < 1$ (β) $g(t) = \frac{(1-t)^{-n} - 1}{t}, |t| < 1, t \neq 0$.

Λύση. (α) Από το προηγούμενο πόρισμα, έχουμε διαδοχικά:

$$f(t) = \frac{t^n}{(1-t)^n} = t^n \frac{1}{(1-t)^n} = t^n \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^{n+r} \text{ ή θέτοντας } n+r=k \Rightarrow r=k-n$$

έχουμε: $f(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{k-n} t^k$. Άρα, ο συντελεστής του $t^k, k \geq n$, στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(t)$ είναι

$$\text{ίσος με } \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{(k-1)-(k-n)} = \binom{k-1}{n-1}, k \geq n.$$

(β) Για την $g(t)$, αρκεί να αντικαταστήσουμε τον όρο $(1-t)^{-n}$ με το ανάπτυγμα:

$$(1-t)^{-n} = \frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^r = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^r \text{ οπότε θα προκύψει:}$$

$$g(t) = \frac{\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^r\right) - 1}{t} = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^r}{t} = \sum_{r=1}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^{r-1} \text{ ή}$$

αν αντικαταστήσουμε $r-1=k \Rightarrow r=k+1$, ο ζητούμενος συντελεστής είναι ίσος με:

$$\binom{n+k}{k+1} = \binom{n+k}{(n+k)-(k+1)} = \binom{n+k}{n-1}, k \geq 0.$$

3.3 Διάφορες συνδυαστικές ταυτότητες και ο τύπος του Cauchy

Μία από τις επόμενες τρεις μορφές του διωνυμικού αναπτύγματος είναι αρκετή για να αποδειχθούν πολλές ταυτότητες που περιλαμβάνουν διωνυμικούς συντελεστές.

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k, t \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \dots (1)$$

$$(1+t)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} t^k, |t| < 1, x \in \mathbb{R} (2)$$

$$(1-t)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k, |t| < 1, n = 0, 1, \dots (3)$$

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε ορισμένα παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.4 Να υπολογιστούν τα αθροίσματα: $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, $S_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.

Λύση. Θέτοντας $t = 1$, στον τύπο (1) βρίσκουμε $(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

Άρα, $S_1 = \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Ομοίως, για $t = -1$, ο τύπος (1) δίνει:

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}, \text{ δηλαδή } S_2 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Παράδειγμα 3.5 Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$(\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} \binom{n+k-1}{k}, (\beta) \sum_{k=0}^{\infty} n^{-k} \binom{n+k-1}{k}, n > 1.$$

Λύση. (α) Θέτοντας $t = \frac{1}{2}$ στον τύπο (3), βρίσκουμε:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ ή } 2^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{1}{2^k}$$

από όπου προκύπτει άμεσα ότι: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} \binom{n+k-1}{k} = 1$.

(β) Από τον ίδιο τύπο αντικαθιστώντας $t = \frac{1}{n}$, θα προκύψει:

$$\sum_{k=0}^{\infty} n^{-k} \binom{n+k-1}{k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \frac{n^n}{(n-1)^n}, n > 1. \quad \square$$

Παράδειγμα 3.6 Αν r, n είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι, τέτοιοι ώστε $r \leq n$, να υπολογιστεί το άθροισμα,

$$S = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k}{r}.$$

Λύση. Ισχύει ότι $\binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r}$. Συνεπώς, το άθροισμα που μας ενδιαφέρει παίρνει τη μορφή:

$$S = \sum_{k=r}^n \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r} = \binom{n}{r} \sum_{k=r}^n \binom{n-r}{k-r}. \text{ Εκτελώντας την αλλαγή μεταβλητής } k-r=j, \text{ έχουμε: } S = \binom{n}{r} \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j}.$$

Χρησιμοποιώντας ότι $\sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} = 2^{n-r}$, καταλήγουμε ότι: $S = \binom{n}{r} 2^{n-r}. \quad \square$

Παράδειγμα 3.7 Να υπολογισθούν τα αθροίσματα: (α) $S_4 = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$, (β) $S_5 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Λύση. (α) Παραγωγίζοντας τον τύπο (1) ως προς t , βρίσκουμε $n(1+t)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k t^{k-1}$ και για $t=1$ προκύπτει

$$S_4 = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

(β) Για το S_5 αρκεί να ολοκληρώσουμε τη σχέση (1) ως προς t από $t=0$ έως $t=1$, οπότε θα έχουμε:

$$\int_0^1 (1+t)^n dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 t^k dt \quad \text{ή} \quad \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1$$

$$\text{και προκύπτει ότι } S_5 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{(1+1)^{n+1} - (1+0)^{n+1}}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}. \quad \square$$

Παράδειγμα 3.8 Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

$$S_6 = \sum_{k=0}^n \frac{k^2 + k + 10}{k+1} \binom{n}{k}, \quad S_7 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \binom{n}{k-1}, \quad S_8 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{ak^2 + bk + c}{k} \binom{n}{k-1}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Λύση. $S_6 = \sum_{k=0}^n \frac{k(k+1)+10}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \left(k + \frac{10}{k+1} \right) \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} + 10 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = S_4 + 10S_5 = n2^{n-1} + 10 \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$

Για το S_7 αρκεί να θέσουμε $k-1=r$, οπότε:

$$S_7 = \sum_{r=0}^n \frac{1}{r+1} \binom{n}{r} = S_5 = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1).$$

Για το S_8 έχουμε: $S_8 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{ak^2 + bk + c}{k} \binom{n}{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \left(ak + b + c \frac{1}{k} \right) \binom{n}{k-1}$

$$= a \sum_{k=1}^{n+1} k \binom{n}{k-1} + b \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} + c \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \binom{n}{k-1}$$

και εκτελώντας το μετασχηματισμό $k-1=r$, βρίσκουμε:

$$S_8 = a \sum_{r=0}^n (r+1) \binom{n}{r} + b \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} + c \sum_{r=0}^n \frac{1}{r+1} \binom{n}{r}$$

$$= a \left\{ \sum_{r=0}^n r \binom{n}{r} + \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \right\} + b \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} + c \sum_{r=0}^n \frac{1}{r+1} \binom{n}{r}$$

$$= a \sum_{r=0}^n r \binom{n}{r} + (a+b) \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} + c \sum_{r=0}^n \frac{1}{r+1} \binom{n}{r} = aS_4 + (a+b)S_1 + cS_5 = an2^{n-1} + (a+b)2^n + c \frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \square$$

Σε αρκετές περιπτώσεις, η απόδειξη συνδυαστικών ταυτοτήτων απαιτεί τον υπολογισμό του γενικού όρου δύο πολυωνύμων. Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.3.1 Αν $a_k, b_k, k=0,1,2,\dots$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ τότε το

γινόμενο $f(t)g(t)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή: $f(t)g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, όπου $c_n, n=0,1,2,\dots$ δίνονται από τους

τύπους: $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ ή $c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k, \quad n=0,1,2,\dots$

Στην περίπτωση που τα αθροίσματα στις εκφράσεις των $f(t), g(t)$ είναι πεπερασμένα, π.χ. $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k, g(t) = \sum_{k=0}^m b_k t^k$ ισχύει ο τύπος: $f(t)g(t) = \sum_{r=0}^{n+m} c_r t^r$, ενώ τα $c_r, r = 0, 1, \dots, n+m$, δίνονται από τους τύπους:

$$c_r = \sum_{k=0}^{\min(r,n)} a_k b_{r-k} = \sum_{k=0}^{\min(r,m)} a_{r-k} b_k, r = 0, 1, \dots, n+m.$$

Στην επόμενη πρόταση δίνεται μία σημαντική ταυτότητα της Συνδυαστικής Ανάλυσης που είναι γνωστή ως τύπος του Cauchy.

Πρόταση 3.3.2 (Τύπος του Cauchy). Αν $x, y \in \mathfrak{R}$ και n θετικός ακέραιος, τότε ισχύει:

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (2) και στα δύο μέλη της ισότητας:

$$(1+t)^{x+y} = (1+t)^x (1+t)^y, |t| < 1, \quad \text{έχουμε:} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x+y}{n} t^n = f(t)g(t), \quad \text{όπου } f(t) = (1+t)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

$$g(t) = (1+t)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y}{k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.3.1 μπορούμε να γράψουμε:

$$f(t)g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad \text{όπου: } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}. \text{ Επομένως, θα έχουμε:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{x+y}{n} t^n = f(t)g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, |t| < 1 \text{ και προκύπτει άμεσα ότι: } \binom{x+y}{n} = c_n = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}. \quad \square$$

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες:

$$\binom{x+y}{n} = \frac{(x+y)_n}{n!}, \binom{x}{k} = \frac{(x)_k}{k!}, \binom{y}{n-k} = \frac{(y)_{n-k}}{(n-k)!}$$

$$\text{ο τύπος του Cauchy παίρνει τη μορφή: } \frac{(x+y)_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(x)_k}{k!} \frac{(y)_{n-k}}{(n-k)!}$$

$$\text{ή } (x+y)_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n-k}.$$

Στην ειδική περίπτωση που οι αριθμοί $x, y \in \mathbb{Z}$ ο τύπος του Cauchy για $x = m \in \mathbb{Z}$, $y = n \in \mathbb{Z}$, γίνεται: $\binom{m+n}{v} = \sum_{k=0}^v \binom{m}{k} \binom{n}{v-k}$.

Τα πραγματικά όρια της άθροισης στο δεξιό μέλος προκύπτουν από το γεγονός ότι για να είναι ένας όρος της μορφής $\binom{m}{k} \binom{n}{v-k}$ μη-μηδενικός, πρέπει να ισχύει: $0 \leq k \leq m, 0 \leq v-k \leq n$, δηλαδή $k \geq 0, k \leq v-n$ και $k \leq m, k \leq v$. Άρα $\binom{m+n}{v} = \sum_{\max(0, v-n)}^{\min(m, v)} \binom{m}{k} \binom{n}{v-k}$. Η ειδική περίπτωση του τύπου του Cauchy αποδείχθηκε το 1772 από τον Γάλλο μαθηματικό Vandermonde.

Παράδειγμα 3.9 Αν $x, y \in \mathbb{R}$ και n θετικός ακέραιος τότε: $\begin{bmatrix} x+y \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ n-k \end{bmatrix}$.

Λύση. Από την Πρόταση 3.1.2 (α), (β) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x+y \\ n \end{bmatrix} &= (-1)^{-n} \binom{-(x+y)}{n} = (-1)^{-n} \binom{-x-y}{n} = (-1)^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{-x}{k} \binom{-y}{n-k} \\ &= (-1)^{-n} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} (-1)^k (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} y \\ n-k \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ n-k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Η προηγούμενη ταυτότητα, στην περίπτωση που τα x, y είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, έστω m, n αντίστοιχα παίρνει τη μορφή:

$$\binom{m+n+v-1}{v} = \sum_{k=0}^v \binom{m+k-1}{k} \binom{n+v-k-1}{v-k} \quad (*)$$

ή ισοδύναμα:

$$\binom{m+n+v-1}{m+n-1} = \sum_{k=0}^v \binom{m+k-1}{m-1} \binom{n+v-k-1}{n-1}. \quad \square$$

Παράδειγμα 3.10 Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

$$(\alpha) \sum_{k=0}^v \binom{v}{k}^2 \quad (\beta) \sum_{k=0}^v \binom{m+k-1}{k} \binom{m-k-1}{v-k}, m > v$$

Λύση. (α) $\sum_{k=0}^v \binom{v}{k}^2 = \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} \binom{v}{k} = \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} \binom{v}{v-k}$ και από τον τύπο του Cauchy

$$\sum_{k=0}^v \binom{v}{k}^2 = \binom{v+v}{v} = \binom{2v}{v}.$$

(β) Για το (β), θέτουμε $n = m - v$ στη σχέση (*), οπότε $\binom{2m-1}{v} = \sum_{k=0}^v \binom{m+k-1}{k} \binom{m-k-1}{v-k}$. $\square$

3.4 Το Πολυωνυμικό Θεώρημα

Από τον τύπο του Νεύτωνα έχουμε ότι: $(x_1 + x_2)^v = \sum_{r=0}^v \binom{v}{r} x_1^r x_2^{v-r}$. Τι προκύπτει αν προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε το τελευταίο αποτέλεσμα θεωρώντας τη δύναμη $(x_1 + \dots + x_k)^v$, όπου v, k θετικοί ακέραιοι με $k \geq 2$; Αρχικά, γράφουμε τη δύναμη στη μορφή:

$$(x_1 + \dots + x_k)^v = (x_1 + \dots + x_k) \cdots (x_1 + \dots + x_k), \quad v - \text{φορές}.$$

Ο γενικός όρος του αθροίσματος που προκύπτει μετά την εκτέλεση των πράξεων θα δημιουργείται επιλέγοντας ένα από τα σύμβολα $x_1, \dots, x_k$ από κάθε παρένθεση και πολλαπλασιάζοντας τα. Έτσι, θα παίρνουμε όρους της μορφής $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$ όπου $r_1 + r_2 + \dots + r_k = v$. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να πάρουμε τέτοιους όμοιους όρους; Για να δημιουργηθεί ο όρος $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$ θα πρέπει να επιλέξουμε r_1 από τους v διαθέσιμους όρους (παρενθέσεις), όπου θα πάρουμε το σύμβολο x_1 (υπάρχουν

$\binom{v}{r_1}$ διαφορετικοί τρόποι επιλογής). Από τις $v - r_1$ παρενθέσεις που δεν χρησιμοποιήθηκαν θα επιλέξουμε r_2

παρενθέσεις από όπου θα πάρουμε τα σύμβολο x_2 (υπάρχουν $\binom{v-r_1}{r_2}$ διαφορετικοί τρόποι επιλογής)...

από τις $v - r_1 - \dots - r_{k-1} = r_k$ παρενθέσεις που δεν χρησιμοποιήθηκαν σε όλα τα προηγούμενα βήματα να

επιλέξουμε r_k παρενθέσεις από όπου θα πάρουμε το σύμβολο x_k (υπάρχουν $v_k = \binom{v-r_1-\dots-r_{k-1}}{r_k} = \binom{r_k}{r_k} = 1$

τρόποι επιλογής). Άρα, οι συνολικοί τρόποι επιλογής που οδηγούν στο μονώνυμο $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$ είναι, από την πολλαπλασιαστική αρχή,

$$\begin{aligned} v_1 \cdots v_k &= \binom{v}{r_1} \binom{v-r_1}{r_2} \cdots \binom{v-r_1-\dots-r_{k-1}}{r_k} = \frac{v!}{r_1!(v-r_1)!} \cdot \frac{(v-r_1)!}{r_2!(v-r_1-r_2)!} \cdots \frac{(v-r_1-\dots-r_{k-1})!}{r_k!((v-r_1-\dots-r_{k-1})-r_k)!} \\ &= \frac{v!}{r_1! r_2! \cdots r_k!} = \binom{v}{r_1, r_2, \dots, r_k}. \end{aligned}$$

Τελικά, το ανάπτυγμα της δύναμης $(x_1 + \dots + x_k)^v$ αποτελείται από ένα άθροισμα όρων της μορφής

$\binom{v}{r_1, \dots, r_k} x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k}$ όπου τα $r_1, \dots, r_k$ είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι που ικανοποιούν τη σχέση $r_1 + \dots + r_k = v$. Έτσι αποδείξαμε το Πολυωνυμικό Θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.1 (Πολυωνυμικό Θεώρημα). Έστω v, k θετικοί ακέραιοι και $x_1, \dots, x_k \in \mathfrak{R}$. Τότε, το ανάπτυγμα της v -οστής δύναμης του αθροίσματος $x_1 + \dots + x_k$ δίνεται από τον τύπο:

$$(x_1 + \dots + x_k)^v = \sum \frac{v!}{r_1! \dots r_k!} x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k}$$

όπου η άθροιση γίνεται για όλες τις k -άδες $(r_1, \dots, r_k)$ μη-αρνητικών ακεραίων οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση: $r_1 + \dots + r_k = v$.

Το πολυωνυμικό θεώρημα αποδείχθηκε από τον Leibniz αλλά η αυστηρή μαθηματική του απόδειξη έγινε αργότερα από τον James Bernoulli.

Οι συντελεστές $\binom{v}{r_1, \dots, r_k} = \frac{v!}{r_1! \dots r_k!}$ καλούνται πολυωνυμικοί συντελεστές.

Παράδειγμα 3.11 Να γραφεί η παράσταση $(x_1 + x_2 + x_3)^4$ ως άθροισμα δυνάμεων των x_1, x_2, x_3 .

Λύση. Θα πρέπει αρχικά να βρούμε όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους r_1, r_2, r_3 τ.ω. $r_1 + r_2 + r_3 = 4$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές των πολυωνυμικών συντελεστών από τον τύπο:

$$\binom{4}{r_1, r_2, r_3} = \frac{4!}{r_1! r_2! r_3!}.$$

r_1	r_2	r_3	$\frac{4!}{r_1! r_2! r_3!}$	$x_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{r_3}$
0	0	4	1	x_1^4
	1	3	4	$x_2 x_1^3$
	2	2	6	$x_2^2 x_1^2$
	3	1	4	$x_2^3 x_1$

	4	0	1	x_2^4
1	0	3	4	$x_1 x_3^3$
	1	2	12	$x_1 x_2 x_3^2$
	2	1	12	$x_1 x_2^2 x_3$
	3	0	4	$x_1 x_2^3$
2	0	2	6	$x_1^2 x_2^2$
	1	1	12	$x_1^2 x_2 x_3$
	2	0	6	$x_1^2 x_2^2$
3	0	1	4	$x_1^3 x_2$
	1	0	4	$x_1^3 x_2$
4	0	0	1	x_1^4

Από τον παραπάνω πίνακα:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^4 = x_1^4 + 4x_1^3 x_2 + 4x_1^3 x_3 + 6x_1^2 x_2^2 + 12x_1^2 x_2 x_3 + 6x_1^2 x_3^2 + 4x_1 x_2^3 + 12x_1 x_2^2 x_3 + 12x_1 x_2 x_3^2 + 4x_1 x_3^3 + x_2^4 + 4x_2^3 x_3 + 6x_2^2 x_3^2 + 4x_2 x_3^3 + x_3^4. \quad \square$$

Παράδειγμα 3.12 Να βρεθεί ο συντελεστής του x^{10} στο πολυωνυμικό ανάπτυγμα της παράστασης $(1 + x^2 + x^6)^{20}$.

Λύση. Έχουμε: $(1 + x^2 + x^6)^{20} = \sum \frac{20!}{r_1! r_2! r_3!} 1^{r_1} (x^2)^{r_2} (x^6)^{r_3} = \sum \frac{20!}{r_1! r_2! r_3!} x^{2r_2 + 6r_3}$, όπου η άθροιση γίνεται για όλους τους ακραίους r_1, r_2, r_3 που είναι μη-αρνητικοί και για τους οποίους ισχύει: $r_1 + r_2 + r_3 = 20$.

Για να βρούμε τους συντελεστές του x^{10} αρκεί να προσδιορίσουμε τις τιμές των r_1, r_2, r_3 για τις οποίες $r_1 + r_2 + r_3 = 20$ και $2r_2 + 6r_3 = 10$. Στη συνέχεια, πρέπει να αθροίσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές δηλαδή τις ποσότητες $\frac{20!}{r_1! r_2! r_3!}$. Από τη σχέση $2r_2 + 6r_3 = 10$ προκύπτει ότι οι μόνες επιτρεπτές τιμές για το r_3 είναι $r_3 = 0$ ή $r_3 = 1$. Για $r_3 = 0$, θα έχουμε: $2r_2 + 6 \cdot 0 = 10 \Rightarrow r_2 = 5$ και από τη σχέση $r_1 + r_2 + r_3 = 20$ βρίσκουμε $r_1 = 20 - r_2 - r_3 = 15$. Ο συντελεστής που αντιστοιχεί στην τριάδα $(r_1, r_2, r_3) = (15, 5, 0)$ είναι ίσος με:

$$\frac{20!}{15!5!0!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5!} = 15504.$$

$$\text{Για } r_3 = 1 \Rightarrow r_2 = 2, r_1 = 17 \text{ με συντελεστή: } \frac{20!}{1! \cdot 2! \cdot 17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{2!} = 3420.$$

Συνεπώς, ο συντελεστής στο ανάπτυγμα της παράστασης $(1+x^2+x^6)^{20}$ για το x^{10} είναι ίσος με: $15504+3420=18924$. $\square$