

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η ΑΡΧΗ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ – ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ

Εισαγωγή. Η αρχή του εγκλεισμού – αποκλεισμού είναι ένα ισχυρό μέσο απαρίθμησης με το οποίο υπολογίζεται ο αριθμός των στοιχείων της ένωσης και της τομής των συμπληρωμάτων οποιονδήποτε περασμένων συνόλων.

4.1 Απαρίθμηση των στοιχείων ένωσης συνόλων

Έστω ότι έχουμε $n = 3$ σύνολα A_1, A_2, A_3 υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω , όχι απαραίτητα ξένα ανά δύο μεταξύ τους. Το πλήθος των στοιχείων της ένωσης μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| \\ &= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3| \\ &= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)|) \\ &= (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = S_1 - S_2 + S_3, \text{ όπου } S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \sum_{i=1}^3 |A_i|,$$

$$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3| = \sum_{i < j} |A_i \cap A_j|, S_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Ισχύει η πρόταση.

Πρόταση 4.1.1 (Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού). Αν $A_1, \dots, A_n, n \geq 2$, είναι υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω , τότε:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = S_{n,1} - S_{n,2} + S_{n,3} - \dots + (-1)^{n-1} S_{n,n} = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} S_{n,r}$$

όπου οι ποσότητες $S_{n,r}, r = 1, \dots, n$ δίνονται από τους τύπους

$$S_{n,1} = \sum_{i=1}^n |A_i|, S_{n,2} = \sum_{i < j} |A_i \cap A_j|, \dots, S_{n,n} = |A_1 \cap \dots \cap A_n| \text{ ή}$$

$$S_{n,r} = \sum |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}|, r = 1, \dots, n$$

και το άθροισμα επεκτείνεται σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς $\{i_1, \dots, i_r\}$ των n στοιχείων του συνόλου δεικτών $\{1, \dots, n\}$ ανά r .

Αν δεν υπάρχει πιθανότητα σύγχυσης στους συμβολισμούς, αντί των συμβόλων $S_{n,1}, \dots, S_{n,n}$ θα γράφουμε απλώς $S_1, \dots, S_n$. Η επόμενη πρόταση δίνει τον τρόπο υπολογισμού του πληθικού αριθμού του συνόλου που δεν περιέχει κανένα από τα στοιχεία των συνόλων $A_1, \dots, A_n$.

Πόρισμα 4.1.2 Αν $A_1, \dots, A_n, n \geq 2$, είναι υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω τότε:

$$|A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_n'| = \left| \bigcap_{i=1}^n A_i' \right| = S_{n,0} - S_{n,1} + S_{n,2} - \dots + (-1)^n S_{n,n} = \sum_{r=0}^n (-1)^r S_{n,r}$$

όπου οι ποσότητες $S_{n,r}$ δίνονται από τους τύπους της Πρότασης 4.1.1 και $S_{n,0} = |\Omega|$.

Παράδειγμα 4.1 Δείξτε ότι ο αριθμός των θετικών ακεραίων μικρότερων ή ίσων του $70n$ που δεν διαιρούνται με κανέναν από τους πρώτους αριθμούς 2, 5 και 7 είναι ίσος με $24n$.

Λύση. Έστω $\Omega = \{\text{θετικοί ακέραιοι μικρότεροι ή ίσοι του } 70n\}$ και $A_i \subset \Omega$ το σύνολο των θετικών ακεραίων μικρότερων ή ίσων του $70n$ που διαιρούνται με $s_i, i = 1, 2, 3$ όπου $s_1 = 2, s_2 = 5$ και $s_3 = 7$. Τότε $|A_1' \cap A_2' \cap A_3'|$ είναι ο ζητούμενος αριθμός και σύμφωνα με την αρχή του Εγκλεισμού είναι ίσος με:

$$|A_1' \cap A_2' \cap A_3'| = S_{3,0} - S_{3,1} + S_{3,2} - S_{3,3}, \text{ όπου } S_{3,0} = |\Omega| = 70n, S_{3,1} = \sum_{i=1}^3 |A_i| = \frac{70n}{2} + \frac{70n}{5} + \frac{70n}{7} = 59n,$$

$$S_{3,2} = \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| = \frac{70n}{2 \cdot 5} + \frac{70n}{2 \cdot 7} + \frac{70n}{5 \cdot 7} = 14n, S_{3,3} = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \frac{70n}{2 \cdot 5 \cdot 7} = n.$$

$$\text{Άρα } |A_1' \cap A_2' \cap A_3'| = (70 - 59 + 14 - 1)n = 24n. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.2 Έστω $\Omega = \{1, \dots, 1000\}$. Να υπολογιστεί το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Ω τα οποία διαιρούνται ακριβώς με το 2, το 5, ή το 7.

Λύση. Τα δύο ακόλουθα αποτελέσματα της θεωρίας αριθμών είναι χρήσιμα για τη λύση του προβλήματος. Αν n, m είναι δεδομένοι φυσικοί αριθμοί και $N_n = \{1, \dots, n\}$, τότε το πλήθος των στοιχείων του N_n τα οποία είναι πολλαπλάσια του m (διαιρούνται ακριβώς από το m) είναι ίσο με το $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$

(ακέραιο μέρος του λόγου $\frac{n}{m}$). Αν m_1, m_2, m τρεις φυσικοί αριθμοί τότε το m είναι πολλαπλάσιο του m_1 και του m_2 (διαφύεται και από το m_1 και από το m_2), αν και μόνο αν είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ των m_1, m_2 .

Ορίζουμε τα σύνολα: $A_1 = \{x \in \Omega \mid x \text{ διαιρείται από το } 2\}$, $A_2 = \{x \in \Omega \mid x \text{ διαιρείται από το } 5\}$, $A_3 = \{x \in \Omega \mid x \text{ διαιρείται από το } 7\}$, άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ίσος με $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = S_1 - S_2 + S_3$, όπου S_1, S_2, S_3 όπως αυτά δίνονται στην Πρόταση 4.1.1. Από τα αποτελέσματα της θεωρίας αριθμών έχουμε $|A_1| = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500$, $|A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$ και $|A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$.

Επίσης, $|A_1 \cap A_2| = |\{x \in \Omega : x \text{ διαιρείται από το } 10\}| = \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100$,

$|A_1 \cap A_3| = |\{x \in \Omega : x \text{ διαιρείται από το } 14\}| = \left\lfloor \frac{1000}{14} \right\rfloor = 71$,

$|A_2 \cap A_3| = |\{x \in \Omega : x \text{ διαιρείται από το } 35\}| = \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor = 28$,

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |\{x \in \Omega : x \text{ διαιρείται από το } 70\}| = \left\lfloor \frac{1000}{70} \right\rfloor = 14$,

οπότε, $S_1 = 500 + 200 + 142 = 842$, $S_2 = 100 + 71 + 28 = 199$, $S_3 = 14$ και τελικά

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 842 - 199 + 14 = 657$. $\square$

4.2 Ακέραιες λύσεις γραμμικών εξισώσεων

Ένα τυπικό πρόβλημα της Συνδυαστικής Ανάλυσης είναι ο υπολογισμός του αριθμού των ακέραιων λύσεων της γραμμικής εξίσωσης: $x_1 + \dots + x_n = k$, n, k ακέραιοι αριθμοί και $n \geq 1$.

Με τον όρο «ακέραια λύση» εννοούμε οποιαδήποτε διατεταγμένη n -άδα $(a_1, \dots, a_n)$ αποτελούμενη από n ακέραιους αριθμούς $a_1, \dots, a_n$ για τους οποίους ισχύει $a_1 + \dots + a_n = k$. Μας ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις όπου το πλήθος των λύσεων είναι πεπερασμένο. Π.χ. η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, αν περιοριστούμε στις μη-αρνητικές ακέραιες λύσεις έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων (τετράδων) που την ικανοποιούν διότι, λόγω των σχέσεων $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, οι τιμές των 4 μεταβλητών περιορίζονται στο σύνολο $\{0, 1, 2, 3\}$. Θα δούμε το πρόβλημα του υπολογισμού του πλήθους των ακέραιων λύσεων της γενικής γραμμικής εξίσωσης $x_1 + \dots + x_n = k$, στις επόμενες περιπτώσεις:

(α) $x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n$, (β) x_i μη-αρνητικοί ακέραιοι, $i = 1, \dots, n$, (γ) τα x_i ακέραιοι φραγμένοι κάτω, δηλαδή, $x_i \geq c_i, i = 1, \dots, n$ όπου c_i δοσμένοι ακέραιοι και (δ) τα x_i ακέραιοι φραγμένοι άνω, δηλαδή, $x_i \leq d_i, i = 1, \dots, n$, όπου d_i δοσμένοι ακέραιοι.

Για το (α) ισχύει η πρόταση:

Πρόταση 4.2.1 Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x_1 + \dots + x_n = k, 0 \leq k \leq n$ με τους περιορισμούς $x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n$ είναι ίσο με τον αριθμό $\binom{n}{k}$ των συνδυασμών των n στοιχείων ανά k .

Απόδειξη. Μία λύση της εξίσωσης καθορίζεται πλήρως αν από τα n σύμβολα του συνόλου $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ επιλέξουμε τα k στα οποία θα αντιστοιχηθεί η τιμή 1 (ενώ στα υπόλοιπα $n - k$ θα

αντιστοιχηθεί η τιμή 0). Άρα, τα πλήθος που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι όσοι ακριβώς και οι συνδυασμοί των n στοιχείων ανά k δηλαδή $\binom{n}{k}$. $\square$

Για το (β) ισχύει η πρόταση:

Πρόταση 4.2.2 Το πλήθος των μη-αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + \dots + x_n = k, k \geq 0$ είναι ίσο με τον αριθμό $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$ των επαναληπτικών συνδυασμών των n στοιχείων ανά k .

Απόδειξη. Μία λύση της εξίσωσης αντιστοιχεί στη διάσπαση του μη-αρνητικού ακεραίου k σε n μονάδες και αντιστοίχιση κάθε μίας μονάδας σε ένα από τα σύμβολα $x_1, \dots, x_n$. Η αντιστοίχιση i μονάδων, $i \geq 0$, στο σύμβολο $x_r, 1 \leq r \leq n$, σημαίνει ότι η μεταβλητή x_r έχει πάρει την τιμή $x_r = i$. Κάθε λύση της γραμμικής εξίσωσης αντιστοιχεί σε έναν επαναληπτικό συνδυασμό των n στοιχείων του συνόλου $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ανά k και αντίστροφα. Άρα, το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{(n+k-1)-k} = \binom{n+k-1}{n-1}. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.3 Να υπολογιστεί ο αριθμός των μη-αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(y_1 + y_2 + y_3) = 11.$$

Λύση. Αφού οι δύο παράγοντες $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ και $y_1 + y_2 + y_3$ είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι, θα πρέπει: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ και $y_1 + y_2 + y_3 = 11$ ή $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ και $y_1 + y_2 + y_3 = 1$.

Για την πρώτη περίπτωση υπάρχουν $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \binom{4+1-1}{1} = \binom{4}{1} = 4$ ακέραιες μη-αρνητικές λύσεις της

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ και $\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix} = \binom{11+3-1}{11} = \binom{13}{11} = \binom{13}{2}$ ακέραιες μη-αρνητικές λύσεις της $y_1 + y_2 + y_3 = 11$.

Άρα, αυτή η περίπτωση θα δώσει $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix} = 4 \binom{13}{2}$ διαφορετικές λύσεις. Η δεύτερη περίπτωση θα δώσει:

$\begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \binom{14}{11} = 3 \binom{14}{3}$ διαφορετικές λύσεις.

Από την αρχή του αθροίσματος, ο συνολικός αριθμός ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της εξίσωσης θα είναι ίσος με: $4 \binom{13}{2} + 3 \binom{14}{3}$. $\square$

Παράδειγμα 4.4 Να υπολογιστεί το πλήθος των μη – αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης:
 $5x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{11} = 8$.

Λύση. Αφού $x_2, \dots, x_{11} \geq 0 \Rightarrow 8 - 5x_1 = x_2 + \dots + x_{11} \geq 0 \Rightarrow 8 \geq 5x_1 \Rightarrow x_1 \leq \frac{8}{5}$. Επίσης, αφού x_1 μη-αρνητικός ακέραιος οι μόνες τιμές που μπορεί να πάρει είναι $x_1 = 0$ ή $x_1 = 1$. Αν $x_1 = 0$ η εξίσωση που δόθηκε παίρνει τη μορφή $x_2 + \dots + x_{11} = 8$ και το πλήθος των μη-αρνητικών ακέραιων λύσεων θα είναι ίσο με $\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+8-1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix}$. Ομοίως, αν $x_1 = 1$, η εξίσωση γίνεται: $x_2 + \dots + x_{11} = 8 - 5 = 3$ και το πλήθος των μη-αρνητικών ακέραιων λύσεων δίνεται από τον τύπο $\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+3-1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}$. Άρα, το συνολικό πλήθος ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της εξίσωσης είναι ίσο με $\begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}$. $\square$

Για το (γ), ζητάμε το πλήθος των ακέραιων λύσεων, όχι απαραίτητα μη-αρνητικών που ικανοποιούν τους περιορισμούς $x_1 \geq c_1, \dots, x_n \geq c_n$ για την εξίσωση: $x_1 + \dots + x_n = k$. Ορίζουμε τις νέες ακέραιες μεταβλητές $y_i = x_i - c_i, i = 1, \dots, n$. Η γραμμική εξίσωση παίρνει τη μορφή $y_1 + \dots + y_n = k - c$, όπου $c = c_1 + \dots + c_n$ ενώ οι άγνωστοι είναι οι $y_1, \dots, y_n$ και είναι μη-αρνητικοί. Το πλήθος όμως των λύσεων της τελευταίας εξίσωσης είναι, από την Πρόταση 4.2.2, ίσο με $\begin{bmatrix} n \\ k-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+k-c-1 \\ k-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+k-c-1 \\ n-1 \end{bmatrix}$.

Ισχύει η Πρόταση 4.2.3.

Πρόταση 4.2.3 Το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + \dots + x_n = k$ με τους περιορισμούς $x_i \geq c_i, i = 1, \dots, n, c_i i = 1, \dots, n$, δοσμένοι ακέραιοι αριθμοί, είναι ίσο με: $\begin{bmatrix} n \\ k-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+k-c-1 \\ n-1 \end{bmatrix}$, όπου $c = c_1 + \dots + c_n$.

Παρόμοια, για την Περίπτωση (δ), έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.2.4 Το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + \dots + x_n = k$ με τους περιορισμούς $x_i \leq d_i, i = 1, \dots, n, d_i, i = 1, \dots, n$, δεδομένοι ακέραιοι αριθμοί, είναι ίσο με $\begin{bmatrix} n \\ d-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+d-k-1 \\ d-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+d-k-1 \\ n-1 \end{bmatrix}$, όπου $d = d_1 + \dots + d_n$.

Παράδειγμα 4.5 Ζητάμε από $2n$ άτομα να επιλέξουν έναν ακέραιο το καθένα. Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών αποτελεσμάτων ώστε το άθροισμα όλων των αριθμών που επιλέχθηκαν να είναι $k \geq 5n$, τα άτομα $1, 3, \dots, 2n-1$ να έχουν επιλέξει αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 3 και τα άτομα $2, 4, \dots, 2n$ να έχουν επιλέξει αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2.

Λύση. Αν συμβολίσουμε με $x_i, i=1, \dots, 2n$ την επιλογή του i -οστού ατόμου, θα πρέπει να ισχύει: $x_1 + \dots + x_{2n} = k$ ενώ οι συνθήκες που τέθηκαν οδηγούν στους περιορισμούς

$x_1 \geq 3, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3, \dots, x_{2n-1} \geq 3, x_{2n} \geq 2$. Μπορούμε να γράψουμε: $c_{2i-1} = 3, c_{2i} = 2, i=1, \dots, n$ οπότε $c = c_1 + \dots + c_{2n} = 3n + 2n = 5n$. Το ζητούμενο πλήθος θα είναι ίσο με:

$$\binom{2n+k-c-1}{2n-1} = \binom{2n+k-5n-1}{2n-1} = \binom{k-3n-1}{2n-1}. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.6 Να υπολογιστεί το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της ανίσωσης: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16$.

Λύση. Ισοδύναμα, η ανίσωση γράφεται: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16$, όπου x_5 είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος. Το πλήθος των λύσεων, υπό τους περιορισμούς $x_1, \dots, x_5 \geq 0$, της τελευταίας εξίσωσης, σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.2 είναι ίσο με: $\begin{bmatrix} 5 \\ 16 \end{bmatrix} = \binom{5+16-1}{16} = \binom{20}{16} = \binom{20}{4}$. $\square$